Transformaciones Multivariadas
La distribución t de Student
La transformación Box-Muller

Ernesto Barrios

3 de julio de 2019

Teorema de Transformaciones

Teorema: *Sobre transformaciones multivariadas.* (Mood, Graybill and Boes, 1974.)

Sea $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad *conjunta* $f_X(x) = f_{X_1 \cdots X_n}(x_1, \ldots, x_n)$. Sea $\mathcal{S} = \{x : f_X(x) > 0\}$ el soporte de la distribución y suponga que $\mathcal{S}$ puede descomponerse en los subconjuntos $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_m$, tales que, $y_1 = g_1(x), \ldots, y_n = g_n(x)$, forma una transformación *uno-a-uno* de $\mathcal{S}_k$ en $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, $k = 1, \ldots, m$. Sean entonces $x_1 = h_{1k}(y), \ldots, x_n = h_{nk}(y)$, que denoten la transformación inversa de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{S}_k$. Para $k = 1, \ldots, m$, denote el jacobiano de la transformación

$$Jh_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_{1k}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{1k}(y)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_{1k}(y)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial h_{2k}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{2k}(y)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_{2k}(y)}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_{nk}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial h_{nk}(y)}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial h_{nk}(y)}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Suponga además que las derivadas parciales incluidas en Jh_k son continuas sobre $\mathcal{R}$ y que el determinante $|Jh_k| \neq 0$, $k = 1 \ldots, m$. Entonces, la *f. d. p. conjunta* del *v. a.* $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ está dado por

$$f_Y(y) = f_{Y_1 \cdots Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{m} f_X\left(h_{1k}(y), \ldots, h_{nk}(y)\right) ||Jh_k||$$

para $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{R}$.

Proposición: Sean $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ y $Y \sim \chi^2_n$ *v. a.*'s independientes. Entonces la *v. a.* $T = Z/\sqrt{Y/n}$ tiene una función de densidad de probabilidad dada por

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1 + t^2/n)^{-(n+1)/2}\, \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(t) \tag{1}$$

Demostración: Sea $T = Z/\sqrt{Y/n}$ y defina $U = Y$. Entonces, se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rclcl} T &=& g_1(Z,Y) &=& Z/\sqrt{Y/n} \\ U &=& g_2(Z,Y) &=& Y \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rclcl} Z &=& h_1(T,U) &=& T\sqrt{U/n} \\ Y &=& h_2(T,U) &=& U \end{array}$$

y de donde el *jacobiano* de la transformación $h = (h_1, h_2)$ está dado por

$$|Jh(t,u)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1(t,u)}{\partial t} & \frac{\partial h_1(t,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial h_2(t,u)}{\partial t} & \frac{\partial h_2(t,u)}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{u/n} & \frac{1}{2} t u^{-1/2}/\sqrt{n} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{u/n}$$

Por la independencia de Z y Y se tiene que $f_{ZY}(z,y) = f_Z(z) \cdot f_Y(y)$. Recuerde además que $\chi^2_n \sim \text{Gamma}(n/2, 2)$. Luego, del *teorema cambio de variable* se sigue que para todo $t \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
f_{TU}(t,u) &= f_{ZY}(h_1(t,u), h_2(t,u)) \cdot |Jh(t,u)| \\
&= f_Z(t\sqrt{u/n}) \cdot f_Y(u) \cdot \sqrt{u/n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2 u/n} \cdot \frac{u^{n/2-1} e^{-u/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} \cdot \sqrt{u/n} \\
&= \frac{u^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t^2/n+1)u}}{2^{\frac{n+1}{2}} \sqrt{n\pi}\ \Gamma(n/2)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$, la densidad marginal de T está dada por

