- **No borre, tache pero muestre su trabajo.**
- **Justifique sus respuestas**.
- **Duración de examen: 135 minutos**.
- Total: 100/100 puntos.

Resultados

- La *función indicadora* del conjunto A se deno ta por $\mathbb{1}_A(\cdot)$ y se define como

$$\mathbb{1}_A(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w \in A \\ 0 & \text{si } w \notin A \end{cases}$$

- Una función de densidad de probabilidad h se dice *propia* si h es no negativa e integra uno sobre todos los reales. Esto es, *i)* $h(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}$; *ii)* $\int_{\mathbb{R}} h(u)du = 1$.
- Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{S}, \mathbb{P})$. Entonces se tiene que para cualesquier $A, B \in \mathbb{S}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^C)$, donde $\Omega = B \cup B^C$.
- X variable aleatoria que sigue la *distribución binomial* con parámetros $n \in \mathbb{N}$ y $0 < p < 1$, entonces $X \sim \text{Bin}(n, p)$ tiene función masa de probabilidad f y función generadora de momentos M dadas por

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x); \quad M(t) = (1 - p + pe^t)^n, \ t \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}[X] = np; \quad \text{var}(X) = npq$$

- X variable aleatoria que sigue la *distribución geométrica* con parámetro $0 < p < 1$, entonces $X \sim \text{Geom}(p)$ tiene función masa de probabilidad f y función generadora de momentos M dadas por

$$f(x) = p(1-p)^x \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(x); \quad M(t) = \frac{p}{1 - (1-p)e^t}, \ t \leq -\log(1-p)$$

$$\mathbb{E}[X] = (1-p)/p; \quad \text{var}(X) = (1-p)/p^2$$

- X variable aleatoria que sigue la *distribución Poisson* con parámetro $\lambda > 0$, entonces $X \sim \text{Po}(\lambda)$ tiene función masa de probabilidad f y función generadora de momentos M dadas por

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(x); \quad M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda; \quad \text{var}(X) = \lambda$$

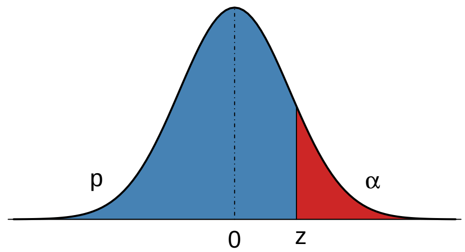
- X variable aleatoria que sigue la *distribución exponencial* con parámetro tasa $\lambda > 0$, entonces $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ tiene función de densidad de probabilidad f, función de probabilidad acumulada F y función generadora de momentos M dadas por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x); \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0; \quad M(t) = (1 - t/\lambda)^{-1}, \ t < \lambda$$

$$\mathbb{E}[X] = 1/\lambda; \quad \text{var}(X) = 1/\lambda^2$$

6. Distribución Normal Estándar

$$Z \sim \text{Normal}(0,1)$$



$$p = P(Z \le z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(u)du = 1 - \alpha$$

donde

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}u^2}$$

Nota: Si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $Z = (X-\mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0,1)$. Luego,

$$P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Tabla 6A. Probabilidades acumuladas p de la distribución normal estándar.

