Las distribuciones Gamma y Beta

Ernesto Barrios Z.

3 de julio de 2019

1. La función Gamma

Proposición Para todo $u > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}uy^2} dy = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Demostración. Sea $I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}uy^2} dy$. Entonces,

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}ux^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}uy^2} dx\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u}{2}(x^2+y^2)} dx\, dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} r e^{-\frac{u}{2}r^2} dr\ d\theta \\
&= \int_{0}^{\infty} r e^{-\frac{u}{2}r^2} dr \\
&= -\frac{1}{u}\ e^{-\frac{u}{2}r^2}\Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{u}
\end{aligned}$$

donde se ha empleado la transformación a *coordenadas polares*, a saber, $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$. Se concluye entonces que

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}uy^2} dy = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

Proposición

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{2\pi}$$

Demostración. Se sigue de la proposición anterior para $u = 1$.

Definición 1 Se define la *función (matemática) Gamma* por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2, \dots\}$. La figura 1 muestra la forma de la función gamma.

Propiedades La función gamma cumple las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

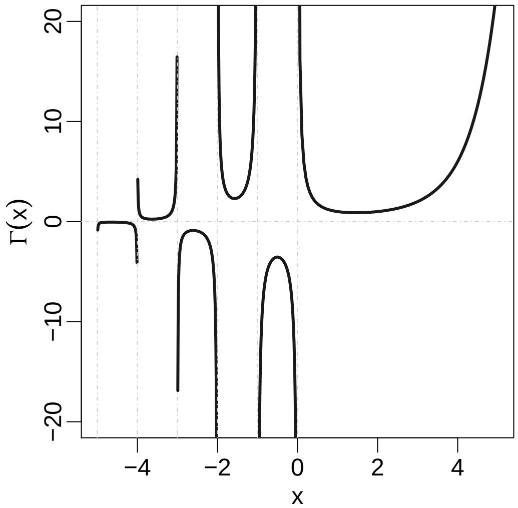

Figura 1: Gráfica de la función gamma.

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
3. $\Gamma(1) = 1$
4. $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$
5. $0! = 1$
6. $\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} \displaystyle\int_0^\infty v^n e^{-\frac{1}{2}v^2} dv$

Demostración.

1. Se sigue de aplicar un paso de la integración por partes.
2. En la expresión (1) de la función para $\Gamma(1/2)$ utilice el cambio de variable $u \equiv y^2$ y aplique la primera proposición.
3. Se obtiene mediante cálculo directo de la integral.
4. Se sigue de las propiedades 1 y 3 para n entero positivo.
5. Consecuencia de las dos propiedades anteriores.
6. Se sigue de la aplicación sucesiva de n pasos en la integración por partes de $\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$.

2. La distribución Gamma

Considere la función f dada por

$$f(y;\alpha,\lambda) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y/\beta} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y) \tag{2}$$

para constantes $\alpha > 0$ y $\lambda = 1/\beta > 0$ y donde $\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}$ denota la función indicadora de los reales positivos. La función es una función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) *propia* o *legítima* ya que para toda $\alpha > 0,\ \lambda > 0$ fijas, *i)* $f(y:\alpha,\lambda)=\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}\geq 0$ para toda $-\infty<y<\infty$.

ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y;\alpha,\lambda)dy=\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}dy=1$

Para mostrar la igualdad anterior defina $u=\lambda y$ y utilice la definición de $\Gamma(\alpha)$.

Definición Sea Y la variable aleatoria (*v. a.*) continua positiva con función de densidad dada por (2). Se dice que Y sigue una *distribución gamma con parámetro de forma α y parámetro de tasa λ (parámetro de escala β)* y se denota como $Y\sim \mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)\equiv \mathrm{Ga}(\alpha,\beta)$

La figura 2 muestra la función de densidad de probabilidad gamma para distintos valores de los parámetros.