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_0^\infty f_{TU}(t,u)du \\
&= \int_0^\infty \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(t^2/n+1)u}}{2\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} du \\
&= \int_0^\infty \frac{v^{\frac{n-1}{2}} e^{-\lambda v}}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} dv \qquad \text{con} \quad \lambda = t^2/n + 1, \quad \text{y} \quad v = u/2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty v^{\left(\frac{n+1}{2}\right)-1} e^{-\lambda v} dv \\
&= \frac{\lambda^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} v^{\left(\frac{n+1}{2}\right)-1} e^{-\lambda v} dv \\
&= \frac{\lambda^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty f_W(w; \alpha, \beta) dw \qquad \text{donde} \quad W \sim \text{Gamma}\left(w; \frac{n+1}{2}, \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(t^2/n + 1\right)^{-\frac{n+1}{2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio: Sean Z_1 y Z_2 *v.a.i.i.d.* normal estándar. Sean $Y_1 = Z_1 + Z_2$, y $Y_2 = Z_1/Z_2$. Muestre entonces que marginalmente $Y_1 \sim \text{N}(0,2)$ y $Y_2 \sim \text{Cauchy}(1)$. [*Sugerencia*: use el cambio de variable $u = \frac{1}{2}\frac{(1+y_2^2)}{(1+y_2)^2} y_1^2$.]

La distribución t de Student.

Definición: Sea T variable aleatoria con función de densidad dada por la expresión (1). Entonces T se dice que sigue una distribución t de *Student* con n grados de libertad y se denota $T \sim t_n$.

Propiedades.

1. Sean $Z \sim \text{N}(0,1)$ y $Y \sim \chi^2_n$ *v. a.*'s independientes. Entonces la variable aleatoria

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n$$

2. La distribución de t_n es simétrica alrededor de 0 como se muestra en la Figura 1 para varios valores de n.

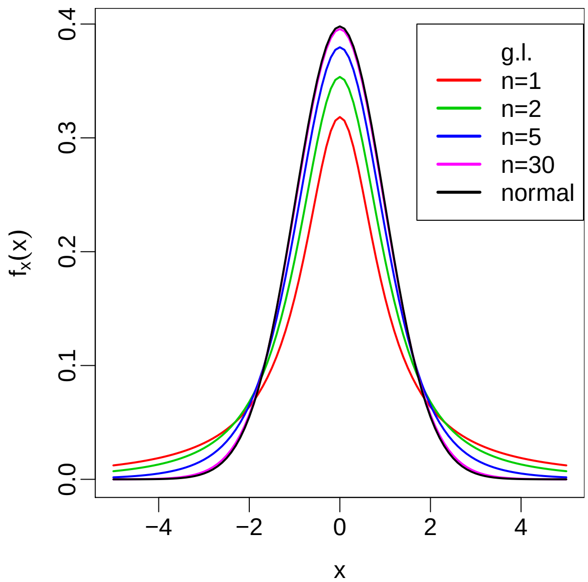

Figura 1: Función de densidad de la distribución t-Student para varios grados de libertad (gl).

3. Para $n > 2$,
$$E(T) = 0, \qquad V(T) = \frac{n}{n-2}$$
4. La distribución de Cauchy es el caso particular de la t de *Student* con 1 grado de libertad.
5. Si $T_n \sim t_n$, para n *grande* (≥ 40) la distribución T_n se aproxima razonablemente a la distribución normal estándar. De hecho, T_n *converge en distribución* a la distribución normal estándar cuando $n \to \infty$.
$$T_n \xrightarrow{D} Z$$

Transformación Box-Muller.

Proposición: Muestre que si U_1 y U_2 son *v.a.i.i.d.* uniformemente en (0, 1) y si se definen

$$\begin{aligned} X_1 &= (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos 2\pi\, U_2 \\ X_2 &= (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin 2\pi\, U_2 \end{aligned} \tag{2}$$

entonces X_1 y X_2 son *v.a.i.i.d.* normal estándar.

