Probabilidad

Cuaderno de Ejercicios

Trabajo coordinado por Ernesto Barrios
Departamento Académico de Estadística

29 de mayo de 2019

Versión 1.00

Índice

Prefacio

Este cuaderno de ejercicios de teoría y cálculo de probabilidades se creó para apoyar el curso de Probabilidad, dirigido a las carreras de Economía e Ingenierías del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). En su elaboración hemos participado varios profesores y alumnos: Javier Marín Moreno, Carlos A. Serna Garcini, Alejandro Olivera Vázquez y Abner Heredia Bustos.

La mayoría de los problemas tienen la referencia a los libros de donde fueron tomados. Aquellos que no la tienen es porque no recordamos de dónde fueron extraídos o bien porque son de nuestra autoría.

Si desea apoyar este esfuerzo proponiendo problemas lo agradeceremos. así como cualquier corrección, comentario y/o sugerencia que serán bienvenido. En tal caso, diríjase a Ernesto Barrios <ebarrios at itam.mx>.

Ciudad de México, 29 de mayo de 2019

Probabilidad, Inferencia Estadística y Econometría

Variables aleatorias

- **Valor esperado de $g(X)$**

$$\mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x g(x)P(X=x) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

- **Propiedades de la función generadora de momentos**

$$M_{X+a}(t) = e^{at}M_X(t)$$
$$M_{bX}(t) = M_X(bt)$$
$$M_{\frac{X+a}{b}}(t) = e^{\frac{a}{b}t}M_X\left(\frac{t}{b}\right)$$

- **Tercer y cuarto momentos con respecto a la media**

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^3] = \mathbb{E}(X^3) - 3\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2) + 2(\mathbb{E}(X))^3$$

$$\mathbb{E}[(X-\mu)^4] = \mathbb{E}(X^4) - 4\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^3) + 6(\mathbb{E}(X))^2\mathbb{E}(X^2) - 3(\mathbb{E}(X))^4$$

- **Coeficientes de asimetría y de curtosis**

$$C_A = \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

$$C_K = \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

- **Método de transformación de variables**

Sea $U = h(Y)$, con h función monótona creciente o decreciente en y, entonces

$$f_U(u) = f_Y(y)\left|\frac{dy}{du}\right| \qquad \text{donde } y = h^{-1}(u)$$

Distribuciones de probabilidad

Distribución	**Notación**	**Soporte** R_X	**Función de probabilidad**	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	**Función generadora de momentos**
Uniforme discreta	$\mathrm{unif}\{x_1,\ldots,x_K\}$	$x\in\{x_1,\ldots,x_K\}$	$\frac{1}{K}$	$\dfrac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}x_i$	$\dfrac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(x_i-E(X))^2$	$\dfrac{1}{k}\sum_i e^{tx_i}$
Bernoulli	$\mathrm{Bernoulli}(p)$	$x\in\{0,1\}$	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$	$pe^t+(1-p)$
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$x\in\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	np	$np(1-p)$	$[pe^t+(1-p)]^n$
Poisson	$\mathrm{Po}(\lambda)$	$x\in\{0,1,2,\ldots\}$	$\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Uniforme continua	$\mathrm{unif}(a,b)$	$a\le x\le b$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Gama*	$\mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$	$x\in\mathcal{R}^+$	$\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1-\beta t)^{-\alpha}$

* Notas:

- $\Gamma(\alpha)=\displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du$. Entonces,

  $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\cdot\Gamma(\alpha);\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi};\quad \Gamma(1)=1;\quad \Gamma(n+1)=n!$, para $n=1,2,\ldots$.
- Distribución exponencial: $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$. Entonces, $X\sim\mathrm{Gamma}(1,1/\lambda)$ y $\mathbb{E}(X)=1/\lambda$.
- Distribución Ji-cuadrada: $Y\sim\chi^2_n$. Entonces, $Y\sim\mathrm{Gamma}(n/2,2)$ y $\mathbb{E}(Y)=n$.

Distribuciones bivariadas

- **Función de densidad condicional**

$$f(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

- **Valor esperado de $g(X_1, X_2)$**

$$\mathbb{E}[g(X_1,X_2)] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_1}\sum_{x_2} g(x_1,x_2)P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int\int g(x_1,x_2) f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 & \text{caso continuo} \end{cases}$$

- **Función generadora de momentos conjunta**

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \mathbb{E}(e^{t_1X_1+t_2X_2})$$

- **Covarianza y coeficiente de correlación**

$$\sigma_{12} = \mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathbb{E}\left[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right] = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$

$$\rho_{X_1X_2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$$

- **Método de transformación de variables**

Sean las variables aleatorias Y_1 y Y_2 funciones de las variables aleatorias X_1 y X_2, de manera que las ecuaciones en y_1 y y_2 tienen solución única para x_1 y x_2 en términos de y_1 y y_2. Esto es,

$$\begin{array}{ccc} y_1 = g_1(x_1,x_2) & & x_1 = h_1(y_1,y_2) \\ & y & \\ y_2 = g_2(x_1,x_2) & & x_2 = h_2(y_1,y_2) \end{array}$$

Si las funciones h_1 y h_2 tienen derivadas parciales continuas en todos los puntos (y_1, y_2) y el determinante *Jacobiano*

$$J\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } (h_1(y_1,y_2),\ h_2(y_1,y_2))$$

entonces,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = f_{X_1,X_2}\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right) \cdot \left|J\left(h_1(y_1,y_2), h_2(y_1,y_2)\right)\right|$$

Distribución normal bivariada

- **Función de densidad conjunta**

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

- **Función generadora de momentos conjunta**

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \exp\left\{(t_1\mu_1 + t_2\mu_2) + \frac{1}{2}\left(\sigma_1^2 t_1^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2\right)\right\}$$

- **Valor esperado y varianza condicionales**

$$\mathbb{E}(X_2|X_1=x_1) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1)$$
$$\mathrm{Var}(X_2|X_1=x_1) = \sigma_2^2(1-\rho^2)$$

1. Fundamentos de Probabilidad

1.1. Fenómenos Aleatorios. Incertidumbre

1. Considere el rendimiento de un portafolios de inversión. Discuta si se puede considerar o no como un fenómeno aleatorio. De ser el caso, indique las fuentes de incertidumbre.

2. En una línea de producción de componentes electrónicos se lleva a cabo un muestreo del 100 % de los productos y se determina al final del día el porcentaje de defectuosos. ¿Producir un producto defectuoso podría considerarlo como un fenómeno aleatorio? Si su respuesta es afirmativa indique las fuentes de incertidumbre que usted identifique.

3. Para la programación de fechas de entrega de los lotes de productos farmacéuticos en los estados del norte se consideran las distancias, las velocidades promedio y el volumen de los lotes. Discuta si el programa de entrega se puede considerar como un fenómeno aleatorio y en su caso, indique las fuentes de incertidumbre.

4. Considere el número de accidentes automovilísticos durante cierto día en la Ciudad de México. ¿Se puede considerar como un fenómeno aleatorio? En caso afirmativo, ¿cuáles son las principales fuentes de incertidumbre?

5. La edad a la que morirá una persona recién nacida es un fenómeno aleatorio. Mencione al menos cinco fuentes de incertidumbre.

6. Proporcione tres ejemplos de fenómenos determinísticos.

7. Determine la diferencia entre un fenómeno aleatorio y un fenómeno determinístico.

8. Clasifique los siguientes fenómenos como aleatorios o determinísticos. Justifique

   a) PIB en un periodo determinado.

   b) Tiempo de digestión de una serpiente.

   c) Tiempo que tarda en recorrer 5 kilómetros un auto de 900 kilogramos a 50 km/h sin fuerza de resistencia.

   d) Lanzamiento de un dado.

   e) Temperatura de ebullición del agua a distintas atmósferas de presión.

9. Determine si los retrasos en aerolíneas son fenómenos aleatorios o determinísticos. Explique por qué usted lo considera ese tipo de fenómeno.

1.2. Espacio muestral y eventos. Espacios muestrales discretos y continuos.

1. Considere el conjunto de las *temperaturas promedio* de cada una de las horas medidas diariamente en el Zócalo de la Ciudad de México durante un año específico. Defina un espacio muestral asociado a la situación descrita e indique si lo considera discreto o continuo y por qué. Para el espacio muestral anterior enuncie tres eventos que podrían ser de su interés.

2. Considere el intervalo J $=[0,1]$ de la recta real como un espacio muestral. Matemáticamente, el intervalo se puede expresar por J $=\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Diga si J es un espacio discreto o continuo y por qué. Describa tres eventos del espacio J y, de ser posible, escríbalos empleando notación matemática.

3. Suponga que un espacio muestral consiste en toda la colección de pinturas del museo francés de *Louvre*. Indique si el espacio es discreto o continuo. Enuncie un evento de su interés e indique cuál sería su evento complemento. Construya una colección de eventos que resulten ser una *partición* del espacio muestral. Describa tres eventos que sean ajenos entre ellos.

4. ([9] Ej. 1.5.10) En una batalla sangrienta luchaban 270 hombres, 90 de ellos perdieron un ojo; 90 un brazo y 90 una pierna; 30 perdieron un ojo y un brazo; 30 un brazo y una pierna; 30 una pierna y un ojo; y 10 perdieron un ojo, un brazo y una pierna.

   a) ¿Cuántos hombres no perdieron nada?
   b) ¿Cuántos tuvieron exactamente una lesión?, ¿dos?, ¿tres?
   c) ¿Cuántos tuvieron al menos una lesión?, ¿dos?, ¿tres?
   d) ¿Cuántos tuvieron no más de una lesión?, ¿dos?, ¿tres?

5. Se tienen cuatro monedas: la primera moneda tiene un 1 en una cara y un 2 en la otra, la segunda moneda tiene un 3 en una cara y un 4 en la otra, la tercera moneda tiene un 5 en una cara y un 6 en la otra, y la cuarta moneda tiene un 7 en una cara y un 8 en la otra. Considere el experimento en el que se tira un volado con cada moneda y se multiplican los cuatro números de las caras que cayeron hacia arriba. Enliste todos los elementos del espacio muestral de dicho experimento.

6. ([12] Ej. 2.31) La Oficina de Censos de Estados Unidos reportó que la mediana del ingreso familiar durante 2003 fue de $43,318 USD. Esto significa que la mitad de las familias estadounidenses tuvo ingresos superiores a este monto, y que la otra mitad tuvo ingresos menores o iguales que dicho monto. Se entrevistó a cuatro familias y cada una indicó si su ingreso durante 2003 fue mayor que $43,318 USD o no.

   a) Enliste los elementos del espacio muestral.
   b) Se definen los siguientes eventos:
      - A: al menos dos familias tuvieron ingresos mayores que la mediana.
      - B: exactamente dos familias tuvieron ingresos mayores que la mediana.
      - C: exactamente una familia tuvo ingresos menores o iguales que la mediana.

      Indique la cardinalidad de cada uno de los eventos.

7. ([10] Ej. 2.3) Se tiran dos dados y se definen los siguientes eventos:

   - E: la suma de los dados es un número impar.
   - F: al menos uno de los dados cae en 1.
   - G: la suma de los dados es 5.

   Describa los eventos $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $E \cap F^c$, y $E \cap F \cap G$

8. Tres personas llamadas A, B y C acuden a un despacho de contabilidad que siempre tiene disponible un contador para cada una de las oficinas 1, 2 y 3. Durante cierta semana, cada persona visita el despacho una vez y es asignado al azar a una oficina. El experimento consiste en registrar la oficina para cada persona. Un resultado es (1,2,1) para A la oficina 1, B a la oficina 2 y C a la oficina 1.

   a) Elabore una lista de los 27 resultados en el espacio muestral.
   b) Elabore una lista de todos los resultados en el evento B en que las tres personas van a la misma oficina.

c) Haga una lista de los resultados en el evento C en el que todas las personas van a diferentes oficinas.

d) Elabore una lista de los resultados en el evento en el que ninguno va a la oficina 2.

9. La biblioteca de una universidad dispone de cinco ejemplares de un cierto texto en reserva. Dos ejemplares (1 y 2) son primeras impresiones y los otros tres (3, 4 y 5) son segundas impresiones. Un estudiante examina estos libros en orden aleatorio y se detiene solo cuando una segunda impresión ha sido seleccionada. Un posible resultado es (5) y otro (2,1,3).

   a) Ponga en lista los resultados en S el espacio muestral.

   b) Sea A el evento en el que exactamente un libro debe ser examinado. ¿Qué resultados están en A?

   c) Sea B el evento en el que el libro 5 es seleccionado. ¿Qué resultados están en B?

   d) Sea C el evento en el que el libro 1 no es examinado. ¿Qué resultados están en C?

1.3. Concepto de probabilidad. Enfoque clásico, frecuentista y subjetivo. Desarrollo aximomático de la probabilidad.

1. Determine a qué enfoque, frecuentista o subjetivo, pertenecen los siguientes enunciados:

   a) Existe una probabilidad del 20 % de que llueva pues ha llovido 2 de los 10 días anteriores.

   b) Según los expertos existe un 5 % de probabilidad que un auto se accidente en el campo pues se considera que el riesgo es menor.

   c) Existe una probabilidad del 50 % de escoger una botas pues hay 10 botas entre los 20 zapatos disponibles.

2. Arroje un dado 30 veces y registre la frecuencia relativa de cada uno de los seis posibles resultados. ¿Qué número deben tender dichas frecuencias relativas cuando n tiende a infinito?

3. Usted estudia el medio de transporte empleado por los trabajadores de cierta empresa. Para esto, observa unos 300 trabajadores, de los cuales 21 llegaron en bicicleta; 15 en motocicleta; 84 en automóvil y sin compañía; 45 en automóvil compartiendo con otra persona; 12 compartiendo el viaje con 2 o más personas; el resto llegó utilizando transporte público o caminando. Responda las siguientes preguntas:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador elegido al azar haya llegado solo y en automóvil?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador elegido haya llegado en bicicleta o motocicleta?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador haya llegado empleando transporte público o caminando?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que un trabajador haya llegado compartiendo el viaje con alguien más?

4. Explique la diferencia entre el enfoque frecuentista y el enfoque subjetivo.

5. La siguiente tabla describe la composición de un grupo de 48 estudiantes en un encuentro universitario.

Carrera	mujeres	hombres
Ciencias Políticas	6	4
Relaciones Internacionales	4	3
Ingeniería Industrial	4	6
Ingeniería en Sistemas	5	7
Actuaría	4	2
Matemáticas Aplicadas	1	2

   a) Si se elige un estudiante aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea mujer?

   b) ¿Cual es la probabilidad de que una persona elegida al azar estudie Actuaría?

   c) Indique la probabilidad de que una persona escogida aleatoriamente estudie ciencias sociales y sea mujer.

   d) ¿Cuál es la probabilidad de elegir un hombre que no sea ingeniero?

6. Se tiran dos dados. Calcule la probabilidad de que:

   a) El resultado del segundo dado sea mayor que el resultado del primero.

   b) La suma de los dos resultados sea un número primo.

   c) El resultado del primer dado sea 6.

7. Explique en sus propias palabras qué estudia la teoría de la probabilidad y un uso que usted considera se le puede dar en la práctica.