z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.00
−3.4	0.0002	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
−3.3	0.0003	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0005	0.0005	0.0005
−3.2	0.0005	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0007	0.0007
−3.1	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0009	0.0010
−3.0	0.0010	0.0010	0.0011	0.0011	0.0011	0.0012	0.0012	0.0013	0.0013	0.0013
−2.9	0.0014	0.0014	0.0015	0.0015	0.0016	0.0016	0.0017	0.0018	0.0018	0.0019
−2.8	0.0019	0.0020	0.0021	0.0021	0.0022	0.0023	0.0023	0.0024	0.0025	0.0026
−2.7	0.0026	0.0027	0.0028	0.0029	0.0030	0.0031	0.0032	0.0033	0.0034	0.0035
−2.6	0.0036	0.0037	0.0038	0.0039	0.0040	0.0041	0.0043	0.0044	0.0045	0.0047
−2.5	0.0048	0.0049	0.0051	0.0052	0.0054	0.0055	0.0057	0.0059	0.0060	0.0062
−2.4	0.0064	0.0066	0.0068	0.0069	0.0071	0.0073	0.0075	0.0078	0.0080	0.0082
−2.3	0.0084	0.0087	0.0089	0.0091	0.0094	0.0096	0.0099	0.0102	0.0104	0.0107
−2.2	0.0110	0.0113	0.0116	0.0119	0.0122	0.0125	0.0129	0.0132	0.0136	0.0139
−2.1	0.0143	0.0146	0.0150	0.0154	0.0158	0.0162	0.0166	0.0170	0.0174	0.0179
−2.0	0.0183	0.0188	0.0192	0.0197	0.0202	0.0207	0.0212	0.0217	0.0222	0.0228
−1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250	0.0256	0.0262	0.0268	0.0274	0.0281	0.0287
−1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314	0.0322	0.0329	0.0336	0.0344	0.0351	0.0359
−1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392	0.0401	0.0409	0.0418	0.0427	0.0436	0.0446
−1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485	0.0495	0.0505	0.0516	0.0526	0.0537	0.0548
−1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594	0.0606	0.0618	0.0630	0.0643	0.0655	0.0668
−1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764	0.0778	0.0793	0.0808
−1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918	0.0934	0.0951	0.0968
−1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093	0.1112	0.1131	0.1151
−1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292	0.1314	0.1335	0.1357
−1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515	0.1539	0.1562	0.1587
−0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762	0.1788	0.1814	0.1841
−0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033	0.2061	0.2090	0.2119
−0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327	0.2358	0.2389	0.2420
−0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643	0.2676	0.2709	0.2743
−0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981	0.3015	0.3050	0.3085
−0.4	0.3121	0.3156	0.3192	0.3228	0.3264	0.3300	0.3336	0.3372	0.3409	0.3446
−0.3	0.3483	0.3520	0.3557	0.3594	0.3632	0.3669	0.3707	0.3745	0.3783	0.3821
−0.2	0.3859	0.3897	0.3936	0.3974	0.4013	0.4052	0.4090	0.4129	0.4168	0.4207
−0.1	0.4247	0.4286	0.4325	0.4364	0.4404	0.4443	0.4483	0.4522	0.4562	0.4602
−0.0	0.4641	0.4681	0.4721	0.4761	0.4801	0.4840	0.4880	0.4920	0.4960	0.5000

Trabaje cinco problemas

1. [**20 puntos**] Considere dos urnas. La urna I contiene 10 pelotas, de las cuales cinco están marcadas con el número 0, tres con el número 1 y dos con el número 2. La urna II contiene otras 10 pelotas de las cuales tres están marcadas con el número 0, cuatro con el número 1 y tres con el número 2. Se selecciona aleatoriamente y de forma independiente una pelota de cada urna. Sea X la variable aleatoria que denota la suma de los números marcados de las bolas seleccionadas. Determinar la media, moda y mediana de X.

2. [**20 puntos**] Sea W una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por

$$f(w) = \frac{1}{w^2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(w)$$

   a) [6 puntos] Encuentre el primer y tercer cuartiles de la distribución.
   b) [4 puntos] Determine la constante c de manera que los eventos $A = \{1 < W < 4\}$ y $B = \{2 \leq W < c\}$ sean independientes.
   c) [10 puntos] Calcule $\mathbb{E}[W|W < 2]$.

3. [**20 puntos**] La calificación final de un *curso* es una variable aleatoria que puede ser modelada razonablemente con una distribución normal con una media igual a 6.3 y una desviación estándar de 2.5. Responda los siguientes incisos. Exprese sus resultados con al menos 3 decimales.

   a) [2 puntos] Obtener la probabilidad de que un alumno tomado al azar del *curso* obtenga una calificación menor que 5.
   b) [4 puntos] Si este semestre hay 100 estudiantes en el *curso*, ¿cuál es el número esperado de estudiantes que obtendrán al menos una nota de 8.5?
   c) [8 puntos] Si se toma al azar un grupo de 20 estudiantes, cuyas notas ya se sabe que son aprobatorias (6 o más), ¿Cuál es el número esperado de ellos que obtendrán al menos una nota de 8.5?
   d) [4 puntos] Si supone la misma variabilidad, ¿cuál debería ser la nota que permita establecer un umbral de manera que solo reprobara un 20 % de los estudiantes del *curso*.

