Ejercicio 2.119 Suponga que se lanzan repetidamente dos dados y se cuenta la suma de las caras hacia arriba en cada lanzamiento. Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

a) La suma 3 sale antes que la suma 7.

b) La suma 4 sale antes que la suma 7.

Solución:

a) Considere los eventos:

$$\begin{aligned} S_j &= \{\text{Suma es j}\} \\ T_k &= \{\text{El juego termina en el ensayo } k\} \\ G_3 &= \{\text{Sale el 3 antes que el 7}\} \end{aligned}$$

Entonces,

$$G_3 = \bigcup_{k=1}^{\infty} (S_3 \cap T_k)$$

con los eventos $(S_3 \cap T_k)$ ajenos. Luego,

$$\mathbb{P}(G_3) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_3 \cap T_k)$$

Ahora bien, $\mathbb{P}(S_3) = 2/36$ y $\mathbb{P}(S_7) = 6/36$. Entonces, $\mathbb{P}(\{\text{Suma 3 ó 7}\}) = 2/36 + 6/36 = 8/36$, por lo que la probabilidad de que el juego no se decida en un lanzamiento de los dados es $1 - 8/36 = 28/36$. Entonces,

$$\mathbb{P}(S_3 \cap T_k) = \underbrace{\left(\frac{28}{36}\right) \cdots \left(\frac{28}{36}\right)}_{k-1 \text{ términos}} \frac{2}{36} = \frac{2}{36} \left(\frac{28}{36}\right)^{k-1}$$

y por lo tanto, la probabilidad de que salga la suma 3 antes que la suma 7 es

$$\mathbb{P}(G_3) = \frac{2}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{28}{36}\right)^{k-1} = \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{28}{36}} = \frac{2}{36} \frac{36}{8} = \frac{1}{4}$$

b) De manera similar, la probabilidad de que salga primero S_4 que suma S_7 es

$$\mathbb{P}(G_4) = \frac{3}{36} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{27}{36}\right)^{k-1} = \frac{3}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{27}{36}} = \frac{3}{36} \cdot \frac{36}{9} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 2.138 Descripción del juego Craps. Un jugador lanza un par de dados y anota la suma de puntos de las caras hacia arriba. Si en el primer lanzamiento el jugar suma un 7 o un 11, el jugador gana el juego. Si, en el primer lanzamiento el jugador obtiene una suma de 2, 3 o 12, el jugador pierde. Si el jugador lanza cualquier otra suma (4,5,6,8,9 ó 10), la suma se convierte en *comodín*. Ahora bien, si el jugador no gana ni pierde en el primer lanzamiento, entonces lanza repetidamente el par de dados hasta que sale el *comodín* ó sale el 7. El jugador gana si sale su *comodín* antes que el 7. ¿Cuál es la probabilidad de que un jugador gane el juego Craps?

Solución:

Considere los eventos:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{El jugador gana}\} \\ B_i &= \{\text{La suma fue de } i \text{ en el primer lanzamiento}\} \\ C_k &= \{\text{Sale una suma de } k \text{ antes que suma 7}\} \end{aligned}$$

Entonces,

$$P(A) = \sum_{i=2}^{12} P(A \cap B_i)$$

Pero $\mathbb{P}(A \cap B_2) = \mathbb{P}(A \cap B_3) = \mathbb{P}(A \cap B_{12}) = 0$. Se tiene también que

$$\mathbb{P}(A \cap B_7) = \mathbb{P}(B_7) = \frac{6}{36} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(A \cap B_{11}) = \mathbb{P}(B_{11}) = \frac{2}{36}$$

Además, por independencia de eventos se sigue que

$$\mathbb{P}(A \cap B_4) = \mathbb{P}(C_4 \cap B_4) = \mathbb{P}(C_4)\mathbb{P}(B_4) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{36}\right) = \frac{3}{36}$$

Similarmente,

$$\mathbb{P}(C_5) = \mathbb{P}(C_9) = \frac{4}{10}, \quad \mathbb{P}(C_6) = \mathbb{P}(C_8) = \frac{5}{11}, \quad \mathbb{P}(C_{10}) = \frac{3}{9}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcccccc} \mathbb{P}(A \cap B_5) & = & \mathbb{P}(C_5)\mathbb{P}(B_5) & = & \frac{2}{45} & = & \mathbb{P}(A \cap B_9) \\ \mathbb{P}(A \cap B_6) & = & \mathbb{P}(C_6)\mathbb{P}(B_6) & = & \frac{25}{396} & = & \mathbb{P}(A \cap B_8) \\ \mathbb{P}(A \cap B_{10}) & = & \mathbb{P}(C_{10})\mathbb{P}(B_{10}) & = & \frac{1}{36} & & \end{array}$$

Finalmente, sumando todos los términos se tiene que $\mathbb{P}(A) = 0.493$.

Referencia:

Wackerly, D.D., Mendenhall, W., and Scheaffer, R.L. (2002), *Mathematical Statistics with Applications*. 6th. Ed. Duxbury Press.