8. Considere una mazo de cartas inglesas con 13 cartas identificadas con los números 2, 3, ..., 10, y las letras J, Q, K y A, de cada una de las dos figuras rojas: corazones ($\heartsuit$) y diamantes ($\diamondsuit$); y de las dos figuras negras: tréboles ($\clubsuit$) y espadas ($\spadesuit$).

   Si saca una carta al azar del maso de naipes, determine las probabilidades de los siguientes eventos:

   a) La carta es una espada.

   b) La carta es de color negro.

   c) La carta es un siete.

   d) La carta es el ocho de tréboles.

   e) La carta es roja y con letra.

   f) La carta es un número primo. (Por definición, un *número primo* es un número natural mayor que 1 que tiene como divisor a él mismo y el número 1.)

9. Una moneda marcada con *águila* y *sol* se lanza cuatro veces consecutivas. Calcule la probabilidad de que:

   a) las dos caras caigan el mismo número de veces.

   b) el número de veces que cae *sol* sea mayor que el numero de veces que cae *águila*.

10. Sean A y B eventos tales que $\mathbb{P}(A) = 0.6$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.2$. Calcule lo siguiente:

   a) $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$.

b) $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$.

c) $\mathbb{P}(A^c \cap B)$.

d) $\mathbb{P}(A^c \cup B)$.

11. Un experimento aleatorio tiene un espacio muestral $S = \{a, b, c\}$. Suponga que $\mathbb{P}(\{a, c\}) = 5/8$ y $\mathbb{P}(\{b, c\}) = 7/8$. Use los axiomas de probabilidad y sus corolarios para encontrar las probabilidades de los eventos elementales, es decir, $\mathbb{P}(\{a\})$, $\mathbb{P}(\{b\})$ y $\mathbb{P}(\{c\})$.

12. ([10] Cap. 2) Se le pregunta a una persona cuáles son las probabilidades (subjetivas) de que:

    a) Llueva hoy.

    b) Llueva mañana.

    c) Llueva en ambos días.

    d) Llueva en alguno de los dos días.

    Dicha persona contesta que las probabilidades son 30 %, 40 %, 20 % y 60 %, respectivamente.

    ¿Estas probabilidades son consistentes con los axiomas de la probabilidad? En caso negativo, ¿qué debería cambiar en su respuesta para que lo sean?

13. A una muestra de 100 estudiantes se les pregunta si utiliza Uber para llegar al ITAM. Los resultados de la entrevista son:

	Uber	Otro
Hombre	40	22
Mujer	29	9

    Se elige aleatoriamente un estudiante. Calcule la probabilidad de que:

    a) Sea mujer.

    b) Sea mujer o use uber.

    c) Dado que es mujer, no utilice uber.

    d) Dado que no utiliza uber que no sea mujer.

    e) No sea hombre y no utilice uber.

14. Sean A y B eventos mutuamente excluyentes tales que $\mathbb{P}(A) = 0.2$ y $\mathbb{P}(B) = 0.3$. Calcule las siguientes probabilidades: $\mathbb{P}(A^c)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B^c)$.

15. ([10] Ej. 2 (Self-Test Problems)) Un cliente de una tienda departamental compra un traje con probabilidad 0.22, una camisa con probabilidad 0.30, y una corbata con probabilidad 0.28. Dicho cliente compra un traje y una camisa con probabilidad 0.11, un traje y una corbata con probabilidad 0.14, una camisa y una corbata con probabilidad 0.10, y compra las tres prendas con probabilidad 0.06. Calcule la probabilidad de que el cliente compre:

    a) ninguno de los tres artículos.

    b) exactamente uno de los tres artículos.

16. ([1] Sec. 1.2) Revise y comprenda la siguiente tabla.

Palabras	**Conjuntos**
Eventos y ocurrencias	
Espacio Muestral	Ω
w es una salida posible	$w \in \Omega$
A es un evento	$A \subseteq \Omega$
Ha ocurrido el evento A	$w_{\text{obs}} \in A$
Algo ocurre	$w_{\text{obs}} \in \Omega$
Nuevos eventos de viejos eventos	
A o B (inclusivo)	$A \cup B$
A y B	$A \cap B$
No A	A^c
A pero sin compartir con B	$A \setminus B = A \cap B^c$
A o B pero no ambos	$(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
Al menos uno de $A_1, \ldots, A_n$	$A_1 \cup \cdots \cup A_n$
Todos los $A_1, \ldots, A_n$	$A_1 \cap \cdots \cap A_n$
Ninguno de los $A_1, \ldots, A_n$	$A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$
Relaciones entre eventos	
A implica B	$A \subseteq B$
A y B son mutuamente exclusivos	$A \cap B = \emptyset$
$\{A_i\}_{i=1}^n$ es una partición de Ω	$\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$
	$A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$

17. ([7] Ej. 1.8) Suponga que los eventos A y B son tales que $\mathbb{P}(A) = 2/5$, $\mathbb{P}(B) = 2/5$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$. Encuentre $\mathbb{P}(A \cap B)$ y $\mathbb{P}(A \setminus B)$.

18. ([7] Ej. 1.9) Si $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, encuentre $\mathbb{P}(B)$.

19. ([1] Ej. 1.41) Muestre que para cualquier par de eventos A y B se satisface que

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

1.4. Espacios muestrales con resultados equiprobables y no equiprobables. Selección aleatoria con reemplazo y sin reemplazo (probabilidades binomiales e hipergeométricas).

1. Un blanco circular de radio 1 es dividido en cuatro zonas anulares determinadas por círculos concéntricos de radios $1/4, 1/2, 3/4$ y 1 respectivamente. Suponga que 10 tiros son lanzados independiente y aleatoriamente al blanco.

   Encuentre la probabilidad de que a lo más 3 tiros caigan en la zona delimitada por el círculo de radio $1/2$ y por el de radio 1.

2. Un envío de 7 plumas fuente contiene dos defectuosas. Las plumas se prueban una tras otra hasta que se identifican las defectuosas. Sea N_1 el número de pruebas necesarias para encontrar la primera defectuosa y N_2 el número de pruebas adicionales necesarias para encontrar la segunda. Encuentre $\mathbb{P}(N_1 = N_2)$.

3. ([7] Ej. 1.1) Sea $(\Omega, \mathbb{S}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, donde $\mathbb{S}$ es la familia de eventos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad que le asigna probabilidad $p > 0$ a cada punto de Ω.

   a) Muestre que Ω debe tener un número finito de puntos. (*Sugerencia*: Muestre que Ω no puede tener más de $1/p$ elementos.)

   b) Muestre que si n es el número de elementos de Ω, entonces p debe ser $1/n$.

4. Se escogen dos números al azar, x y y, dentro del intervalo [0,1]. Calcule la probabilidad de que:

   a) la distancia entre x y y sea menor que 0.5.

   b) la suma de x y y sea menor que 0.5.

5. Se escoge un número al azar α dentro del intervalo $[-1, 1]$. Calcule la probabilidad de que la ecuación $\alpha x + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales.

6. Un comité está formado por 8 hombres y 7 mujeres. Se seleccionan tres personas al azar, sin reemplazo. Calcule la probabilidad de que se seleccionen más hombres que mujeres.

7. ([7] Ej. 1.10) Suponga que se elige un punto al azar del cuadrado unitario. Sea A el evento determinado por el triángulo formado por las líneas $y = 0$, $x = 1$, $x = y$, y sea B el evento definido por el rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1/2)$, $(0, 1/2)$. Calcule $\mathbb{P}(A \cup B)$ y $\mathbb{P}(A \cap B)$.

8. ([7] Ej. 1.11) Una caja tiene 10 bolas numeradas $1, 2, \ldots, 10$. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encuentre la probabilidad de que los números de las dos bolas difieran en 2 o más.

9. ([7] Ej. 1.12) Si se sabe que un punto seleccionado al azar en el cuadrado unitario está en el triángulo acotado por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$, encuentre la probabilidad de que el punto esté también en el triángulo acotado por $y = 0$, $x = 1$ y $x = y$.

10. Sean L y U dos números reales tales que $L < U$. Considere el intervalo $\Omega = (L, U)$ como un espacio muestral y los subintervalos $(a, b) \subset (L, U)$ como sus eventos. Se define la probabilidad del evento (a, b) por

$$\mathbb{P}\big((a,b)\big) = \frac{e^{-a} - e^{-b}}{e^{-L} - e^{-U}} \qquad \text{para todo} \quad L \le a < b \le U$$

   a) Si $L < a < c$, $b < d < U$ y $b - a = \ell = d - c$. Verifique que

$$\mathbb{P}\big((a,b)\big) > \mathbb{P}\big((c,d)\big)$$

   y concluya que subintervalos con la misma longitud no tienen la misma probabilidad.

   b) Si considera $L = 0$ y $U = \infty$, verifique que

$$\mathbb{P}\big((0,d)\big) = 1 - e^{-d}, \qquad \text{para todo} \quad d > 0$$

   c) Finalmente, verifique que

$$\mathbb{P}\big((a,b)\big) = e^{-a} - e^{-b}, \qquad \text{para todo} \quad 0 < a < b$$

11. ([12] Pp 45, Ejemplo 2.10.) Un problema laboral surgió por la distribución de 20 empleados en 4 trabajos de construcción diferentes. El primer trabajo, considerado indeseable, requiere 6 trabajadores; el segundo, tercero y cuarto trabajo utilizan 4, 5 y 5 trabajadores respectivamente. El problema surge ya que en la distribución supuestamente aleatoria de los trabajadores se puso a todos los 4 miembros de una raza étnica específica en el primer trabajo. Se desea ver si existió injusticia en la asignación obteniendo la probabilidad del evento observado. Esto es, determine la forma en que 20 trabajadores pueden ser divididos en grupos del tamaño apropiado para los trabajos. Encuentre la probabilidad del evento observado suponiendo que se asignaron aleatoriamente los trabajos.

12. Cuatro bebedores (I, II, III y IV) van a catalogar 3 diferentes marcas de cerveza (A,B y C) en una prueba ciega. Cada bebedor califica las 3 cervezas asignando 1 a la que considera mejor, 2 a la siguiente y 3 a la menos preferida. Posteriormente se suman las calificaciones de los cuatro bebedores por cada marca. Suponga que los bebedores no pueden en realidad discriminar entre las cervezas, es decir, cada calificación es asignada aleatoriamente.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cerveza A reciba una calificación total de 4?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba una calificación total de 4?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba una calificación total de 5 o menos?

13. La probabilidad de que al lanzar una moneda deshonesta se obtenga sol es p. José, Carlos y Ana tiran la moneda sucesivamente y José es el que comienza con los lanzamientos. El primero que obtenga un sol gana. Encuentre la probabilidad de ganar de cada uno de ellos.

14. ¿Cuántos números enteros positivos de cinco dígitos son divisibles por 3? De ellos, ¿cuántos empiezan con un dígito par?

15. En la lotería de cierto país, cada boleto está conformado por 6 números, y cada número puede tomar un valor (entero) entre 1 y 49, sin repetirse. Si los 6 números se eligen al azar, calcule la probabilidad de atinarle exactamente a 4 de los 6 números ganadores.

16. ([10] Ej. 1.11) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar en un librero 3 novelas, 2 libros de Matemáticas y 1 libro de Química si:

    a) todos los libros se pueden ordenar de cualquier forma?

    b) los libros de Matemáticas deben estar juntos y las novelas deben estar juntas?

    c) las novelas deben estar juntas?

17. *a*) ¿Cuántas placas de automóvil de 7 posiciones son posibles si las primeras 2 posiciones son para letras (26) y las últimas 5 posiciones para dígitos (10)?

    b) Repita el inciso anterior si no es posible repetir letras o dígitos en la misma placa.

18. ([10] Ej. 1.10) De cuántas maneras se pueden sentar ocho personas en una fila:

    a) Si no hay ninguna restricción.

    b) Si la personas X y Y se deben sentar juntas.

    c) Si son 4 hombres y 4 mujeres, y 2 hombres o 2 mujeres no se deben sentar juntos.

    d) Si hay 5 hombres y ellos se deben sentar juntos.

    e) Si son 4 parejas casadas y ellas se deben sentar juntas.

    f) Si X y Y no pueden quedar juntos.

19. ([10] Ej. 1.13) Una clase de baile consiste de 22 alumnos, 10 mujeres y 12 hombres. Si 5 hombres y 5 mujeres son elegidos y se hacen parejas, ¿cuántas distintas parejas se pueden formar?

20. ([10] Ej. 1.20) Una persona tiene 8 amigos de los cuales 5 serán invitados a una reunión.

    a) ¿Cuántas distintas elecciones hay si 2 de los amigos están molestos entre ellos y no asistirían juntos?

b) ¿Cuántas distintas elecciones hay si dos amigos asistirían solamente si ambos son invitados?

21. ([7] Ej. 2.14) Considere un juego de poker. Hay cuatro tipos de cartas: corazones, diamantes, tréboles y picas. Hay 13 números: $2, 3, \ldots, 9, 10, J, Q, K, A$. Una corrida de 5 cartas puede ser: $A, 2, 3, 4, 5;\ 2, 3, 4, 5, 6;\ \ldots;\ 10, J, Q, K, A$. Calcule la probabilidad de cada una de las siguientes manos:

    a) *Royal flush*: $(10, J, Q, K, A)$ del mismo tipo.

    b) *Straight flush*: 5 cartas consecutivas del mismo tipo.

    c) *Poker*: (x, x, x, x, y), con $x \neq y$.

    d) *Full house*: de la forma (x, x, x, y, y), con $x \neq y$.

    e) *Flush*: 5 cartas del mismo tipo.

    f) *Straight*: 5 cartas consecutivas independientemente del tipo.

    g) *Tercia*: (x, x, x, y, z), con $x \neq y, z$; $y \neq z$.

    h) *Dos pares*: (x, x, y, y, z), con $x \neq y, z$; $y \neq z$.

    i) *Un par*: (x, x, y, z, w), $x \neq y, z, w$; $y \neq z, w$; $z \neq$.

1.5. Probabilidad condicional. Independencia y regla la multiplicación. Teorema de probabilidad total.

1. Un dado es lanzado tantas veces como sea necesario hasta obtener un cinco. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más de dos lanzamientos para obtener un cinco dado que no se obtuvo un cinco en el primer lanzamiento?

2. Hay un 35 % de probabilidad que la venta de maquillaje sea buena el próximo año y 65 % de probabilidad que sea mala. Si la venta de maquillaje es buena, hay un 45 % de probabilidad que las ventas de polvo traslúcido aumenten, 35 % de probabilidad que se mantengan y 20 % de probabilidad que disminuyan. Si la venta de maquillaje es mala, hay un 25 % de probabilidad que las ventas de polvo traslúcido aumenten, 28 % de probabilidad que se mantengan y 47 % de probabilidad que disminuyan.¿Cuál es la probabilidad de que haya una buena venta de maquillaje y las ventas de polvo traslúcido aumenten?

3. Sea $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.68$ y $\mathbb{P}(A) = 0.25$. Si $\mathbb{P}(A|B) = 0.35$, entonces, ¿$\mathbb{P}(B)$ es?