4. [**20 puntos**] Se tiene una colección de 12 problemas de los cuales 3 de ellos se usaron en el examen final del periodo de mayo. Para el periodo de diciembre se seleccionaron al azar 3 problemas y para el periodo de enero nuevamente se han escogido al azar 3 problemas. Responda los siguientes incisos. Sus resultados numéricos exprészelos con al menos 3 decimales.

   a) [3 puntos] Calcule la probabilidad de que los problemas elegidos para el periodo de diciembre no se hayan utilizado anteriormente.
   b) [12 puntos] Calcule la probabilidad de que los problemas elegidos para el periodo de enero no se hayan utilizado anteriormente.
   c) [5 puntos] Si sabe que los problemas seleccionados para enero no fueron utilizados anteriormente, calcule la probabilidad de que 2 de los 3 problemas de diciembre fueron usados en el periodo de mayo.

5. [**20 puntos**] El número de huevos que pone un insecto en la rama de un árbol se modela razonablemente con una variable aleatoria N que sigue una distribución Poisson de media $\lambda = 2$. Sin embargo tal variable sólo puede ser observada si es estrictamente positiva ya que si es cero entonces no se sabría que el insecto está en el árbol.

   a) [3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que habiendo un insecto en la rama, éste sea detectado?

   b) [7 puntos] Encuentre la probabilidad de que el número de huevos sea a lo más de 3 dado que se sabe que hay un insecto en la rama.

   c) [10 puntos] Determine el número esperado de huevos en una rama, dado que se sabe que hay un insecto en la rama.

6. [**20 puntos**] Considere X variable aleatoria. Sea

$$f_X(x) = \kappa|x|(1+x)(1-x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

   a) [5 puntos] Encuentre κ que haga que f_X sea una función de densidad *propia*.

   b) [5 puntos] Obtenga la correspondiente función de distribución F_X.

   c) [5 puntos] Calcule $\mathbb{P}(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2})$

   d) [5 puntos] Determine la moda, media y mediana de la distribución.

7. [**20 puntos**]

   a) [10 puntos] un sistema S tiene dos componentes C_1 y C_2 conectadas *en serie*, $\vdash\!\!\rightarrow \otimes\!\longrightarrow\!\otimes\!\vdash\!\!\rightarrow$. Luego, el sistema funciona sólo si ambas componentes están funcionales, ó equivalentemente, el sistema falla con que alguna de las componentes no opere. Un actuario determinó lo siguiente:

      i) La probabilidad de que el sistema completo S falle es de 0.28.

      ii) Es dos veces más probable que falle la segunda componente C_2 que la primera componente C_1.

      iii) Ambas componentes C_1 y C_2 funcionan de manera independiente.

      Considere la información anterior y calcule la probabilidad de que la primera componente C_1 falle.

   b) [10 puntos] Considérese dos eventos A y B tales que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B)$ y $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$. Calcular $\mathbb{P}(A \cup B^c)$

8. [**20 puntos**] Sea T la variable que denota el tiempo aleatorio de reparación de cierto dispositivos. Suponga que T sigue una distribución exponencial con tiempo medio de reparación de 2 horas. Sean $\mu = 1$ y $\sigma = 1/2$ y defina el costo por reparación del dispositivo como $Y = \mu + \sigma T$. Responda los siguientes reactivos, expresando los resultados con al menos 3 decimales.

   a) [4] Calcule $E[Y]$ y $\text{var}(Y)$.

   b) [10] A partir de la definición, encuentre $m_Y(t)$, la función generadora de momentos de Y e indique para qué valores numéricos de t la función está definida. Justifique su respuesta.

   c) [6 puntos] Utilice m_Y para verificar $\mathbb{E}[Y]$ del primer inciso.