Demostración: Sean U_1 y U_2 *v.a.i.i.d.* uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Se mostrará que

$$X_1 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \cos 2\pi U_2 \quad y \quad X_2 = (-2 \ln U_1)^{1/2} \sin 2\pi U_2$$

son a su vez *v.a.i.i.d.* normal estándar. Con este fin se aplicará dos veces el teorema sobre transformaciones antes presentado. Para esto considere las *v. a.*'s Y_i definidas por:

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(U) = (-2 \ln U_1)^{1/2} \\ Y_2 &= g_2(U) = 2\pi U_2 \end{aligned} \qquad \text{y sus funciones inversas} \qquad \begin{aligned} U_1 &= h_1(Y) = e^{-Y_1^2/2} \\ U_2 &= h_2(Y) = Y_2/2\pi \end{aligned}$$

Luego el jacobiano de la transformación $h = (h_1, h_2)$ es

$$Jh(y) = \left|\frac{\partial h_i}{\partial y_j}\right| = \begin{vmatrix} -y_1 e^{-y_1^2/2} & 0 \\ 0 & 1/2\pi \end{vmatrix} = \frac{y_1}{2\pi} e^{-y_1^2/2}$$

Por el teorema sobre transformaciones, se sigue de la independencia de U_1 y U_2 que $f_U(h) = f_{U_1}(h_1)f_{U_2}(h_2)$

$$f_Y(y) = f_{U_1}(h_1(y))\, f_{U_2}(h_2(y))\, |Jh(y)| = \left[\frac{y_1}{2\pi} e^{-y_1^2/2} I_{[0,1]}(h_1(y))\right] \cdot \left[I_{[0,1]}(h_2(y))\right] \tag{3}$$

pues si $U_i \sim \text{unif}(0,1)$, entonces $f_{U_i}(u) = \mathbb{I}_{[0,1]}(u)$, y donde $\mathbb{I}_{[0,1]}$ es la función indicadora del intervalo $[0,1]$. Note en la expresión anterior que la función de densidad conjunta de Y se puede descomponer como el producto de funciones que dependen exclusivamente de y_1 y y_2 respectivamente por lo que se sigue que las *v. a.*'s Y_1 y Y_2 son independientes con *f. d. p.* conjunta dada por (3).

Ahora bien, consideremos las variables X's definidas por (2). Entonces,

$X_1 = g_1(Y) = Y_1 \cos Y_2$	y sus funciones inversas	$Y_1 = h_1(X) = (X_1^2 + X_2^2)^{1/2}$
$X_2 = g_2(Y) = Y_1 \sin Y_2$		$Y_2 = h_2(X) = \arctan(X_2/X_1)$

En este caso el jacobiano de la transformación es

$$Jh(x) = \left|\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right| = \begin{vmatrix} x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1/2} & x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1/2} \\ -x_2(x_1^2+x_2^2)^{-1} & x_1(x_1^2+x_2^2)^{-1} \end{vmatrix} = (x_1^2+x_2^2)^{-1/2}$$

Luego, aplicando nuevamente el teorema de transformación, la *f. d. p.* conjunta de las *v. a.*'s X queda

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_Y(h_1, h_2)|Jh(x)| \\ &= \frac{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)} \cdot (x_1^2+x_2^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x_1^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x_2^2/2} \\ &= \phi(x_1) \cdot \phi(x_2) \end{aligned}$$

donde ϕ denota la *f. d. p.* de la distribución normal estándar. Por lo tanto, X_1 y X_2 son *v.a.i.i.d.* con $X_i \sim \text{N}(0,1)$.

La transformación anterior se debe Box y Muller (1958). Por un tiempo ésta era la manera de generar números seudoaleatorios normalmente distribuidos. Ahora se emplean algoritmos más eficientes.

Referencias:

Box, G. E. P. and Muller, M. E. (1958). A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Annals of the Mathematical Statistics.* Vol 29, No. 2, pp 610–611.

Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* 3rd. Ed. Singapore: McGraw-Hill.