4. En un examen con preguntas tipo verdadero (V) ó falso (F), 40 % de ellas son verdaderas. Por otro lado, la probabilidad de responder erróneamente es de 0.125, independientemente que la pregunta sea V ó F. Si a una pregunta usted contestó que es falsa (F). determine la probabilidad de que su respuesta sea la correcta.

5. ([10] Ej. 3.1) Se tiran dos dados. Si los valores obtenidos en los dados son diferentes entre sí, ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos caiga en 6?

6. Sean A, B, C y D eventos tales que $B = A^c$, $C \cap D = \emptyset$ y

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(C \mid A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C \mid B) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(D \mid A) = \frac{1}{4},$$
$$\mathbb{P}(D \mid B) = \frac{1}{8}.$$

   Calcule $\mathbb{P}(C \cup D)$.

7. ([12] Ej. 2.71) Sean A y B eventos tales que $\mathbb{P}(A)$ =0.5, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$. Calcule las siguientes probabilidades:

   a) $\mathbb{P}(A \mid B)$.
   b) $\mathbb{P}(B \mid A)$.
   c) $\mathbb{P}(A \mid A \cup B)$.
   d) $\mathbb{P}(A \mid A \cap B)$.
   e) $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B)$.

8. Sean A, B eventos independientes tales que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Luego, se tiene que

$$\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B))$$

   es:

   a) 1, *b*) 0.5, *c*) 0.25, *d*) ninguna de los anteriores.

9. Si el evento A es independiente del evento B y A es independiente del evento C. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es verdadera?

   a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C)$.
   b) B y C son ajenos o disjuntos.
   c) B y C son independientes.
   d) Ninguna de las anteriores.

10. ([4] Pp 78, 2.33.) Es sabido que el 30 % de las lavadoras de cierta empresa necesitan servicio mientras aún tienen garantía, mientras que solo el 10 % de las secadoras necesitan ese servicio. Si alguien compra una lavadora y una secadora de esta compañía, ¿cuál es la probabilidad que ambas máquinas necesiten servicio bajo garantía?

11. Sean A y B dos eventos independientes, tales que $\mathbb{P}(A) = a$ y $\mathbb{P}(B) = b$. Calcule la probabilidad de que:

    a) No ocurra ninguno de estos dos eventos.
    b) Ocurra exactamente uno de estos dos eventos.
    c) Ocurra al menos uno de estos dos eventos.
    d) Ocurran los dos eventos.

12. Demuestre que si A y B son eventos independientes, entonces:

    a) A y B^c son independientes.
    b) A^c y B son independientes.
    c) A^c y B^c son independientes.

13. Calcule la probabilidad de que al lanzar n veces un dado se obtenga por lo menos un 1.

14. Una máquina trabaja con tres diferentes motores. Si ningún motor está descompuesto entonces es seguro que la máquina sigue trabajando; si se descompone un solo motor, entonces la máquina trabaja con una probabilidad de 0.7; si se descomponen exactamente dos motores la máquina trabaja con una probabilidad de 0.49; si se descomponen los tres motores entonces es imposible que la máquina trabaje. Con base en la experiencia se estima que:

La probabilidad de que no se descomponga ningún motor es:	0.562
La probabilidad de que se descomponga un solo motor es:	0.403
La probabilidad de que se descompongan dos motores es:	0.0320
La probabilidad de que se descompongan los tres motores es:	0.003

Si la maquina está trabajando, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los tres motores se descomponga?

15. Una persona posee dos teléfonos celulares: A y B. El 60 % de las veces usa A y el resto de las veces usa B. De las llamadas realizadas de A, el 20 % no consiguen conectarse y de las llamadas en B, el 10 % no consiguen conectarse. Si esta persona hace una llamada y ésta sí conecto, ¿cuál es la probabilidad de que haya utilizado el teléfono B?

16. Un ejecutivo de publicidad está estudiando los hábitos de ver la televisión de los matrimonios durante las horas estelares. Con base en datos anteriores, ha determinado que durante esas horas el esposo ve la televisión el 65 % del tiempo. También ha determinado que cuando el esposo está viendo la televisión, el 45 % del tiempo también la está viendo la esposa. Cuando el esposo no ve la televisión, el 35 % del tiempo la esposa la está viendo. Encuentre la probabilidad de que:

    a) Si la esposa esta viendo la televisión, el esposo también la esté viendo.

    b) La esposa esté viendo la televisión en horas estelares.

17. Sea $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.68$ y $\mathbb{P}(A) = 0.25$. Si $\mathbb{P}(A \mid B) = 0.35$. Calcule $\mathbb{P}(B)$.

18. Andrés va al Doctor con un poco de fiebre y congestionamiento severo con el afán de obtener un diagnóstico. El Doctor, al escuchar los síntomas (Z), supone que la enfermedad que padece Andrés puede ser una gripa común (E_1), pulmonía (E_2), o bien, principios de AH1N1 (E_3). El médico sabe por experiencia que

$$\mathbb{P}(E_1) = 0.5 \quad \mathbb{P}(E_2) = 0.35 \quad \mathbb{P}(E_3) = 0.15$$

    Después de hacerle una breve revisión física y obtener información adicional sobre la enfermedad de Andrés, el Doctor dictamina que

$$\mathbb{P}(Z \mid E_1) = 0.25 \quad \mathbb{P}(Z \mid E_2) = 0.60 \quad \mathbb{P}(Z \mid E_3) = 0.60$$

    Determine cuál es la enfermedad que con mayor probabilidad padece Andrés.

19. De los muchos automóviles que se guardan en el estacionamiento de una empresa, el 75 % transportan sólo a un empleado y el resto transportan a dos o más empleados. El 60 % de los automóviles son modelos anteriores a 1988. De los automóviles de modelos anteriores a 1988, dos de tres transportan sólo a un empleado y el resto a dos o más empleados. Si se selecciona un automóvil al azar de todos los que están en el estacionamiento, determine la probabilidad de que ese automóvil no transporte a dos o más empleados y no sea un modelo anterior a 1988.

20. En un experimento de laboratorio se intenta enseñar a un animal a dar vuelta a la derecha dentro de un laberinto. A manera de incentivo, el animal es premiado si da vuelta a la derecha y castigado si la da a la izquierda. En el primer intento, la probabilidad de que el animal gire a la izquierda es la misma que a la derecha. Si en cualquier intento el animal fue premiado, la probabilidad de que gire a la derecha en el siguiente intento es $p_1 > 1/2$, y si el animal fue castigado, la probabilidad de que gire a la derecha en el siguiente intento es $p_2 > p_1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el animal gire a la derecha en el tercer intento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el animal gire a la derecha en el tercer intento, dado que dió vuelta a la derecha en el primer intento?

21. ([10] Ej. 3.29) En una caja hay 15 pelotas de tenis de las cuales 9 nunca han sido utilizadas. Se escogen tres pelotas al azar, se juega con ellas y al finalizar las pelotas se regresan a la caja. Al día siguiente se seleccionan de la caja nuevamente tres pelotas al azar. [Muestre sus resultados con al menos cuatro decimales.]

    a) Calcule la probabilidad de que ninguna de estas 3 pelotas haya sido utilizada anteriormente. [Sugerencia: considere el teorema de probabilidad total.]

    b) Si sabe que las tres pelotas del segundo día son nuevas, ¿cuál es la probabilidad de que en el juego del día anterior dos de las tres pelotas ya hubieran sido usadas?

22. En unas vacaciones, le pides a tu vecino que, mientras tú no estás, riegue una planta enferma que estás cuidando. Sin agua, la planta morirá con probabilidad 0.8; y con agua, con probabilidad 0.15. Estás 90 % seguro de que tu vecino recordará regar la planta.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que la planta esté viva cuando regreses?

    b) Si la planta está muerta cuando regresas, ¿cuál es la probabilidad de que tu vecino haya olvidado regarla?

23. ([12] Ej. 2.173) En una fábrica, cuando los artículos llegan al final de la línea de producción, un inspector elige los que serán sometidos a inspección. Se sabe que 10 % de los artículos producidos son defectuosos, que 60 % de los artículos defectuosos son sometidos a inspección, y que 20 % de los artículos no defectuosos son sometidos a inspección. Dado que un artículo fue inspeccionado, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

2. Variables Aleatorias

2.2. Función de densidad y de distribución. Propiedades.

1. Sea Y una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_Y(y) = ky^3 e^{-y/2} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$$

   a) Encuentre el valor de la constante k que hace a f_Y una f.d.p. legítima.

   b) Grafique la f.d.p. $f_Y(y)$.

2. Sea X una variable aleatoria discreta. Si $f_X(x)$ es f.m.p. legítima entonces:

   a) $\sum_{x\in\mathbb{S}} \mathbb{P}(X \leq x) = 1$

   b) $f_X(a) < f_X(b)$ para $b < a$

   c) $\sum_{x\in\mathbb{S}} f_X(x) = 1$

   d) Ninguna de las anteriores

3. Sean $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones de densidad de probabilidad, $\theta_1 > 0$ y $\theta_2 > 0$ constantes tales que $\theta_1 + \theta_2 = 1$. Si $f(x) = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$, muestre que $f(x)$ es entonces una función de densidad.

4. ([7] Ej. 6. Cap 3) Un juego en una feria escolar consiste en lanzar un dardo a una diana (tiro al blanco) de radio 1. Ésta se divide en anillos concéntricos definidos por los círculos de radio i/n. Un alumno lanza un dardo al azar. Este ganará $(n - i + 1)$ pesos si cae en el i-ésimo aro A_i, formado por el anillo conformado por los círculos de radio $\frac{i}{n}, \frac{i-1}{n}$. Si se define a Y una variable aleatoria donde Y modela el dinero ganado. Encuentre la f. m. p. $f_Y(y)$.

5. Sea X variable aleatoria con función masa de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = c(2x + 1)\mathbb{I}_{\{1,2,3,4,5\}}(x)$$

   Calcule lo siguiente:

   a) El valor de la constante c.

   b) $\mathbb{P}(2 < X \leq 5)$.

6. Sea X variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{20000}{(100 + x)^3}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

   a) Muestre que f_X es una función de densidad de probabilidad propia.

   b) Encuentre $\mathbb{P}(X > t)$, para $t > 0$.

7. ([10] Ej. 5.5) Una estación de servicio se suministra con gasolina una vez a la semana. Si la demanda semanal de combustible, en miles de galones, es una variable aleatoria (v. a.) X con función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = c(1 - x)^4 \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

   ¿Cuál debería ser la capacidad del tanque para que la probabilidad de que se agote el suministro de una semana dada sea 0.01?

8. ([7] Ej. 3.3) Considere una caja que tenga 6 bolas rojas y 4 bolas negras. Una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionada. Sea X el número de bolas rojas seleccionadas. Calcule la f. m. p. de X si la muestra se toma:

   a) Sin reemplazo, donde $n \leq 6$.

   b) Con reemplazo, para $n = 1, 2, \ldots$

9. ([7] Ej. 3.5) Suponga X como una variable aleatoria que tiene función masa de probabilidad f dada por:

x	-3	-1	0	1	2	3	5	8
$f(x)$	.1	.2	.15	.2	.1	.15	.05	.05

   Calcule las siguientes probabilidades:

   a) X es negativa;

   b) X es impar(incluye negativos);

   c) X toma valores entre 1 y 8, incluyéndolos;

   d) $\mathbb{P}(X = -3 \mid X \leq 0)$;

   e) $\mathbb{P}(X \geq 3 \mid X > 0)$.

10. ([7] Ej. 3.8-9) Considere una caja que tiene 12 bolas marcadas con los números $1, 2, \ldots, 12$. Dos realizaciones independientes son hechas del experimento de seleccionar una bola de la caja al azar (selección con reemplazo).

   a) Sea X el mayor de los números de las bolas seleccionadas. Calcule la f. m. p. de X.

   b) Suponga la misma situación del inciso anterior, pero ahora se efectúa una selección sin reemplazo. Calcule la f. m. p. de X.

11. ([7] Ej. 3.12) Suponga una caja que tiene r bolas enumeradas $1, 2, \ldots, r$. Una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionada sin reemplazo. Sea Y el mayor de los números de las bolas seleccionadas y sea Z el menor de estos números.

   a) Calcule la probabilidad $\mathbb{P}(Y \leq y)$.

   b) Calcule la probabilidad $\mathbb{P}(Z \geq z)$.

12. ([10] Ej. 4.5, 4.6) Sea X la diferencia entre el número de soles y el número de águilas obtenidos mediante n volados de una moneda justa.

   a) ¿Cuáles son los valores posibles de X?

   b) Para $n = 3$, calcule la f. m. p. de X.

13. ([7] Ej. 5.2) Suponga un punto elegido al azar del interior de un disco de radio R situado en el plano. Sea X una variable aleatoria (v. a.) que denota el cuadrado de la distancia que existe entre el punto escogido y el centro del disco. Encuentre la función de probabilidad acumulada (f. p. a.) y la función de densidad de probabilidades (f. d. p.) de X.

14. ([7] Ej. 5.7) Considere el punto $P = (u, v)$ elegido al azar en el cuadrado $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Sea X la v. a. que se calcula a partir del punto P como $X = u + v$.

   a) Encuentre la f. p. a. de X.

   b) Encuentre la f. d. p. de X.

15. ([10] Ej. Self Test 5.7) Considere un juego en el cual para ganarlo debe de tener éxito en tres rondas consecutivas. El juego depende del valor de U, que es una v. a. distribuida uniformemente en el intervalo $(0,1)$. Si $U > 0.1$, entonces se gana la primera ronda; si $U > 0.2$, se gana la segunda ronda; y si $U > 0.3$, entonces se gana la tercera ronda.

    a) Calcule la probabilidad de éxito en la primera ronda.

    b) Calcule la probabilidad condicional de tener éxito en la segunda ronda, dado que tuvo éxito en la primera ronda.

    c) Calcule la probabilidad condicional de tener éxito en la tercera ronda, dado que tuvo éxito en la primera y segunda ronda.

    d) Calcule la probabilidad de ser un ganador en el juego.

16. El tiempo requerido (medido en horas) para resolver un examen es una v.a. con una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = (x + cx^2)\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$$

    a) Determine el valor de c para que $f_X(x)$ sea una f.d.p. propia o legítima.

    b) Obtenga la función de probabilidades acumulada $F_X(x)$.

    c) Utilice *b)* para obtener $\mathbb{P}(X < -1)$, $\mathbb{P}(X < 0)$, $\mathbb{P}(X < 1)$.

    d) Calcule la probabilidad de que un estudiante termine el examen en menos de media hora.

    e) Dado que un estudiante necesita al menos 15 minutos para responder el examen, encuentre la probabilidad de que termine al menos en 30 minutos.

17. Sea X una variable aleatoria con $F_X(x)$, luego, se dirá que X es absolutamente contínua si

    a) $F_X(x)$ es diferenciable $\forall x \in \mathbb{R}$.

    b) $f_X(x)$ es diferenciable $\forall x \in \mathbb{R}$.

    c) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ dx = 1$

    d) Ninguna de las anteriores.