Respuestas por simulación utilizando R

a) Gana la suma 3 sobre la suma 7.

```
Número de juegos simulados = 20000
Prob{ Sale primero el 3 que el 7 } = 0.2453
Prob{ Sale primero el 7 que el 3 } = 0.7547
Número promedio de extracciones= 5.50675
Desviación estándar de extracciones= 3.9809
```

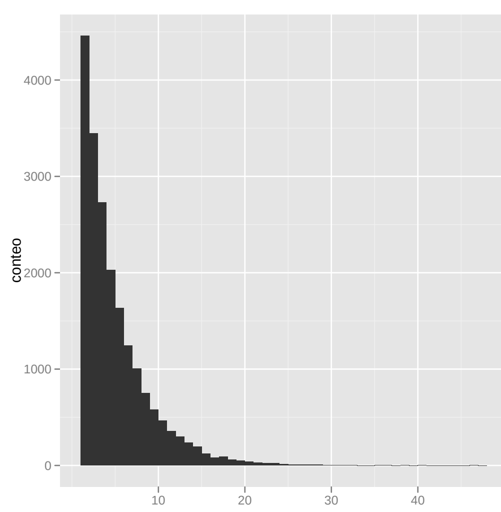

Figura 1: Histograma del número de lanzamientos hasta que sale el 3 antes que el 7.

b) Gana la suma 4 sobre la suma 7.

```
Número de juegos simulados = 20000
Prob{ Sale primero el 4 que el 7 } = 0.3348
Prob{ Sale primero el 7 que el 4 } = 0.6652
Número promedio de extracciones= 5.0378
Desviación estándar de extracciones= 3.4827
```

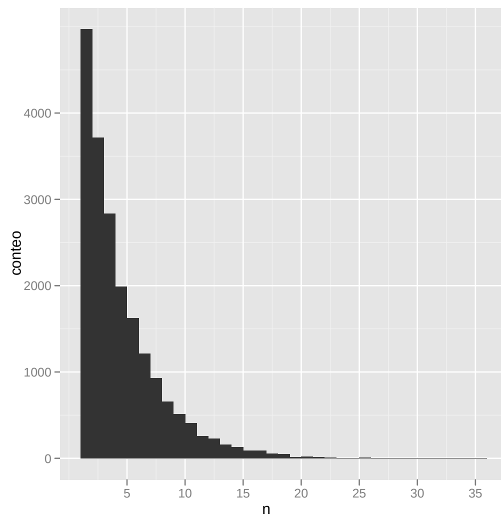

Figura 2: Histograma del número de lanzamientos hasta que sale el 4 antes que el 7.

c) Juego de CRAPS.

```
Número de juegos simulados = 20000
Prob{ ganar} = 0.494
Prob{perder} = 0.506
Número promedio de extracciones= 3.35335
Desviación estándar de extracciones= 2.9362
```

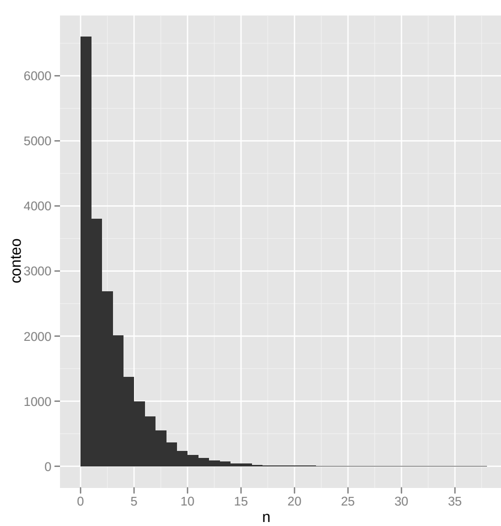

Figura 3: Histograma del número de lanzamientos hasta ganar en el juego CRAPS.

Código R

```
#======== Problema de Dados ============================
cat("\n>>> Problema Gana la suma 3(4) sobre la suma 7 (Wackerly et al., 2008).\n")
cat("[Probabilidad de ganar]\n")

#================================
if(1) {
#======
N <- 20000
K <- 4

output <- rep(NA,N)
n <- rep(1,N)

extract <- function() sample(seq(2,12),1,prob=c(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)/36)

tab <- rep(0,12)
tab[7] <- -1
tab[K] <- +1
for(i in seq(N)) {
    k <- 1
    fin <- FALSE
    while(!fin) {
        k <- k+1
        out <- tab[extract()]
        fin <- ifelse(out==0,FALSE,TRUE)
    }
        output[i] <- out
        n[i] <- k
}
cat("\nNúmero de juegos simulados =",N,"\n")
cat("Prob{ Sale primero el",K,"que el 7 } =",sum(output>0)/N,"\n")
cat("Prob{ Sale primero el 7 que el",K,"} =",sum(output<0)/N,"\n")
cat("Número promedio de extracciones=",nbar <- sum(n)/N,"\n")
cat("Desviación estándar de extracciones=",round(sqrt(sum(n^2)/N-nbar^2),4),"\n")

#rm(list=ls())
#======
}
#================================

#================================
cat("\n>>> Problema juego Craps (Wackerly et al., 2008).\n")
cat("[Probabilidad de ganar]\n")
if(1) {
#======
N <- 20000

output = rep(NA,N)
n <- rep(1,N)

extract <- function() sample(seq(2,12),1,prob=c(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)/36)

for(i in seq(N)) {
    comodin <- extract()
    if(any(comodin==c(7,11))) {
        output[i] <- +1
    } else if(any(comodin==c(2,3,12))) {
        output[i] <- -1
    } else {
        k <- 1
        fin <- FALSE
        tab <- rep(0,12)
        tab[7] <- -1
        tab[comodin] <- +1
        while(!fin) {
            k <- k+1
            out <- tab[extract()]
            fin <- ifelse(out==0,FALSE,TRUE)
        }
        output[i] <- out
        n[i] <- k
    }
}
#print(output)
#print(n)
cat("\nNúmero de juegos simulados =",N,"\n")
cat("Prob{ ganar} =",sum(output>0)/N,"\n")
cat("Prob{perder} =",sum(output<0)/N,"\n")
cat("Número promedio de extracciones=",nbar <- sum(n)/N,"\n")
cat("Desviación estándar de extracciones=",round(sqrt(sum(n^2)/N-nbar^2),4),"\n")
#rm(list=ls())
#======
}
#================================
```