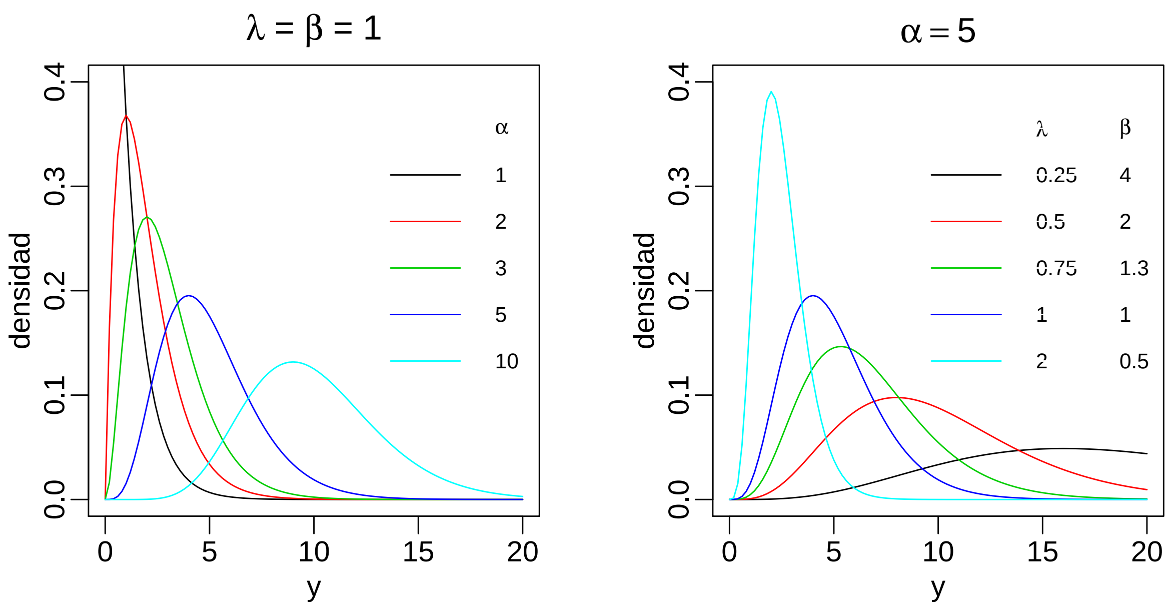

Figura 2: Función de densidad Gamma para distintos valores de los parámetros.

Proposición Sea Y una variable aleatoria que sigue una distribución gamma con parámerto de forma α y parámetro tasa λ. Entonces, para todo $r>-\alpha$ se tiene que

$$\mathbb{E}[Y^r]=\frac{(r+\alpha)_r}{\lambda^r}=\frac{(r+\alpha)(r+\alpha-1)\cdots(\alpha)}{\lambda^r}$$

Demostración: Sea Y con *f. d. p.* dada por la expresión (2). Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y^r]&=\int_0^{\infty}y^r\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha-1}e^{-\lambda y}dy\\&=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(r+\alpha)}{\lambda^{r+\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^{r+\alpha}}{\Gamma(r+\alpha)}y^{(r+\alpha)-1}e^{-\lambda y}dy\\&=\frac{(r+\alpha)(r+\alpha-1)\cdots(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\lambda^{\alpha}}{\lambda^{r+\alpha}}\cdot 1\\&=\frac{(r+\alpha)(r+\alpha-1)\cdots(\alpha)}{\lambda^r}\\&=\frac{(r+\alpha)_r}{\lambda^r}\end{aligned}$$

Corolario Sea $\beta = 1/\lambda$ el parámetro de forma de la densidad anterior. Entonces,

$$\mathbb{E}[Y^r] = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}\,\beta^r, \qquad \text{para todo} \qquad r > -\alpha$$

Proposición Sea Y una variable aleatoria distribuida gamma con función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) dada por la expresión (2). Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \alpha/\lambda = \alpha\beta \\ \text{var}[Y] &= \alpha/\lambda^2 = \alpha\beta^2\end{aligned}$$

Demostración: Considere la proposición anterior para $r = 1, 2$ y el hecho que $\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$.

Proposición Sea $Y \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda)$ tal que $\mathbb{E}[Y] = \alpha/\lambda = \alpha\beta$. Entonces la función generadora de momentos (*f. g. m.*) de Y está dada por

$$m_Y(t) = (1 - t/\lambda)^{-\alpha} = (1 - \beta t)^{-\alpha}, \qquad \text{para } t < \lambda = 1/\beta$$

Demostración:

$$\begin{aligned}m_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{ty} f(y) dy \\ &= \int_0^\infty e^{ty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)y} dy \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{K} \int_0^\infty K y^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)y} dy \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha} \cdot 1 \\ &= (1 - t/\lambda)^{-\alpha}\end{aligned}$$

y donde $K = (\lambda - t)^\alpha / \Gamma(\alpha)$ es la constante normalizadora de la densidad $\text{Ga}\big(\alpha, (\lambda - t)\big)$.

Proposición Si T una variable aleatoria que se distribuye exponencialmente con valor esperado $\mathbb{E}[T] = \beta = 1/\lambda$. Entonces $T \sim \text{Ga}(1, \lambda)$, con λ como parámetro tasa y β parámetro de escala.

Demostración: Sustituya $\alpha = 1$ en la expresión (2) e identifique la *f. d. p.* de la distribución exponencial.