18. Una diseñadora viaja diariamente desde su casa hasta su taller. Si la distribución del tiempo X, en horas, que tarda en llegar a su oficina tiene una función de probabilidad dada por

$$f_X(x) = x\,\mathbb{I}_{(0,1)}(x) + \frac{1}{2}\,\mathbb{I}_{(1,2)}(x)$$

    a) Obtenga la función de probabilidad acumulada de X.

    b) Calcule la probabilidad de que el tiempo de viaje de la diseñadora sea entre 30 y 90 minutos.

    c) Si se seleccionan aleatoriamente 5 días en la vida de la diseñadora, determine la probabilidad de que en 3 días su tiempo de viaje este entre las 0.5 y 1.5 horas.

19. Sea X variable aleatoria con función masa de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^x}\mathbb{I}_{\{1,2,3,\ldots\}}(x)$$

    a) Encuentre $F_X(x)$, la función de probabilidad acumulada de X.

    b) Grafique $F_X(x)$.

20. Sea X variable aleatoria con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}\,\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(x)$$

Encuentre $F_X(x)$, la función de probabilidad acumulada de X.

21. ([6] Ejemplo 3.3) Sea X variable aleatoria con función de probabilidad acumulada dada por:

$$F_X(x) = \frac{x}{2}\mathbb{I}_{[0,1]}(x) + \frac{\sqrt{x}}{2}\mathbb{I}_{(1,4]}(x) + \mathbb{I}_{(4,\infty)}(x)$$

   a) Verifique que $F_X(x)$ es una función de probabilidad acumulada.

   b) Grafique $F_X(x)$.

22. Considere la siguiente función:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes propiedades NO satisface?

   a) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

   b) Si $x_1 < x_2$, entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$

   c) $\lim_{h\to 0^+} F(x+h) = F(x)$

   d) Satisface todas las anteriores

23. Considere X v. a. con función de probabilidad acumulada dada por:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta & x \geq x_0 \end{cases},$$

para algún $x_0 > 0$ y $\theta > 0$ fijos.

La distribución anterior se conoce com distribución de *Pareto* parámetros $x_0(> 0)$ y $\theta(> 0)$, nombrada así en honor al economista italiano del S. XIX Wilfredo Pareto quien modeló la distribución del ingreso.

   a) Verifique que la función anterior es una función de distribución auténtica.

   b) Determine la función de densidad de la probabilidad f_x

   c) Dibuje f_x para:

      - $x_0 = \frac{1}{3},\ \theta = 1$
      - $x_0 = \frac{1}{2},\ \theta = 2$
      - $x_0 = 1,\ \theta = 3$

2.3. Características de una variable aleatoria. Moda, media, cuantiles. Momentos de una variable aleatoria. Valor esperado, varianza. Definición de coeficiente de asimetría y curtosis.

1. Considere a X una v. a. con una función de densidad de probabilidad (f.d.p.) dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\left\{\theta\mathbb{I}_{(0,1)}(x) + \mathbb{I}_{(1,2)}(x) + (1-\theta)\mathbb{I}_{(2,3)}(x)\right\}$$

donde $\theta \in (0, 1)$.

a) Obtenga la función de probabilidad acumulada $F_X(x)$.

b) Encuentre la moda y la mediana.

2. Sea X una v. a. con f. d. p. $f_X(x)$ donde

$$f_X(x) = |1 - x|\mathbb{I}_{(0,2)}(x)$$

Encuentre la mediana.

3. Una v. a. X con f. p. a. dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ x/8 & 0 \leq x < 2 \\ x^2/16 & 2 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

a) Grafique la f. d. p. de X.

b) Obtenga los cuartiles de X.

c) Calcule la probabilidad de que X este entre 2.5 y 4 unidades dado que ya lleva recorridas más de 2 unidades.

d) Calcule el coeficiente de variación. Recuerde, el coeficiente de variación se define de la manera siguiente:

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{|\mu_X|}$$

e) Calcule el coeficiente de asimetría y curtosis de X. Los coeficientes de asimetría y curtosis se definen de manera siguiente:

$$\nu_3(X) = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^3]}{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]^{3/2}} \qquad \nu_4(X) = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^4]}{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]^2}$$

4. Sea X v. a. con f. d. p. dada por:

$$f_X(x) = e^{-x}\,\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

Calcule la moda, la mediana y el rango intercuartílico de X.

5. Sea X v. a. con f. d. p. dada por:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(x) \quad \theta, \alpha > 0.$$

Calcule la diferencia entre el percentil 70 y el percentil 30 de X, en términos de α y θ.

6. Sea X el número de águilas obtenidas al tirar 4 volados independientes con una moneda justa. Calcule la moda y la mediana de X.

7. Considere a X una v. a. con una función de probabilidad (f.p.) dada por:

$$f_X(x) = \frac{2x}{n(n+1)}\mathbb{I}_{\{1,2,..,n\}}(x)$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

a) Muestre que f_X es una función de probabilidad legítima.

b) Encuentre el valor medio de X.

8. En el reciente lanzamiento de su linea de maquillaje Victoria Beckham declaró:

I want to make women feel empowered and confident

This makeup collection does that

I love to make women feel like the best version of themselves

Si se elige una palabra de esta afirmación al azar y se considera la v. a. N como el número de letras que tiene la palabra elegida, encuentre

a) la moda.
b) la mediana.
c) la media.
d) La desviación estándar.
e) Calcule la probabilidad de que N diste de su valor medio en menos de 2 unidades.

9. Sea X el número de veces que se tira un dado hasta obtener el primer 1. Calcule $\mathbb{E}[X]$.

10. Sea X v. a. con f. d. p. dada por:

$$f_X(x) = \frac{|x|}{10}\mathbb{I}_{(-2,4)}(x)$$

Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}(X)$.

11. ([10] Ej. 4.35) Una caja contiene 5 canicas rojas y 5 azules. Se seleccionan dos canicas al azar. Si son del mismo color, se gana \$1.10; y si son de diferente color, se pierde \$1.00. Calcula:

a) el valor esperado del monto ganado.
b) la varianza del monto ganado.

12. Considere a X una v. a. con una f. d. p. dada por $f_X(x)$ con segundo y tercer momentos centrales finitos y conocidos y considere las afirmaciones:

A: El cuarto momento central es finito.

B: El primer, segundo y tercer momento son finitos.

Luego

a) A y B son falsas.
b) A es verdadera y B falsa.
c) A es falsa y B verdadera.
d) A y B son verdaderas.

13. Demuestre que $\mathbb{E}[(X-\mu)^3] = \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 2(\mathbb{E}[X])^3$.

14. Demuestre que $\mathbb{E}[(X-\mu)^4] = \mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^3] + 6(\mathbb{E}[X])^2\mathbb{E}[X^2] - 3(\mathbb{E}[X])^4$.

15. Sea X v. a. con f. d. p. $f_X(x) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x)$. Calcule el coeficiente de curtosis de X.

16. ([2] Ej. 3.10) Considere la v. a. X que denota las desviaciones sobre el peso neto en un proceso de llenado con cierta máquina y sea su función de densidad de probabilidad (f. d. p.) dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{10}\mathbb{I}_{(0,10)}(x)$$

Determine:

a) $\mathbb{E}[X] = \mu_X$ y $\mathrm{var}(X) = \sigma_X^2$.

b) Los coeficientes de asimetría y curtosis dados por:

$$\nu_3(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^3]}{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad \nu_4(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^4]}{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]^2}$$

17. ([2] Ej. 3.11) Suponga que la duración aleatoria T en minutos de una conversación de negocios por teléfono sigue una f. d. p. dada por:

$$f_T(t) = \frac{1}{4}e^{-t/4}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(t)$$

Determine:

a) $\mathbb{E}[T]$ y $\mathrm{var}(T)$.

b) Los coeficientes de asimetría $\nu_3(T)$ y curtosis $\nu_4(T)$.

c) El coeficiente de variación.

d) Obtenga el primer y el tercer cuartil.

e) Calcule la probabilidad de que una llamada dure más de 4 minutos dado que lleva dos o más minutos de duración.

f) Comparado con el ejercicio anterior, ¿qué distribución tiene menor dispersión relativa?

18. ([2] Ej. 3.14) Considere el problema anterior. Muestre que la v. a. $Y = (T-4)/4$, tiene media cero, varianza 1, pero los mismos coeficientes de asimetría y curtosis que la v. a. T.

19. ([8] Ej. 1.97) Sea X v. a. con tercer momento finito. Grafique las siguientes funciones de densidad y muestre que están respectivamente: sesgada a la izquierda, no sesgada y sesgada a la derecha, y con su coeficiente de asimetría ν_3 negativo, cero y positivo.

a) $f(x) = (1+x)/2\,\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$.

b) $f(x) = 1/2\,\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$.

c) $f(x) = (1-x)/2\,\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$.

20. ([8] Ej. 1.98) Grafique las siguientes funciones de densidad y muestre que la primera tiene coeficiente de curtosis menor que la segunda.

a) $f(x) = 1/2\,\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$.

b) $f(x) = 3(1-x^2)/4\,\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)$.

21. ([2] Ej. 3.12) La calificación promedio en una prueba de Estadística es de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor considera que el examen ha sido demasiado largo y/o difícil. En consecuencia él desea *ajustar las calificaciones de* X de manera que el promedio sea ahora de 70 con una desviación estándar de 8 puntos. ¿Qué ajuste del tipo $a + bX$ debería utilizar?

22. ([2] Ej. 3.13) Sea X una v. a. con media μ y varianza σ^2.

    a) Evalúe $\mathbb{E}[(X-c)^2]$ en términos de μ y σ^2, donde c es una constante.

    b) ¿Para qué valores de c es mínimo $\mathbb{E}[(X-c)^2]$?

23. ([2] Ej 3.17) Suponga que el ingreso semanal Y (en miles de pesos) de un consultor aleatorio con f. d. p.dada por:

$$f(y) = \frac{1}{10}e^{-y/10}\,\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$$

    a) Determine la media y la mediana del ingreso.

    b) Determine la desviación estándar y el rango intercuartílico.

    c) Determine el 90-percentil de la distribución.

    d) ¿Cuál es la probabilidad de que el ingreso de una semana exceda el valor medio más una desviación estándar? Esto es, determine $\mathbb{P}(Y > \mu_Y + \sigma_Y)$.

2.4. Propiedades del valor esperado y varianza. Desigualdad de Chebyshev y de Jensen.

1. Sea X una v. a. con media μ_X y varianza σ_X^2. Muestre que $\mathbb{E}[(X-b)^2]$ se minimiza en $b = \mu_X$.

2. Sea X una v. a. con media μ_X y varianza σ_X^2. Sea además W definida como $W = h(X)$ donde
$$W = aX^2 - bX + c$$
para $a, b, c \in \mathbb{R}$. Encuentre el valor esperado de W.

3. Sea X una v. a. no negativa con función de probabilidad acumulada dada por $F_X(x)$. Muestre que
$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} (1 - F_X(x))dx$$

4. ([10] Ej. 4.38) Si $\mathbb{E}[X] = 1$ y $\mathrm{Var}(X) = 5$, calcule:

    a) $\mathbb{E}[(X+2)^2]$.

    b) $\mathrm{Var}(4X+3)$.

5. Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta:

    a) Si $X < Y$, entonces $\mathrm{Var}(X) < \mathrm{Var}(Y)$.

    b) $\mathrm{Var}(X+c) = \mathrm{Var}(X-c)$.

    c) $\mathrm{Var}(|X|) \leq \mathrm{Var}(X)$.

    d) $(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$.

6. Sea X v. a. continua con función de densidad de probabilidad:
$$f_X(x) = \frac{(k+1)x^k}{c^{k+1}}, \quad 0 < x < c, \quad k > 0.$$
Demuestre que el coeficiente de variación de X es igual a $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+3)}}$.

7. Sea Y una v. a. se define como $Z = \mathrm{h}(Y) = \ln(Y)$. Si se sabe que Z tiene media $\mu_Z = 0$ entonces, ¿es $\mathbb{E}[Y]$ mayor, menor o igual que 1?

8. Sea X una v. a. que sigue la ley de probabilidades

$$f_X(x) = \frac{1}{2v}\mathbb{I}_{(-v,v)}(x)$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev calcule una cota inferior para: $\mathbb{P}(|X| \leq v)$.

9. El tiempo que se tarda en congelar un helado con nitrógeno es en promedio de 15 segundos con una desviación estándar de 3 segundos. Estime la probabilidad de que el tiempo de preparación de un helado este a más de 5 segundos de la media.

10. Sea X v. a. con f. d. p. $f_X(x) = 1$, para $0 < x < 1$. Utilice la desigualdad de Chebyshev para obtener una cota superior de las probabilidades $\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| > \sqrt{\text{Var}(X)}\right)$ y $\mathbb{P}\left(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| > 2\sqrt{\text{Var}(X)}\right)$. Calcule también el valor exacto de dichas probabilidades y compare los resultados.

11. ([10] Ej. 8.19) Si X es una v. a. continua no negativa con media 25, ¿qué se puede decir acerca de:

    a) $\mathbb{E}[X^3]$?
    b) $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$?
    c) $\mathbb{E}[\ln(X)]$?
    d) $\mathbb{E}[e^{-X}]$?

12. ([12] Ej. 3.169) Sea X v. a. con f. m. p. dada por:

$$f_X(-1) = \frac{1}{18}, \qquad f_X(0) = \frac{16}{18}, \qquad f_X(1) = \frac{1}{18}.$$

    a) Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\text{Var}(X)$.
    b) Utilice la f. m. p. para calcular $\mathbb{P}(\left|X - \mathbb{E}[X]\right| \geq 3\sqrt{\text{Var}(X)})$. Compare esta probabilidad con la cota superior obtenida con la desigualdad de Chebyshev y verifique que los resultados son iguales.

2.5. Función Generadora de Momentos.

1. Los primeros tres momentos de una v. a. U son

$$\mu_U^1 = 0.50; \quad \mu_U^2 = 0.50; \quad \mu_U^3 = 0.75$$

    a) Calcule la media y varianza de U.
    b) Determine si la distribución de U es simétrica.

2. Sea X una v. a. con f. d. p. $f_X(x)$ donde

$$f_X(x) = .2\ e^{-.2x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

Obtenga el coeficiente de asimetría y de curtosis mediante la función generadora de momentos (f. g. m.) de X. Concluya.

3. Sea Y una v. a. con f. g. m. $M_Y(t)$ dada por

$$M_Y(t) = (1 - .25t)^{-3}; \quad t < 4$$

    a) Obtenga su media y varianza de Y.

b) Determine si la ley de probabilidades de Y es simétrica.

c) Si se define a $W = 6Y - 2$. Calcule la f. g. m. de W

d) Obtenga la media y varianza de W.

4. Sea X v. a. con f. g. m. $M_X(t) = \dfrac{e^{at}}{1 - bt^2}$, para $-1 < t < 1$. Si $\mathbb{E}[X] = 3$ y $\operatorname{Var}(X) = 2$, calcule el valor de las constantes a y b.

5. ([12] Ej. 3.158) Si Y es una v. a. con f. g. m. $M_Y(t)$ y si $W = aY + b$, demuestre que $M_W(t) = e^{tb} M_Y(at)$.

