- Escriba su clave única: __________
- **Justifique sus respuestas**.
- **Duración de examen: 130 minutos**.
- Total: 100/100 puntos.

Resultados

- Y variable aleatoria que sigue la *distribución Gamma* con parámetro de forma $\alpha > 0$ y parámetro tasa $\lambda > 0$. $Y \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda)$. Entonces, tiene función de densidad dada por

$$f(y) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

y media, varianza y función generadora de momentos

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\alpha}{\lambda}; \qquad \text{var}(Y) = \frac{\alpha}{\lambda^2}; \qquad M_Y(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha}, \text{ para } t < 1/\lambda$$

- Las distribuciones *Exponencial* y *Ji-cuadrada con n grados de libertad (χ^2_n)* son casos particulares de la distribución Gamma: $\text{Ga}(1, \lambda)$ y $\text{Ga}(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$, respectivamente.
- Sean $Z \sim \text{N}(0, 1)$ y $\Phi(z) = P(Z \leq z)$. Se tiene entonces que

$$\Phi(1/3) = 0.631, \quad \Phi(1/2) = 0.691, \quad \Phi(1) = 0.841, \quad \Phi(2) = 0.977, \quad \Phi(3) = 0.999$$

$$\Phi(1.282) = 0.900, \quad \Phi(1.645) = 0.950, \quad \Phi(1.960) = 0.975 \quad \Phi(2.326) = 0.990$$

- Sean X_1 y X_2 subvectores del vector aleatorio $X \sim \text{N}_n(\mu, \Sigma)$. Esto es, si

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \text{N}_n\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

donde μ_i y Σ_{ij} son la correspondientes particiones del vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ. Se tiene entonces que,

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim \text{N}_{n_1}(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$$

donde el vector de medias $\mu_{1|2}$ y la matriz de covarianzas $\Sigma_{1|2}$ están dados por

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \quad \text{ y } \quad \Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

- Sea $\boldsymbol{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$ una *m. a.* de una población X con F y f sus *f. p. a.* y *f. d. p.* respectivamente. $X_{(i)}$, denota el i-ésimo estadístico de orden, F_i y f_i las correspondientes *f. p. a.* y *f. d. p.*. Luego, se tiene que para $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 1 - [1 - F(x)]^n; \qquad & f_1(x) &= nf(x)\,[1 - F(x)]^{n-1} \\ F_n(x) &= F(x)^n; & f_n(x) &= nf(x)F(x)^{n-1} \end{aligned}$$

Además, si $x < y$, se tiene

$$\mathbb{P}\left(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y\right) = [F(y) - F(x)]^n$$

Luego, la función de distribución conjunta de $(X_{(1)}, X_{(n)})$ es

$$F_{1n}(x, y) = \mathbb{P}\left(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\right) = [F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n$$

con la correspondiente función de densidad conjunta dada por

$$f_{1n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)\,[F(y) - F(x)]^{n-2}$$

Responda cinco problemas

1. [**20 puntos**] Sean $X_1, \ldots, X_n$, *v.a.i.i.d.*'s con distribución común uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Demuestre que
$$2 \log \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} X_i} \right) \sim \chi^2_{2n}$$
Sugerencia: ¿Cómo se distribuye $-2 \log X_i$?

2. [**20 puntos**] Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad conjunta dada por
$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{0<y<x<\infty\}}(x, y)$$
   a) [14 puntos] Determine $\mathbb{E}[X|Y]$.
   b) [6 puntos] A partir del inciso anterior calcule $\mathbb{E}[X]$.

3. [**20 puntos**] Los precios de apertura por acción X_1 y X_2 de dos acciones similares son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad
$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(x-4)} \mathbb{1}_{[4,\infty)}(x)$$
En cierta mañana un accionista va a comprar acciones d la emisión menos costosa. Determine
   a) [10 puntos] La función de densidad de probabilidad del precio por acción que pagará el inversionista.
   b) [10 puntos] El costo esperado por acción que el inversionista pagará.

4. [**20 puntos**] En este momento hay W dinero en el ATM donde $W \sim \mathrm{N}(1000, 63^2)$. 64 personas retiran dinero y estos retiros son modelados con *v.a.i.i.d.* con media 10 y desviación estándar 2 e independientes de W. Se desea aproximar la probabilidad de que el remanente en el ATM después de los retiros esté entre 230 y 490.
   a) [10 puntos] Utilizando la desigualdad de Chebyshev obtenga una cota a la probabilidad mencionada.
   b) [10 puntos] Obtenga una aproximación a la probabilidad utilizando el Teorema Central de Límite.

5. [**20 puntos**] Sea $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio tal que $X \sim \mathrm{N}_3(\mu, \Sigma)$, con
$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   a) [10 puntos] Defina $Y = 3X_1 - 2X_2 + X_3$ y calcule $\mathbb{P}(Y < 0)$.
   b) [10 puntos] Determine *todos los posibles valores* $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que las variables aleatorias X_2 y $Y = aX_1 + bX_2 + cX_3$ sean independientes.

6. [**20 puntos**] Sean $\theta > 0$ y $\mu > 0$, fijas y X y Y dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con con medias $1/\theta$ y $1/\mu$, respectivamente. En estudios experimentales es común el caso de *observaciones censuradas*. Luego, en lugar de observar X y Y se registran
$$Z = \text{mín}\{X, Y\} \qquad \text{y} \qquad W = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad Z = X \\ 0 & \text{si} \quad Z = Y \end{cases}$$
   a) [10 puntos] Determine la función de distribución (probabilidad acumulada) conjunta de (Z, W).
   b) [10 puntos] Muestre que las variables aleatorias Z y W son independientes.