Proposición Sea $Y \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$ tal que $\mathbb{E}[Y] = \alpha/\beta$ y $k > 0$ fija, entonces, $X = kY \sim \text{Ga}(\alpha, k\beta)$.

Demostración: Sea$k > 0$ y $X = kY$, con función de probabilidad acumulada F_X y *f. d. p.* f_X. Luego,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(kY \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq x/k) = F_Y(x/k)$$

Entonces,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{d}{dx} F_Y\left(\frac{x}{k}\right) \frac{1}{k} = \frac{1}{k} f_Y\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{1}{(k\beta)^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/k\beta}$$

que corresponde a la función de densidad de probabilidad de una distribución gamma con parámetro de forma α y parámetro de escala $k\beta$.

3. La distribución Ji-cuadrada χ^2

Definición Sea $n \in \mathbb{N}$ y Y la variable aleatoria que sigue una distribución Gamma con parámentro de forma $\alpha = n/2$ y parámetro de escala $\beta = 2$. Entonces $Y \sim \mathrm{Ga}(n/2, 2)$ se dice que sigue una *distriubución ji-cuadrada con n grados de libertad* y se denota por $Y \sim \chi^2_n$.

Corolario Sea $Y \sim \chi^2_n$. Entonces, $\mathbb{E}[Y] = n$ y $\mathrm{var}(Y) = 2n$.

4. La función Beta

La *función Beta* se define para $\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0$, por

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 t^{\alpha_1 - 1}(1-t)^{\alpha_2 - 1}\, dt \tag{3}$$

y satisface la siguiente identidad

$$B(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función matemática Gamma dada por la expresión (1) de la página 1.

5. La distribución Beta

De hecho con base a la función Beta se define la *distribución Beta*. La variable aleatoria X se dice que sigue una distribución Beta con parámetros $\alpha_1 (> 0)$ y $\alpha_2 (> 0)$, denotada como $X \sim B(x; \alpha_1, \alpha_2)$, si X tiene como función de densidad de probabilidad

$$f_X(x; \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)}\, x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1} I_{[0,1]}(x)$$

con la función $B(\alpha_1, \alpha_2)$ definida en (3).

Proposición El valor esperado y varianza de $X \sim B(x; \alpha_1, \alpha_2)$ están dados por:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad \mathrm{var}(X) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^1 x f(x; \alpha_1, \alpha_2) dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 x^{(\alpha_1 + 1) - 1}(1-x)^{\alpha_2} dx \\
&= \frac{B(\alpha_1 + 1, \alpha_2)}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2)/\Gamma(\alpha_1 + 1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)/\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}
\end{aligned}$$

utilizando el hecho que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Similarmente se puede ver que

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

de donde se sigue el resultado para $\text{var}(X)$.

La Figura 3 muestra la función de densidad de la distribución Beta para varios valores de los parámetros α_1 y α_2.

Notas:

- Si $\alpha_1 = \alpha_2$, la función de densidad es simétrica alrededor de $1/2$.
- Si $\alpha_1 = 1 = \alpha_2$, la distribución beta resulta la uniforme en el intervalo $(0, 1)$.
- La distribución beta, entre varias aplicaciones, se utiliza para modelar el valor de *probabilidades*.

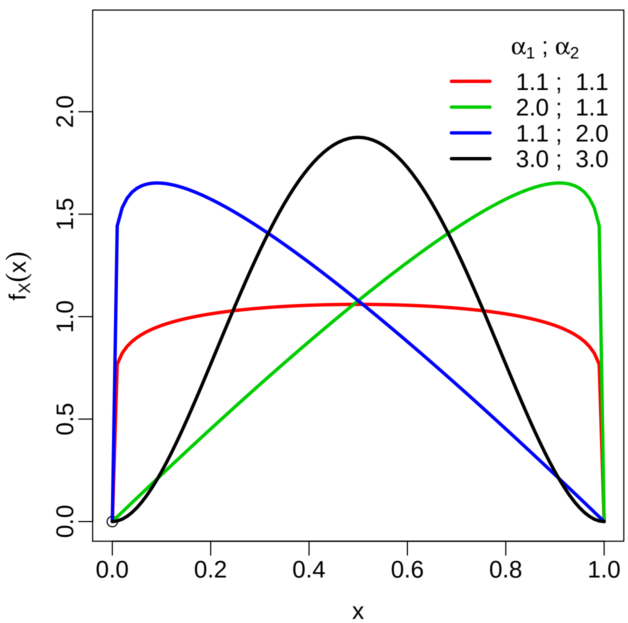

Figura 3: Función de densidad de la distribución Beta para distintos valores de los parámetros.