6. ([12] Ej. 4.145) Sea Y v. a. con f. d. p.:

$$f_Y(y) = e^y, \qquad y < 0.$$

a) Calcule $\mathbb{E}[e^{3Y/2}]$.

b) Encuentre $M_Y(t)$, la f. g. m. de Y.

c) Calcule $\operatorname{Var}(Y)$.

2.6. Distribución de una función de una variable aleatoria. Método de la función de distribución. Método de Cambio de Variable.

1. ([13] Ej. 4.142) Considere Y distribuida uniformemente en $(0, 1)$. Sean a y b constantes, y $V = a + bY$. ¿Cuál es la distribución de V? Justifique su respuesta.

2. Considere a U una v. a. con una f. d. p. dada por

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{(-1,1)}(u)$$

Obtenga la ley de probabilidades que sigue la v. a. Y si

a) $Y = |U|$.

b) $Y = U^2 + 1$.

c) $Y = (U + 1)^{-1}$.

3. Considere a Θ una v. a. con una f. d. p. dada por:

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}(\theta)$$

Obtenga la ley de probabilidades que sigue la v. a. Y si $Y = A \sin\theta$, donde $A \in \mathbb{R}$.

4. Sea Z una v. a. con f. d. p. dada por:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}}(z)$$

Considere la transformación $Y = Z^2$ y utilice el teorema de cambio de variable para obtener la f. d. p. de Y.

5. ([12] Ej. 6.1) Sea Y v. a. con f. d. p. $f_Y(y) = 2(1 - y)\mathbb{I}_{(0,1)}(y)$. Encuentre la f. d. p. de:

a) $U_1 = 2Y - 1$.

b) $U_2 = 1 - 2Y$.

c) $U_3 = Y^2$.

6. Sea X v. a. con f. d. p. $f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}\mathbb{I}_{(a,b)}(x)$. Encuentre la f. d. p. de la v. a. $Y = \dfrac{X}{b-X}$.

7. Se dice que W tiene una distribución *Pareto* con parámetros $\alpha > 0$ y $\theta > 0$ si su f. d. p. está dada por:
$$f_W(w) = \frac{\alpha\theta^\alpha}{w^{\alpha+1}}\mathbb{I}_{(\theta,\infty)}(w)$$
Si X es una v. a. con $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$; y $Y = ce^X$, con $c > 0$, demuestre que Y tiene una distribución *Pareto* y especifique sus parámetros.

8. Sea X una v. a. con f. d. p. $f_X(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Encuentre la distribución de $X/(1+X)$.

3. Distribuciones Importantes.

3.1. Distribución Binomial

1. ([13] Ej. 3.160) Sea X una v. a. que representa el número de éxitos en n ensayos independientes con probabilidad de éxito común $0 < p < 1$. Sea $Y = n - X$.

   a) Muestre que X sigue la *distribución binomial* con f. m. p. dada por:

   $$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \, \mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

   donde $q = 1 - p$.

   b) Muestre que $\mathbb{E}[Y] = nq$ y $\text{var}(Y) = npq$.

   c) ¿Qué representa Y?

2. La probabilidad de que un cliente compre un modelo de un par de zapatos en talla 41 es de 0.40. La tienda tiene en inventario solo tres pares en esta talla. Si en una hora llegan cinco clientes a la tienda, encuentre

   a) La probabilidad de que los clientes que desean comprar este modelo de zapato en dicha talla puedan hacerlo.

   b) El número de clientes esperados que comprarán los zapatos.

3. Una gerente de una marca de cosméticos asegura que el 80 % de los clientes potenciales que asisten a un lanzamiento de una nueva línea tendrán la percepción de que los productos son de muy buena calidad. Para verificar lo anterior la gerente decide preguntarle a una muestra de asistentes su opinión.

   a) Determine la probabilidad de que para una muestra de 25 clientes 22 de ellos exactamente reflejen las creencias de la gerente.

   b) Si ahora la gerente decide tomar una muestra de 100 clientes pensando que el 8 % de los asistentes creerán que los productos reflejan un precio excesivo, determine la probabilidad de que más de 6 clientes piensen en efecto que los productos son costosos.

4. Sea Y una v. a. que sigue una ley de probabilidades binomial con parámetros n y p. Encuentre

   $$\mathbb{P}(Y > 1 \mid Y \geq 1)$$

5. Un examen de opción múltiple consta de 30 preguntas independientes, cada una con 4 posibles respuestas (de las cuales, solo una es correcta). Un estudiante contesta todas las preguntas al azar. Calcule la probabilidad de que dicho estudiante tenga 18 o más respuestas correctas.

6. ([10] Ej. 4.9 Self-test) Sea X una v. a. con distribución binomial con media 6 y varianza 2.4. Calcule $\mathbb{P}(X = 5)$.

7. *a*) Si se tira un dado 4 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un 6?

   b) Si se tiran dos dados 24 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un doble 6?

8. ([5] Ej. 3.60) Una caseta de peaje cobra \$1.00 por automóviles de pasajeros y \$2.50 por otros vehículos. Suponga que durante el día, 60 % de los vehículos que transitan por esa caseta son de pasajeros. Si 25 vehículos cruzan la caseta durante el día, ¿cuál es la ganancia esperada de la caseta de peaje?

9. ([5] Ej. 3.54) Un tipo particular de raqueta de tennis viene en tamaño mediano o grande. 60 % de los compradores de una cierta tienda quieren la grande. De diez consumidores seleccionados al azar que quieren este modelo de raqueta, ¿cuál es la probabilidad de que al menos seis quieran la versión en tamaño grande?

10. ([5] Ej. 3.65) De los consumidores de una estación de gas 30 % seleccionan gasolina regular, 20 % premium y 50 % diesel. De 100 de los siguientes consumidores, ¿cuál es la media y la varianza del número de consumidores que seleccionan gasolina regular?

3.2. Distribución Poisson

1. Para analizar la capacidad de un nuevo bar se estudia la conglomeración de gente en una cuadricula de 2m^2. Se determina que en promedio por cada 2m^2 hay 4 personas en un día de operaciones.

   a) Calcule la probabilidad de no haya personas en un espacio de 2m^2 elegido al azar.

   b) Calcule la probabilidad de haya a lo menos tres personas en un espacio de 4m^2 elegido al azar.

2. Una exhibición de arte en Nueva York recibe en promedio 5 personas por hora.

   a) Determine la probabilidad de que en media hora se reciban 4 o menos visitantes.

   b) Determine la probabilidad de entre 11 y 12 del día se reciban al menos 12 visitantes.

   c) Si el ingreso de la galería devengado de las visitas por día (contemplando 7 horas de operación diaria), W está dado por

   $$W = -100 + N + 2N^2$$

   donde N es el número de visitantes recibidos por día. Encuentre el Ingreso esperado por día en la galería.

   d) Si se consideran 5 días en una semana, determine la probabilidad de que en al menos 4 días hayan más de 7 personas entre las 11:00 y las 12:00 hrs.

3. Sea X una v. a. que sigue una ley de probabilidades Poisson con parámetros $\lambda > 0$.

   a) Muestre que

   $$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \lambda \mathbb{E}\left[(X+1)^{n-1}\right]$$

   b) Use la f. g. m. y calcule

   $$\mathbb{E}\left[X^3\right]$$

4. Sea X una v. a. con distribución Poisson, tal que $\mathbb{P}(X = 2) = 3 \cdot \mathbb{P}(X = 4)$. Calcule $\mathbb{E}[X^2]$.

5. ([12] Ej. 3.139) En la producción diaria de cierto tipo de cuerda, el número de defectos por cada metro, Y, tiene una distribución Poisson, con media 2. La utilidad por metro cuando la cuerda se vende está dada por $X = 50 - 2Y - Y^2$. Calcule la utilidad esperada por cada metro de cuerda.

6. ([10] Ej. 4.58) Compare la aproximación Poisson con la probabilidad Binomial exacta en los siguientes casos:

   a) $\mathbb{P}(X = 2)$, con $n = 8$ y $p = 0.1$.

   b) $\mathbb{P}(X = 9)$, con $n = 10$ y $p = 0.95$.

c) $\mathbb{P}(X = 0)$, con $n = 10$ y $p = 0.1$.

d) $\mathbb{P}(X = 4)$, con $n = 9$ y $p = 0.2$.

7. ([5] Ej. 3.83) Un artículo en *Los Angeles Times* (Dec. 3, 1993) reporta que una en doscientas personas tienen un gen defectivo. En una muestra de 1000 individuos, ¿cuál es la distribución aproximada del número de personas que tienen este gen? Usa esta distribución para calcular la probabilidad aproximada de que:

   a) Entre 4 y 7 personas (inclusive) tengan este gen.

   b) Al menos 8 tengan este gen.

3.3. Distribución Uniforme Continua

1. Un vendedor de tamarindos sobre una playa de Acapulco vende sus productos entre el hotel A y el hotel B y su ubicación U se distribuye uniforme entre estos dos hoteles, esto es, $U \sim \text{Unif}(a, b)$.

   a) Calcule la probabilidad de que el vendedor este más cerca del hotel A que del hotel B.

   b) Calcule la probabilidad de que la distancia del vendedor al hotel A sea al menos 3 veces la distancia del vendedor al hotel B.

2. Usted planea realizar un viaje a Canadá para lo cual tramita su visa y el tiempo de entrega Y de su documento migratorio está distribuido de 1 a 5 días. Su agencia de viajes requiere los datos de su visa vigente y el costo inicial de boletar el vuelo es c_0 y crece de acuerdo al tiempo en recibir la visa proporcionando un costos total de emisión dado por
$$C = c_0 + c_1 Y^2$$
   para $c_0, c_1 \in \mathbb{R}^+$.

   a) Determine el costo esperado a pagar por su vuelo.

   b) Determine la probabilidad de que tarde más de dos días en llegarle su visa.

   c) Determine la probabilidad de que tarde más de dos días en llegarle su visa si ya ha pasado un día y medio y aún no la recibe.

3. Suponga un circulo con área $A = \pi R^2$ donde R es el radio del circulo que es a su vez una variable aleatoria que sigue una ley de probabilidades distribuida uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

   a) Calcule el Área media.

   b) Calcule la varianza del Área.

4. Sea X una v. a. con distribución Uniforme continua en el intervalo $(1, a)$, con $a > 1$. Si $\mathbb{E}[X] = 6 \cdot \text{Var}(X)$, calcule el valor de a.

5. Sea $U \sim \text{Unif}(0, 1)$. Obtenga la función de densidad de probabilidad de:

   a) $X = 10U - 5$.

   b) $Y = 4U(1 - U)$.

6. Si W se distribuye uniformemente en (0,5), ¿cuál es la probabilidad de que las dos raíces de $4x^2 + 4xW + W + 2 = 0$ sean reales?

3.4. Distribución Gamma, Exponencial, Ji-Cuadrada χ^2

1. ([5] Ej 4.59) Sea la v. a. X el tiempo entre dos arribos sucesivos a la ventanilla de un banco. Si X $\sim$Exp$(\lambda = 1)$ con media igual a $1/\lambda$, ¿cuál es el tiempo esperado entre dos tiempos sucesivos de arribo?

2. Sea Y una v. a. que sigue una ley de probabilidades Gamma con parámetros de forma $\alpha > 0$ y de escala $\beta > 0$.

   a) Obtenga el $r-$ésimo momento centrado en el origen.

   b) Determine si el $r-$ésimo momento negativo existe y bajo qué condiciones.

3. Sea Y v. a. con $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ con parámetros de forma $\alpha > 0$ y de escala $\beta > 0$.

   a) Muestre que si $\alpha > 1$ entonces Y tiene moda en $(\alpha - 1)\beta$.

   b) Encuentre la distribución de $W = \sqrt{Y}$.

4. El número de clientes que llega a hospedarse en un hotel boutique en un tiempo de 0 a t se puede modelar mediante una v. a. N distriuida Poisson con parámetro (λt). Sea a su vez T una v. a. que denota el tiempo para que llegue el primer cliente a hospedarse en el hotel. Encuentre la distribución de T.

5. Sea X una v. a. con distribución exponencial parámetro λ y media $1/\lambda$, tal que

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = 2 \cdot \mathbb{P}(X > 4)$$

   Calcule Var(X).

6. Sea $Z \sim N(0, 1)$, demuestre que $Z^2 \sim \chi_1^2$.

7. Sea X una v. a. con f. d. p. $f_X(x)$ donde

$$f_X(x) = \frac{x}{\beta^2} \exp\left\{\frac{-x^2}{2\beta^2}\right\} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$$

   donde $\beta \in \mathbb{R}^+$. Luego, se dice que X sigue una ley de probabilidades Rayleigh. Muestre que esta tiene media y varianza finita.

8. El costo inicial de cierta máquina es \$3. El tiempo de vida de dicha máquina tiene una distribución exponencial con media de 3 años. El fabricante está considerando ofrecer una garantía que paga \$3 si la máquina se descompone durante el primer año, paga \$2 si se descompone durante el segundo año y paga \$1 si se descompone durante el tercer año (si la máquina se descompone después del tercer año, no paga nada). Calcule el pago esperado de la garantía.

3.5. Distribución Normal

1. Sea Z una v. a. que sigue una ley de probabilidades normal estándar.

   a) Muestre que la media $\mu_Z = 0$ y que la varianza $\sigma_Z^2 = 1$.

   b) Calcule la función generadora de momentos de Z.

   c) Demuestre que $X = \mu_X + \sigma_X Z$ sigue una ley de probabilidades normal con media μ_X y varianza σ_X^2 mediante el uso de la función generadora de momentos.

2. Sea X v. a. que denota el contenido de un frasco de un perfume medido en ml. De acuerdo a la experiencia se puede considerar a $X \sim \mathrm{N}(\mu_X = 100, \sigma^2)$. El encargado de calidad de la casa de perfumes requiere que no más del 5 % de los frascos llenados por su proceso contengan menos de 98 ml o bien más de 102 ml. Determine el valor máximo que σ_X puede tomar para satisfacer los requerimientos del encargado.

3. Sea Z una v. a. que sigue una ley de probabilidades normal estándar. Muestre que

$$X = h(Z) = \mu_X + \sigma_X Z$$

sigue una ley de probabilidades normal con media μ_X y varianza σ_X^2 mediante el teorema de cambio de variable integral.

4. Sea $Z \sim N(0,1)$, muestre que $\mathbb{E}[Z \mid Z > 0] = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

5. ([10] Ej. 5.23) Se va a tirar un dado 1000 veces. Calcule una aproximación a la probabilidad de que el número seis aparezca entre 150 y 200 veces.

6. ([12] Ej. 4.73) Una fábrica produce tornillos cuya longitud se distribuye normal con media 950 mm y desviación estándar 10 mm.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que un tornillo elegido al azar mida entre 947 y 958 mm?

    b) ¿Cuál es el valor de C tal que un tornillo elegido al azar tenga una probabilidad de 0.8531 de medir menos de C mm?

7. ([5] Ej. 4.49) Suponga que 75 % de los conductores en un cierto estado utilizan regularmente el cinturón de seguridad. Una muestra de 500 conductores es seleccionada. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 360 y 400 (inclusive) de los conductores en la muestra utilicen regularmente el cinturón de seguridad?

