- Escriba su clave única: ____________
- **Justifique sus respuestas**.
- **Duración de examen: 130 minutos**.
- Total: 100/100 puntos.

1. [**10 puntos**] Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Poisson parámetro $\lambda > 0$. Luego, X tiene una función masa de probabilidad dada por

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

   a) [3 puntos] A partir de la definición calcule μ_X, el valor esperado de X.

   b) [4 puntos] Determine la función generadora de momentos (*f. g. m.*) de X.

   c) [3 puntos] Use la *f. g. m.* para verificar su cálculo de μ_X.

2. [**15 puntos**] En el mes de junio inician los partidos finales de la temporada de basquetbol de la NBA. En la serie final dos equipos de cada conferencia, que llamaremos equipo E y equipo W (conferencia este y oeste respectivamente) juegan una serie de partidos hasta que uno de los equipos gana 4 juegos. Suponga que los resultados de los partidos son independientes. Responda las preguntas con al menos 3 decimales.

   a) [8 puntos] Determine la probabilidad de que el equipo E gane le campeonato si la probabilidad de que E gane un juego individual es $p = 0.6$.

   b) [7 puntos] Esta temporada el equipo E jugará 4 juegos como local en una sucesión: local, local, visitante, visitante, visitante, local y local. Si la probabilidad de que gane el equipo E como local es $p_L = 0.7$, y como visitante $p_V = 0.5$, determine la probabilidad de que el equipo E gane en 4 o 5 juegos.

3. [**10 puntos**] Se dice que la cota superior de la desigualdad de Chebyshev *no se puede mejorar* por la siguiente razón: hay distribuciones que alcanza dicha cota. A saber, sea X una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad dada por la siguiente tabla

x	-1	0	+1
$\mathbb{P}(X = x)$	1/18	16/18	1/18

   Muestre que la probabilidad exacta de que X diste de su media en tres veces o más su desviación estándar alcanza la cota superior dada por la desigualdad de Chebyshev.

4. [**15 puntos**] Sea X una variable aleatoria (*v. a.*) con función de probabilidad f_X dada por

$$f_X(x) = \frac{2}{5}(1+x)\mathbb{1}_{[-1,0)}(x) + \frac{2}{5}\mathbb{1}_{\{0\}}(x) + \frac{4}{5}(1-x)\mathbb{1}_{(0,1]}(x)$$

   a) [2 puntos] Grafique la función de probabilidad f_X.

   b) [2 puntos] ¿Es X una *v. a. discreta*? ¿*Continua*?¿*Mixta?* Argumente su respuesta.

   c) [6 puntos] Determine $F_X(x)$, la función de distribución (de probabilidad acumulada) para todo $x \in \mathbb{R}$.

   d) [5 puntos] Encuentre la media y la mediana de la distribución.

5. [**12 puntos**] Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Responda los siguientes reactivos:

   a) [6 puntos] Sean $A, B, E \in \mathcal{F}$ eventos tales que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(E) \neq 0$. Demuestre que

   $$\mathbb{P}(A \cup B \cup E) = 1 - \mathbb{P}(A^C | B^C \cap E^C)\, \mathbb{P}(B^C | E^C)\, \mathbb{P}(E^C)$$

   b) [6 puntos] Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(A) = 0$ ó $\mathbb{P}(A) = 1$, entonces A es independiente de cualquier evento $B \in \mathcal{F}$.

6. [**16 puntos**] La vida útil de una batería de un auto híbrido es modelada por la variable aleatoria T distribuida exponencialmente con función de densidad dada por

   $$f_T(t) = \kappa e^{-\kappa t}, \qquad t > 0$$

   Considere que el tiempo de vida medio de una batería es de 8 años ($\kappa = 1/8$) para responder los siguientes reactivos:

   a) [3 puntos] Determine el tiempo de vida mínimo que duran el 25 % de las baterías más duraderas, es decir, el *tercer cuartil* de la distribución.

   b) [5 puntos] Una batería ha durado ya 5 años. Calcule la probabilidad de que dure al menos otros 2 años adicionales. (*Pérdida de memoria* de la distribución exponencial.)

   c) [8 puntos] Si la garantía de las baterías es de 3 años, calcule la vida media de las baterías que fallan durante el periodo de garantía.

7. [**12 puntos**] Sea Y una variable aleatoria que sigue la distribución Gamma con *parámetro de forma* $\alpha > 0$ y *parámetro tasa* $\lambda > 0$. Luego, $Y \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda)$ con función de densidad f_Y y función generadora de momentos m_Y dadas por

   $$f_Y(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) \quad \text{y} \quad m_Y(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha},\ t < \lambda$$

   Defina $\beta = 1/\lambda$. Muestre que $\mathbb{E}[kY] = \alpha(k\beta)$ y $\text{var}(kY) = \alpha(k\beta)^2$, de ahí que a β se le llame el *parámetro de escala*.

8. [**10 puntos**] *Paradoja de la Caja de Bertrand*. Se tienen 3 cajas, cada una de ellas con dos monedas. La caja C_1 tiene dos monedas de oro; C_2, una de oro y una de plata y la caja C_3, dos de plata. Se selecciona una caja al azar y se elije una moneda. Si la moneda seleccionada es de oro, determine la probabilidad de que provenga de la caja C_1.

   a) [3 puntos] Argumente en palabras que la respuesta es 1/2.

   b) [7 puntos] Demuestre que la respuesta correcta es 2/3. Argumente.