8. ([5] Ej. 4.42) Las lecturas de temperatura de un termopar puesto en un medio a temperatura constante se distribuye normal con media μ, la temperatura verdadera de la media y, desviación estándar, σ. ¿Cuál debe de ser el valor de σ que asegure que el 95 % de las lecturas están entre 0.1 grados de μ?

9. ([5] Ej. 4.44) Si el diámetro de un cojinete se distribuye normal, ¿cuál es la probabilidad de que éste se encuentre entre 1.5 SD (desviaciones estándar) de la media?

4. Distribuciones Multivariadas.

1. ([3] Ej. 5.1.1) En una estación de servicio se tienen dos despachadores, uno de auto-servicio y otro de servicio completo. Sean X, Y las v. a.'s que denotan el número de mangueras ocupadas, en una hora en particular, en el despachador de auto-servicio y de servicio completo, respectivamente. La f. m. p. conjunta de X y Y está dada por:

		X		
	$f(x,y)$	0	1	2
	0	0.1	0.04	0.02
Y	1	0.08	0.2	0.06
	2	0.06	0.14	0.3

   Calcule:

   a) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$.
   b) $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1)$.
   c) Explique el significado del evento $\{X \neq 0, Y \neq 0\}$.

2. ([3] Ej. 5.1.3) Cierto supermercado tiene una caja de salida común y una caja rápida. Sea X la v. a. que denota el número de clientes que están esperando en la caja común en un momento particular del día, y Y el número de clientes en la caja rápida, al mismo tiempo. Suponga que la f. m. p. de X y Y está dada por la siguiente tabla:

		X			
	$f(x,y)$	0	1	2	3
	0	0.08	0.07	0.04	0
Y	1	0.06	0.15	0.05	0.04
	2	0.05	0.04	0.1	0.06
	3	0	0.03	0.04	0.07
	4	0	0.01	0.05	0.06

   Calcule:

   a) $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$.
   b) $\mathbb{P}(X = Y)$, ¿Qué significa este evento? Encuentre su probabilidad.
   c) La probabilidad de que el número total de clientes de las dos líneas de espera sea exactamente 4.

3. ([3] Ej. 5.1.9) Cada neumático delantero de un tipo particular de automóvil se llenará a una presión de 26 lb/pulg^2. Suponga que la presión de aire de cada neumático es una v. a. , X para el neumático derecho y Y para el izquierdo, con f. d. p. conjunta:

$$f(x,y) = k(x^2 + y^2)\mathbb{I}_{\{20 \leq x \leq 30, 20 \leq y \leq 30\}}(x,y)$$

   a) ¿Cuál es el valor de k?
   b) ¿Cuáles la probabilidad de que ambos neumáticos tengan menor presión que la requerida?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia de presión de aire entre los neumáticos sea a lo más de 2 lb/pulg^2?

d) Encuentre la f. d. p. de la presión de aire en el neumático derecho exclusivamente.

4. ([3] Ej. 5.1.12) Dos componentes de una microcomputadora tienen la siguiente f. d. p. conjunta para sus duraciones X, Y:

$$f(x,y) = xe^{-x(1+y)}\mathbb{I}_{\{x\geq 0, y\geq 0\}}(x,y)$$

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de ambos componentes sea mayor que 3?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la duración de ambos componentes sea menor que 7?

   c) Encuentre las f. d. p. marginales tanto de X como de Y.

5. ([3] Ej. 5.1.10) Ana y Eva han accedido a encontrarse entre las 5:00 p.m. y las 6:00 p.m. para cenar en un restaurante. Sea X la v. a. que denota el tiempo de arribo de Ana y Y la v. a. que denota el tiempo de arribo de Eva. Suponga, además, que X, Y son independientes y cada una se distribuye uniformemente en el intervalo [5,6].

   a) ¿Cuál es la f. d. p. conjunta de X, Y?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas lleguen entre 5:15 y 5:45? (Recuerde que 15 minutos equivalen a un cuarto de hora).

   c) Si la primera que llegue sólo esperará a la otra los siguientes 10 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que sí cenen juntas? (Recuerde que 10 minutos equivalen a 1/6 de hora).

6. ([3] Ej. 5.2.10) Un profesor ha dado un examen que consiste en dos partes. Para un alumno seleccionado al azar, sean X, Y las v. a. que denotan el puntaje obtenido en la primera y segunda parte, respectivamente. Suponga que la f. m. p. conjunta está dada de acuerdo a la siguiente tabla.

		X			
	$f(x,y)$	0	5	10	15
	0	0.02	0.06	0.02	0.1
Y	5	0.04	0.15	0.2	0.1
	10	0.01	0.15	0.14	0.01

   Si la calificación final es la suma de los puntos obtenidos en ambas partes, encuentre la calificación esperada, es decir, $\mathbb{E}[X+Y]$. La calificación máxima es 25.

7. ([3] Ej. 5.2.27) Ana y Andrés acordaron reunirse para comer entre el mediodía (0:00 pm) y la 1:00 pm. Sean X y Y las v. a. que denotan los tiempos de llegada de Ana y Andrés respectivamente. Defina su f. d. p. conjunta como:

$$f(x,y) = 6x^2y\mathbb{I}_{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1}(x,y)$$

   a) ¿Cuál es el tiempo esperado que transcurriría entre el arribo del primero y del segundo?

   b) Calcule $\mathbb{E}[XY]$.

   c) Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$.

8. Se define como muestra aleatoria a la colección $X_1, \ldots, X_n$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Considere la muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_7$ con media común μ. Encontrar $\mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_7]$.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ v. a. i. i. d. con media y varianza común μ y σ^2 respectivamente. Se define la *media muestral* $(\bar{X})$ por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   a) Muestre que $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$ y $V(\bar{X}) = \sigma^2/n$.

   b) Verifique que $V(X_1 - \bar{X}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$.

10. ([11] Ej. 7.30) Sean X, Y v. a. i. i. d. con media μ y varianza σ^2. Encuentre $\mathbb{E}[(X-Y)^2]$.

11. ([1] Ej. 7.8.40) Sean X y Y v. a. i. i. d. Unif$(0,1)$. Calcule la covarianza de $X+Y$ y $X-Y$.

12. ([1] Ej. 7.8.55) Sean V, W, Z v. a. i. i. d. Po(λ). Defina $X = V + W$, $Y = V + Z$. Calcule la covarianza de X, Y.

13. ([11] Ej. 7.38) Sean X, Y con f. d. p. conjunta dada por:

$$f(x,y) = \frac{2}{x}e^{-2x}\mathbb{I}_{\{0\leq x<\infty, 0\leq y\leq x\}(x,y)}$$

    Determine $Cov(X,Y)$. (*Sugerencia:* Recuerde que $\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy$ y aplique el teorema de Fubini).

14. Considere (X_1, X_2) v. a.'s con f. g. m. conjunta dada por

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \left[\frac{1}{3}(e^{t_1+t_2}+1) + \frac{1}{6}(e^{t_1}+e^{t_2})\right]^2, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

    Calcule: $\mathbb{E}[X_1]$, $V(X_2)$, $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ suponiendo que éstas son finitas.

15. Se realizó un estudio sobre los daños en accidentes automovilísticos que sufren los niños. Sea X la v. a. que denota el número de niños dentro del automóvil y Y la v. a. que denota el número de niños que resulta con daño grave después de un accidente automovilístico. Si la distribución conjunta de las variables X y Y está dada por:

		X	
	$f(x,y)$	1	2
	0	0.12	0.08
Y	1	0.48	0.12
	2	0	0.2

    a) Obtenga la f. g. m. de X.

    b) ¿Son independientes X y Y? Justifique.

    c) Calcule $\mathbb{E}[\frac{Y}{X}]$.

16. La media, varianza y f. g. m. de la v. a. X están dadas por μ, σ^2 y $M_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, respectivamente, y si Y es la v. a. cuya f. g. m. está dada por:

$$M_Y(t) = e^{c[M_X(t)-1]}, \qquad -\infty < t < \infty,\ c \in \mathbb{R}^+$$

    Exprese la media y varianza de Y en términos de la media y varianza de X.

17. ([1] Ej. 8.9.8) Sea $U \sim$ Unif$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Encontrar la f. d. p. de $\tan(U)$.

18. Sea $U \sim$Unif$(0,1)$. Encuentre la f. d. p. de $X = -\ln(U)$.

19. ([1] Ej. 8.9.20) Sean X, Y v. a. i. i. d. Exp(λ) con media $1/\lambda$. Defina $T = X + Y, W = X/Y$.

    a) Encuentre la f. d. p. conjunta de T y W, ¿son independientes?

    b) Encuentre las f. d. p. marginales de T y W.

20. Sean $X \sim$Gamma(a, λ) y $Y \sim$Gamma(b, λ) con $a, b > 0$. Encuentre la f. d. p. conjunta de $W = X/Y$ y $Z = X + Y$.

21. ([3] Ej. 5.5.60) Cinco automóviles del mismo tipo viajaron 300 millas. Los primeros dos utilizarán gasolina económica y los otros tres gasolina de marca. Sean $X_1, \ldots, X_5$ los valores observados de millas por galón para los cinco automóviles y suponga que estas variables son independientes y normalmente distribuidas con $\mu_1 = \mu_2 = 20, \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 21$, $\sigma^2 = 4$ para X_1 y X_2 y 3.5 para X_3, X_4, X_5. Defina una v. a. Y por

$$Y = \frac{X_1 + X_2}{2} - \frac{X_3 + X_4 + X_5}{3}$$

    de modo que Y es una medida de la diferencia en eficiencia entre la gasolina económica y la de marca. Calcule $\mathbb{P}(0 \leq Y)$ y $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 1)$.

5. Distribución Normal Multivariada.

1. La f. d. p. conjunta de la demanda aleatoria de dos productos, X e Y, es una normal bivariada dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{100\pi\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{2}{3}\left[\left(\frac{x-50}{10}\right)^2 + \left(\frac{x-50}{10}\right)\left(\frac{y-25}{10}\right) + \left(\frac{y-25}{10}\right)^2\right]\right\}$$

   a) ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre X y Y?
   b) ¿Cuál es la covarianza entre X y Y?
   c) Determine la f. d. p. condicional $f(x \mid y)$.
   d) Suponga que la demanda real de Y es 30. Determine entonces la probabilidad de que la demanda de X sea mayor que 55.

2. ([1] Ej 7.72) Sea la f. d. p. conjunta de X y Y dada por:

$$f(x,y) = c \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right\}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

   a) Encuentre c de tal modo que f sea una f. d. p. legítima.
   b) ¿Cuáles son las distribuciones marginales de X y Y? ¿Son independientes?
   c) ¿Es el vector $\underline{X} = (X,Y) \sim \mathrm{N}_2$?

3. ([1] Ej 7.74) Sean X, Y, Z v. a. i. i. d. N(0,1). Encuentre la f. g. m. de $X + 2Y$, $3X + 4Z$, $5Y + 6Z$.

4. Sea (X,Y) distribuido Normal Bivariado con $X \sim \mathrm{N}(0,\sigma_1^2)$ y $Y \sim \mathrm{N}(0,\sigma_2^2)$ marginalmente y con $\mathrm{Corr}(X,Y) = \rho$. Encuentre la constante c tal que $Y - cX$ es independiente de X.

5. Sea X la v. a. que modela las ventas mensuales de cierta empresa (en millones de pesos) por concepto de papelería y sea Y la v. a. que denota las ventas mensuales (en millones de pesos) por concepto de accesorios de cómputo. Suponga que el vector aleatorio (X,Y) tiene distribución Normal bivariada con media y varianzas dadas por:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0.45 \\ 0.45 & 9 \end{bmatrix}$$

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes dado las ventas por concepto de accesorios de cómputo excedan 22 millones de pesos?
   b) ¿Cuál es la varianza de las ventas totales por papelería y accesorios de cómputo?
   c) Si en un mes dado las ventas por accesorios de cómputo son de 15 millones de pesos, ¿cuál es la probabilidad de que las ventas por papelería sean mayores que 5 millones de pesos?

6. Sean X_1, X_2 v. a. i. i. d. con densidad normal estándar. Sean $U_1 = X_1 + X_2$ y $U_2 = X_1 - X_2$. Encuentre la densidad conjunta de (U_1, U_2), ¿son variables aleatorias independientes?

7. Una persona está analizando la conformación de un portafolio de inversión con los instrumentos 1, 2, 3. Sea (X,Y,Z) el vector aleatorio que modela el rendimiento de los instrumentos de inversión, respectivamente. Si se considera que la distribución de este vector aleatorio es Normal multivariado con media y varianzas dadas por:

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.21 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & -4.7 & 3 \\ -4.7 & 3.4^2 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Si esta persona forma un portafolio en el cual el 60 % de esta inversión lo hace en el instrumento 1, 30 % en el instrumento 2 y el resto en el instrumento 3, ¿cuál es la probabilidad de que el rendimiento total de este portafolio sea mayor que 25 %?

Referencias

[1] J. K. Blitzstein and J. Hwang. *Introduction to Probability*. CRC Press, Boca Raton, 2014.

[2] G. C. Canavos. *Applied Probability and Statistical Methods*. Brown and Company, Boston, 1984.

[3] J. Devore. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*. Thomson Learning, fifth edition, 2001.

[4] J. Devore. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Brooks Cole, seventh edition, 2004.

[5] J. Devore. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Brooks-Coole, CENGAGE Learning, Boston, eight edition, 2010.

[6] F. Hernández. *Cálculo de Probabilidades*. Sociedad Matemática Mexicana, 2003.

[7] P. G. Hoel, S. C. Port, and C. J. Stone. *Introduction to Probability Theory*. Houghton Mifflin Company, Boston, 1971.

[8] R. V. Hogg and A. T. Craig. *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publishing Co., New York, fourth edition, 1978.

[9] E. Parzen. *Modern Probability Theory and Its Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1960.

[10] S. Ross. *A First Course in Probability*. Pearson, Upper Saddle River, seventh edition, 2006.

[11] S. Ross. *A First Course in Probability*. Pearson, Upper Saddle River, eighth edition, 2010.

[12] D. Wackerly, W. Mendenhall, and L. Scheaffer. *Mathematical Statistics with Applications*. Duxbury Press, Belmont, California, seventh edition, 2008.

[13] D. D. Wackerly, W. Mendenhall III, and R. L. Scheaffer. *Mathematical Statistics with Applications*. Thomson, Australia, 7 edition, 2008.

Respuestas

1. Fundamentos de Probabilidad.

1.2. Espacio muestral y eventos. Espacios muestrales discretos y continuos.

1. $\Omega = \mathbb{Z}$. Es discreto, es un conjunto numerable.
2. J es espacio continuo, para cualesquiera dos elementos de J existe uno entre ellos.
3. El espacio es discreto.
4. *a*) 80.
   b) 120, 60, 10.
   c) 190, 70, 10.
   d) 200, 260, 270.
5. $\Omega = \{(1 * 3 * 5 * 7 = 105), \ldots\}$
6. Para facilidad, tome a consideración el cuarteto ordenado (x_1, x_2, x_3, x_4) donde cada $x_i = 1$ ó 0 es una familia y los valores indicando (1) si su ingreso fue mayor que el monto y (0) en otro caso.
   a) $\Omega = \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), \ldots, (1,1,1,1)\}$.
   b) $n(A) = 11, n(B) = 6, n(C) = 4$.
7. Para facilidad considere la pareja ordenada (x, y) donde x representa el valor obtenido en el primer dado y y en el segundo.
   a) $E \cap F = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (4,1), (6,1)\}$
   b) $E \cup F = \{(1,1), (2,3), (2,5), (4,3), (4,5), (6,3), (6,5), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6), (1,3), (1,5), (3,1), (5,1)\} \cup (E \cap F)$
   c) $F \cap G = \{(1,4), (4,1)\}$
   d) $E \cap F^C = \{(2,3), (2,5), (4,3), (4,5), (6,3), (6,5), (3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}$
   e) $E \cap F \cap G = F \cap G$
8. Consideremos la tercia ordenada (x_A, x_B, x_C) con $x_i =$\{oficina asignada a la persona i\} donde
   $i = A, B, C$ y $x_i = 1, 2, 3$. Entonces:
   a) $S = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1), (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (1,3,3), (3,1,3), (3,3,1), (1,2,3), (2,1,3), (2,3,1), (1,3,2), (3,1,2), (3,2,1), (2,2,2), (2,2,3), (2,3,2), (3,2,2), (2,3,3), (3,2,3), (3,3,2), (3,3,3)\}$.
   b) $B = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)\}$.
   c) $C = \{(1,2,3), (2,1,3), (2,3,1), (1,3,2), (3,1,2), (3,2,1)\}$.
   d) $D = \{(1,1,1), (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,3,3), (3,1,3), (3,3,1), (3,3,3)\}$.
9. *a*) $\Omega = \{(3), (4), (5), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (1,2,3), (1,2,4), (1,2,5), (2,1,3), (2,1,4), (2,1,5)\}$.
   b) $A = \{(3), (4), (5)\}$.
   c) $B = \{(5), (1,5), (2,5), (1,2,5), (2,1,5)\}$.
   d) $C = \{(3), (4), (5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$.

1.3. Concepto de probabilidad. Enfoque clásico, frecuentista y subjetivo. Desarrollo axiomático de la probabilidad.

1. *a*) Enfoque frecuentista.
   b) Enfoque subjetivo.
   c) Enfoque clásico.

2. Tiende a $1/6 \approx 0.16666$.

3. *a*) $\mathbb{P}(A_1) = 0.28$.
   b) $\mathbb{P}(B \cup M) = 0.12$.
   c) $\mathbb{P}(P \cup C) = 0.41$.
   d) $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = 0.19$.

4. *Enfoque frecuentista*: asigna probabilidades en base a hechos. *Enfoque subjetivo*: asigna probabilidades con base en opiniones personales.

5. *a*) $\mathbb{P}(\{\text{Mujer}\}) = 0.5$
   b) $\mathbb{P}(\{\text{Estudiante de actuaria}\}) = 0.125$
   c) $\mathbb{P}(\{\text{Estudiante de ciencias sociales}\} \cap \{\text{Mujer}\}) = 0.2083$. (*Nota:* no se considera la carrera de matemáticas aplicadas en ciencias sociales).
   d) $\mathbb{P}(\{\text{Estudiante de ingeniería}\}^c) = 0.2291$.

6. Considere las variables X, Y que representan el valor del primer lanzamiento y el segundo, respectivamente.

   a) $\mathbb{P}(X > Y) = 0.416$.
   b) $\mathbb{P}(X+Y=2) + \mathbb{P}(X+Y=3) + \mathbb{P}(X+Y=5) + \mathbb{P}(X+Y=7) + \mathbb{P}(X+Y=11) = 0.416$.
   c) $\mathbb{P}(X = 6) = 0.16666$.

7. —

8. *a*) $\mathbb{P}(\{\text{Espada}\}) = 0.25$.
   b) $\mathbb{P}(\{\text{Color negro}\}) = 0.5$.
   c) $\mathbb{P}(\{7\}) = 0.0769$.
   d) $\mathbb{P}(\{8\} \cap \{\text{Trébol}\}) = 0.01923$.
   e) $\mathbb{P}(\{\text{Roja}\} \cap \{\text{Tiene letra}\}) = 0.153846$.
   f) $\mathbb{P}(\{\text{Es número primo}\}) = 0.3076$.

9. Considere X, Y como el número de soles y águilas, respectivamente.

   a) $\mathbb{P}(\{X = 2\} \cap \{Y = 2\}) = 0.375$.
   b) $\mathbb{P}(X > Y) = 0.3125$.

10. *a*) $\mathbb{P}(A^C \cup B^C) = 0.8$.
    b) $\mathbb{P}(A^C \cap B^C) = 0.1$.
    c) $\mathbb{P}(A^C \cap B) = 0.3$.
    d) $\mathbb{P}(A^C \cup B) = 0.6$.

11. $\mathbb{P}(\{a\}) = 1/8$; $\mathbb{P}(\{b\}) = 3/8$; $\mathbb{P}(\{c\}) = 4/8$.

12. No los satisfacen.

13.
    a) $\mathbb{P}(\{\text{Mujer}\}) = 0.38$.
    b) $\mathbb{P}(\{\text{Mujer}\} \cup \{\text{UBER}\}) = 0.78$.
    c) $\mathbb{P}(\{\text{OTRO}\} \mid \{\text{Mujer}\}) = 0.2368$.
    d) $\mathbb{P}(\{\text{Hombre}\} \mid \{\text{OTRO}\}) = 0.7096$.
    e) $\mathbb{P}(\{\text{Utilice UBER}\}^C \cap \{\text{Hombre}\}^C) = 0.09$.

14.
    a) $\mathbb{P}(A^C) = 0.8$.
    b) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$.
    c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
    d) $\mathbb{P}(A \cup B^C) = 0.7$.

15.
    a) $\mathbb{P}(\{\text{Traje}\}^C \cap \{\text{Corbata}\}^C \cap \{\text{Camisa}\}^C) = 0.49$.
    b) $\mathbb{P}(\{\text{Exactamente uno de los tres}\}) = 0.28$.

16. —

17. $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3,\ \mathbb{P}(A \setminus B) = 0.1$.

18. $\mathbb{P}(B) = 0.41666$.

19. —

1.4. Espacios muestrales con resultados equiprobables y no equiprobables. Selección aleatoria con reemplazo y sin reemplazo (probabilidades binomiales e hipergeométricas).

1. $\mathbb{P}(\text{A lo más 3 tiros cayeron entre los círculos de radio 1 y } 1/2) = 0.003$

2. $\mathbb{P}(N_1 = N_2) = 0.1428$.

3.
    a) —
    b) —

4.
    a) Sea A el evento deseado. $\mathbb{P}(A) = 0.75$.
    b) Sea B el evento deseado. $\mathbb{P}(B) = 0.125$.

5. Recuerde que el discriminante del polinomio debe ser positivo para tener dos raíces reales. $\mathbb{P}(1 - 4\alpha \geq 0) = 0.625$.

6. Sea A el evento descrito. $\mathbb{P}(A) = 0.5538$.

7. $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.625,\ \mathbb{P}(A \cap B) = 0.375$.

8. Sean X y Y el valor de las bolas. $\mathbb{P}(|X - Y| \geq 2) = 0.8$.

9. Sea $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \{x = 0\} \cup \{y = 0\} \cup \{x + y = 1\}\big\}$ y $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \{y = 0\} \cup \{x = 1\} \cup \{x = y\}\big\}$. $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.5$.

10.
    a) —
    b) —
    c) —

11. Existen 9,777'287,520 formas de seleccionar a los trabajadores para dichos trabajos. Sea A el evento de interés. $\mathbb{P}(A) = 0.00309597$.

12. *a*) $\mathbb{P}(\text{A recibe 4}) = 0.0123$.
    b) $\mathbb{P}(\text{Alguna recibe 4}) = 0.037$.
    c) $\mathbb{P}(\text{Alguna recibe 5 o menos}) = 0.1852$.

13. $\mathbb{P}(\text{José}) = \frac{p}{1-(1-p)^3}$, $\quad \mathbb{P}(\text{Carlos}) = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^3}$, $\quad \mathbb{P}(\text{Ana}) = \frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}$

14. Hay 30000 múltiplos de 3 y de ésos, 13333 comienzan con dígito par.

15. $\mathbb{P}(\text{Tener 4 números correctos exactamente}) = 2.69061 \times 10^{-6}$.

16. *a*) 720 formas.
    b) 72 formas.
    c) 144 formas.

17. *a*) 67'600,000 posibilidades.
    b) 19'656,000 posibilidades.

18. *a*) 40,320 maneras.
    b) 10,080 maneras.
    c) 1152 maneras.
    d) 2880 maneras.
    e) 384 maneras.
    f) 30240 maneras.

19. 199,584 parejas se pueden formar.

20. *a*) 36 distintas elecciones.
    b) 26 distintas elecciones.

21. *a*) $\mathbb{P}(\text{Royal Flush}) = 1.539 \times 10^{-6}$.
    b) $\mathbb{P}(\text{Straight Flush}) = 1.539 \times 10^{-5}$.
    c) $\mathbb{P}(\text{Poker}) = 2.401 \times 10^{-4}$.
    d) $\mathbb{P}(\text{Full House}) = 1.4406 \times 10^{-3}$.
    e) $\mathbb{P}(\text{Flush}) = 1.9807 \times 10^{-3}$.
    f) $\mathbb{P}(\text{Straight}) = 3.94 \times 10^{-3}$.
    g) $\mathbb{P}(\text{Tercia}) = 0.02113$.
    h) $\mathbb{P}(\text{Dos Pares}) = 0.0475$.
    i) $\mathbb{P}(\text{Un Par}) = 0.4226$.

1.5. Probabilidad condicional. Independencia y regla de la multiplicación. Teorema de probabilidad total. Teorema de Bayes.

1. $\mathbb{P}(\{\text{Más de dos lanzamientos}\} \mid \{\text{No hubo 5 en el primer lanzamiento}\}) = 0.833$.

2. $\mathbb{P}(\{\text{Venta Buena}\} \cap \{\text{Ventas Aumentan}\}) = 0.1575$.

3. $\mathbb{P}(B) = 0.6615$.

4. $\mathbb{P}(\text{Respuesta correcta}) = 0.875$

5. Sea A el evento de interés. $\mathbb{P}(A) =$ 0.333.

6. $\mathbb{P}(C \cup D) = 0.84375$.

7. *a*) $\mathbb{P}(A \mid B) = 0.333$.
   b) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.2$.
   c) $\mathbb{P}(A \mid A \cup B) = 0.7142$.
   d) $\mathbb{P}(A \mid A \cap B) = 1$.
   e) $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) = 0.1428$.

8. *b)*

9. *d)*

10. $\mathbb{P}(\{\text{Requiera servicio la lavadora}\} \cap \{\text{Requiera servicio la secadora}\}) = 0.03$.

11. *a*) $\mathbb{P}(A^C \cap B^C) = 1 - (a + b - ab)$.
    b) $\mathbb{P}(\{A \cup B\} \setminus \{A \cap B\}) = a + b - 2ab$.
    c) $\mathbb{P}(A \cup B) = a + b - ab$.
    d) $\mathbb{P}(A \cap B) = ab$.

12. *a*) —
    b) —
    c) —

13. Considere los eventos $A_i = \{\text{Cayo un 1 en el intento i}\}$, con $i = 1, \ldots, n$.
    $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - (5/6)^n$.

14. Considere los eventos:
    $D_i = \{\text{Se descomponen}\, i\, \text{motores}\}$ y $T = \{\text{La maquina sigue trabajando}\}$.
    Entonces $\mathbb{P}(D_3^C \mid T) = 0.6536$.

15. $\mathbb{P}(B \mid C) = 0.4286$.

16. Considere los eventos $M = \{\text{La esposa está viendo la televisión en horarios estelares}\}$ y $H = \{\text{El esposo está viendo la televisión en horarios estelares}\}$.

    a) $\mathbb{P}(H \mid M) = 0.7048$.
    b) $\mathbb{P}(M) = 0.415$.

17. $\mathbb{P}(B) = 0.6615$.

18. $\mathbb{P}(E_2 \mid Z) = 0.4941$.

19. $\mathbb{P}(\{\text{Modelo posterior a 1988}\} \cap \{\text{Se transporta una persona solamente}\}) = 0.35$.

20. Considere los eventos $D_i = \{\text{Dió la vuelta en el } i\text{-ésimo intento}\}$

    a) $\mathbb{P}(D_3) = 0.5(p_1^2 - p_2^2) + p_2$
    b) $\mathbb{P}(D_3 \mid D_1) = p_1^2 + (1 - p_1)p_2$.

21. *a*) $\mathbb{P}(\text{3 bolas nuevas en el día 2}) = 0.0893$.
    b) $\mathbb{P}(\text{2 bolas nuevas en el día 1} \mid \text{3 nuevas en día 2}) = 0.4091$.

22. *a*) $\mathbb{P}(\{\text{Muere}\}^C) = 0.785.$

    b) $\mathbb{P}(\{\text{Regado}\} \mid \{\text{Murio}\}) = 0.3720.$

23. $\mathbb{P}(\{\text{Defectuoso}\} \mid \{\text{Inspeccionado}\}) = 0.25.$

2. Variables Aleatorias.

2.2. Función de densidad y de distribución. Propiedades.

1. *a)* $k = 1/96$.
   b) —
2. *c)*
3. —
4. $$f_Y(y) = \frac{2n - 2y + 1}{n^2}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots,n\}}(y)$$
5. *a)* $c = 1/35$.
   b) $\mathbb{P}(2 < X \leq 5) = 0.7714$
6. *a)* —
   b) $\mathbb{P}(X > t) = \dfrac{10000}{(t+100)^2}$.
7. $\int_0^{x_{0.99}} 5(1-x)^4 dx = 0.99$ Por lo tanto $x_{0.99} = 0.6019$.
8. *a)*
   $$f_X(x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}}\mathbb{I}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$
   b)
   $$f_X(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{6}{10}\right)^x\left(\frac{4}{10}\right)^{10-x}\mathbb{I}_{\{0,\ldots,n\}}(x)$$
9. *a)* $\mathbb{P}(X < 0) = 0.3$.
   b) $\sum_{k=-2}^{2}\mathbb{P}(X = 2k+1) = 0.7$.
   c) $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 8) = 0.55$.
   d) $\mathbb{P}(X = -3 \mid X \leq 0) = 0.222$.
   e) $\mathbb{P}(X \geq 3 \mid X > 0) = 0.4545$.
10. *a)*
    $$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{2x-1}{144}\mathbb{I}_{\{1,\ldots,12\}}(x)$$
    b)
    $$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{2(x-1)}{132}\mathbb{I}_{\{2,\ldots,12\}}(x)$$
11. *a)*
    $$\mathbb{P}(Y \leq y) = \binom{y}{n}\Big/\binom{r}{n}, \quad y = n, \ldots, r$$
    b)
    $$\mathbb{P}(Z \leq z) = \binom{r+1-z}{n}\Big/\binom{r}{n}, \quad z = 1, \ldots, r-n+1$$
12. *a)* $\mathbb{S}_X\{-n, -(n-2), \ldots, n-2, n\}$.

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= 0.5^3 = \mathbb{P}(X=-3),\\ \mathbb{P}(X=1) &= \binom{3}{2}(0.5)^2(0.5),\\ \mathbb{P}(X=-1) &= \binom{3}{1}(0.5)(0.5)^2.\end{aligned}$$

13. La f. p. a. es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x/R^2 & 0 \le x < R^2 \\ 1 & x \ge R^2 \end{cases}$$

y la f. d. p. es

$$f_X(x) = \frac{1}{R^2}\mathbb{I}_{(0,R^2)}(x)$$

14. *a*)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/2 & 0 \le x < 1 \\ 2x - x^2/2 - 1 & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

b)

$$f_X(x) = x\mathbb{I}_{[0,1)}(x) + (2-x)\mathbb{I}_{[1,2)}(x)$$

15. *a*) $\mathbb{P}(U > 0.1) = 0.9$.

b) $\mathbb{P}(U > 0.2 \mid U > 0.1) = 0.8$.

c) $\mathbb{P}(U > 0.3 \mid \{U > 0.2\} \cap \{U > 0.1\}) = 0.7$.

d) $\mathbb{P}(\{U > 0.3\} \cap \{U > 0.2\} \cap \{U > 0.1\}) = 0.504$.

16. *a*) $c = 3/2$.

b)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2}$$

c) $\mathbb{P}(X < -1) = 0 = \mathbb{P}(X < 0), \quad \mathbb{P}(X < 1) = 1$

d) $\mathbb{P}(X \le 1/2) = 0.1875$

e) $\mathbb{P}(X > 0.5 \mid X > 0.25) = 0.8455$.

17. *d)*

18. *a*) $c = 1$.

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/2 & 0 < x \le 1 \\ x/2 & 1 < x \le 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(0.5 < X \le 1.5) = 0.625$.

d) $\binom{5}{3}(0.625)^3(1-0.625)^{5-3}$.

19. *a*)

$$F_X(x) = 1 - (1/2)^x$$

b) —

20.
$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x} & -\infty < x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x > 0 \end{cases}$$

21. *a*) —
b) —

22. *b*)

23. *a*) —
b)
$$f_X(x) = \frac{\theta x_0^{\theta}}{x^{\theta+1}}\mathbb{I}_{(x_0,\infty)}(x)$$
c) —

2.3. Características numéricas de una variable aleatoria. Moda, mediana, cuantiles. Momentos de una variable aleatoria. Valor esperado, varianza. Definición de coeficiente de asimetría y curtosis.

1. *a*)
$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \theta x/2 & 0 < x \leq 1 \\ \theta/2 + \frac{1}{2}(x-1) & 1 < x \leq 2 \\ \theta/2 + 1/2 + \frac{1}{2}(1-\theta)(x-2) & 2 < x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$
b) $x_{moda} \in (1,2)$. $x_{mediana} = x_{0.5} = \eta = 2 - \theta$. Luego $\eta \in (1,2)$.

2. $\eta = 1$. Es simétrica alrededor de 1.

3.
$$f_X(X) = \frac{1}{8}\mathbb{I}_{[0,2)}(x) + \frac{x}{8}\mathbb{I}_{[2,4]}(x)$$
a) —
b) $x_{0.25} = 2$, $x_{0.5} \approx 2.8284$, $x_{0.75} \approx 3.4641$, $x_1 = 4$.
c) $\mathbb{P}(2.5 \leq X \leq 4 \mid X > 2) = 0.8125$.
d) $\mu_X = 2.5833$, $\mathrm{Var}(X) = 1.1597$. Por lo tanto, $CV = 0.4168$
e) $\nu_3(X) = -0.743055$, $\nu_4(X) = 2.539216$.

4. Moda: 0. Mediana $= 0.6931$. Rango intercuartílico: $x_{0.75} - x_{0.25} = 1.0986$.

5. $x_{0.7} = \frac{\theta}{0.3^{1/\alpha}}$, $x_{0.3} = \frac{\theta}{0.7^{1/\alpha}}$, $x_{0.7} - x_{0.3} = \theta\left(\frac{1}{0.3^{1/\alpha}} - \frac{1}{0.7^{1/\alpha}}\right)$.

6.
$$f_X(x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}\mathbb{I}_{\{0,\ldots,4\}}(x), \quad \text{Moda: } 2, \quad \text{Mediana: } x_{0.5} \in (1,2)$$

7. *a*) —
b) $\mathbb{E}[X] = \frac{2n+1}{3}$.

8. *a*) La moda es 4.

   b) La mediana está en el intervalo $(3,4)$. Si se interpola linealmente, la mediana es 3.546.
   c) $\mu_N = 4.5769$.
   d) $\sigma_N = \sqrt{6.1672} = 2.4834$.
   e) $\mathbb{P}(|N - \mu_N| \leq 2) = 0.6153$.

9. $$f_X(x) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \mathbb{I}_{\{1,\ldots\}}(x), \qquad \mathbb{E}[X] = 6$$

10. $\mathbb{E}[X] = \frac{56}{30} = 1.8666$, $\mathrm{Var}(X) = 3.3154$.

11. Considere $X =$ Ganancia del juego. $S_X = \{-1.0, 1.1\}$.
   a) $\mathbb{E}[X] = -\frac{1}{15} = -0.0666$.
   b) $\mathrm{Var}(X) = 1.088$.

12. *c)*

13. —

14. —

15. $\mathbb{E}[(X - \mu_X)^4] = 0.0125$, $\sigma_X^2 = 0.08333$. Luego $\nu_4(X) = 1.8$.

16. *a)* $\mathbb{E}[X] = 5, \quad \mathrm{Var}(X) = 8.333$.
   b) $\nu_3(X) = 0, \quad \nu_4(X) = 1.8$.

17. *a)* $\mu_T = 4, \sigma_T^2 = 16$.
   b) $\mathbb{E}[(T-4)^3] = 128$, $\mathbb{E}[(T-4)^4] = 2304$. Así, $\nu_3(T) = 2$, $\nu_4(T) = 9$.
   c) $CV = 1$.
   d) $t_{0.25} = 1.1507$, $t_{0.75} = 5.5451$.
   e) $\mathbb{P}(T > 4 \mid T \geq 2) = 0.606$.
   f) —

18. Tome a consideración la definición de Y y desarrolle. Es decir, $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(\frac{T-4}{4})] = 0$. Aplique un razonamiento similar para los demás momentos centrales.

19. *a)* $\nu_3(X) = -0.5656 < 0$, está sesgada a la izquierda.
   b) $\nu_3(X) = 0$, está insesgada.
   c) $\nu_3(X) = 0.5656$, está sesgada a la derecha.

20. *a)* $\nu_4(X) = 1.8$.
   b) $\nu_4(X) = 15/7 \approx 2.142857$.

21. $a = 20,\ b = 0.8$.

22. *a)* $$\mathbb{E}[(X-c)^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2 - 2c\mu_X + c^2$$
   b) Para que se cumpla $\frac{\partial}{\partial c}(\mathbb{E}[(X-c)^2]) = 0$, debe ser que $c = \mu_X$.

23. *a)* $\mu_Y = 10,\ \eta = 6.9314$.
   b) $\sigma = \sqrt{100} = 10$, $y_{0.75} = 13.8629$, $y_{0.25} = 2.8768$. Por lo tanto, $y_{0.75} - y_{0.25} = 10.986$.
   c) $y_{0.9} = 23.025$.
   d) $\mathbb{P}(Y > \mu_Y + \sigma_Y) = 0.1353$.

2.4. Propiedades del valor esperado y varianza. Desigualdad de Chebyshev y de Jensen.

1. —
2. $\mathbb{E}[W] = a\sigma_X^2 + \mu_x(a\mu_X - b) + c$
3. —
4. *a*) $\mathbb{E}[(X+2)^2] = 14$.
   b) $V(4X+3) = 80$.
5. *a*) Falsa. Considere $X \sim Be(1/2)$ y $Y = 2 + X$. Calcule varianzas.
   b) Verdadera.
   c) Verdadera.
   d) Verdadera.
6. $\dfrac{\sigma_X}{\mu_X} = \dfrac{\frac{c\sqrt{k+1}}{(k+2)\sqrt{k+3}}}{\frac{c(k+1)}{k+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(k+1)(k+3)}}$
7. $\mathbb{E}[Y]$ es mayor o igual. (*Sugerencia:* considere la función convexa e^x y aplique desigualdad de Jensen).
8. $\mathbb{P}(|X| \leq v) \geq \frac{2}{3}$.
9. $\mathbb{P}(|X - 15| \geq 5) \leq 0.36$.
10. $\mathbb{P}(|X - 0.5| > \sqrt{1/12}) = 0.4226 \leq 1, \quad \mathbb{P}(|X - 0.5| > 2\sqrt{1/12}) = 0 \leq 0.25$.
11. *a*) $15625 \leq \mathbb{E}[X^3]$.
    b) $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq 5$.
    c) $\mathbb{E}[\ln(X)] \leq 3.2188$.
    d) $\mathbb{E}[e^{-X}] \geq 1.388\text{x}10^{-11}$.
12. *a*) $\mathbb{E}[X] = 0, \quad V(X) = 0.11111$.
    b) $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq 1) = \frac{1}{9} \leq \frac{1}{9}$.

2.5. Función Generadora de Momentos.

1. *a*) $\mu_U = 0.5$, $\sigma_U^2 = 0.25$.
   b) $\mathbb{E}\left[\dfrac{(U-\mu)^3}{(\sigma^2)^{3/2}}\right] = 2$. Por tanto U no es simétrica.
2. $M_X(t) = (1 - 5t)^{-1}$. Entonces, $\mathbb{E}\left[\dfrac{(X-\mu)^3}{(\sigma^2)^{3/2}}\right] = 2$ y $\mathbb{E}\left[\dfrac{(X-\mu)^4}{(\sigma^2)^2}\right] = 9$.
3. *a*) $\mu_Y = 0.75$, $\sigma_Y^2 = 0.1875$.
   b) $\mathbb{E}\left[\dfrac{(Y-\mu)^3}{(\sigma^2)^{3/2}}\right] = 1.1547$. No es simétrica. La distribución está sesgada a la derecha.
   c) $\mathbb{E}[e^{tW}] = e^{-2t}M_Y(6t) = e^{-2t}(1 - 1.5t)^{-3}$.
   d) $\mu_W = 2.5$, $\sigma_W^2 = 6.75$.

4. $a = 3,\ b = 1.$

5. —

6. *a*) $\mathbb{E}[e^{3Y/2}] = 2/5.$
   b) $M_Y(t) = (1+t)^{-1}.$
   c) $\mathrm{Var}(Y) = 1.$

2.6. Distribución de una función de una variable aleatoria. Método de la función de distribución. Método de Cambio de Variable.

1. $V \sim \mathrm{Unif}(a, a+b).$

2. *a*) $f_Y(y) = \mathbb{I}_{(0,1)}(y).$
   b) $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}\mathbb{I}_{(1,2)}(y).$
   c) $f_Y(y) = \frac{1}{2y^2}\mathbb{I}_{(1/2,\infty)}(y).$

3.
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi|A|\sqrt{1-\frac{y^2}{A^2}}}\mathbb{I}_{\{y\in\mathbb{R}:y\leq|A|\}}(y)$$

4.
$$f(y) = \frac{1}{2^{1/2}\sqrt{\pi}}\,y^{-1/2}e^{-y/2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$$

5. *a*)
$$f_{U_1}(u) = \left(-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\right)\mathbb{I}_{(-1,1)}(u)$$
   b)
$$f_{U_2}(u) = \frac{1}{2}(1+u)\mathbb{I}_{(-1,1)}(u)$$
   c)
$$f_{U_3}(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - 1\right)\mathbb{I}_{(0,1)}(u)$$

6.
$$f_Y(y) = \frac{1}{(b-a)}\left|\frac{b}{(1+y)^2}\right|\mathbb{I}_{\left(\frac{a}{b-a},\infty\right)}(y)$$

7. $Y \sim \mathrm{Pareto}(\alpha = \lambda, \theta = c).$

8. $f(y) = \dfrac{1}{(1-y)^2}e^{-y/(1-y)}\mathbb{I}_{(0,1)}(y)$

3. Distribuciones importantes.

3.1. Distribución Binomial

1. *a*) —
   b) $\mathbb{E}[Y] = nq,\ \mathrm{Var}(Y) = npq.$
   c) El número de fracasos en n ensayos Bernoulli.

2. *a*) $n = 5,\ p = 0.4,$ por lo que $\mathbb{P}(X = 3) = 0.2304.$
   b) $\mathbb{E}[X] = 2.$

3. *a*) Sea X el número de asistentes de 25 que reflejan las creencias del gerente. Como $n = 25$, $p = 0.8$ se tiene que $\mathbb{P}(X = 22) = 0.1357$.
   b) Considere $\mathrm{Bin}(100, 0.08) \approx \mathrm{Po}(8.0)$. Sea Y el número de personas que lo consideran costoso. $\mathbb{P}(Y > 6) = 0.6866$.

4.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 1 \mid Y \geq 1) =& 1 - \frac{\mathbb{P}(Y = 1)}{1 - \mathbb{P}(Y = 0)}\\ =& 1 - \frac{np(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)^n}\\ =& 1 - n\frac{pq^{n-1}}{1-q^n}\end{aligned}$$

5. Sea Y el número de respuestas correctas. $Y \sim$ Bin(30,0.25), luego,
$$\mathbb{P}(Y \geq 18) = 5.0083 \times 10^{-5}$$

6. $X \sim$Bin(10,0.6). Por lo tanto, $\mathbb{P}(X = 5) = 0.2006$.

7. *a*) Sea X el número de 6's. Como $X \sim$Bin(4,1/6), entonces $\mathbb{P}(X \geq 1) = 0.5177$.
   b) Sea Y el número de dobles 6's. $Y \sim$Bin(24,0.027) y por lo tanto $\mathbb{P}(Y \geq 1) = 0.4914$.

8. Tome a consideración la v. a. X y defínala como el número de vehículos de pasajeros en el día.
   $X \sim \mathrm{Bin}(25, 0.6)$. Entonces la ganancia esperada de la caseta está dada por:
$$1(25)(0.6) + 2.5(25)(0.4) = 40$$

9. Considere $X \sim \mathrm{Bin}(10, 0.6)$. $\mathbb{P}(X \geq 6) = 0.6331$.

10. Se tiene $Y \sim \mathrm{Bin}(100, 0.3)$ De manera que $\mu_Y = 30, \sigma_Y^2 = 21$

3.2. Distribución Poisson

1. *a*) Sea X el número de personas en $2m^2$. $X \sim Po(\lambda = 4)$. $\mathbb{P}(X = 0) = 0.0183$.
   b) $X \sim \mathrm{Po}(8)$, luego $\mathbb{P}(X \geq 3) = 0.986$.

2. *a*) Sea Y el número de personas que llegan a la exhibición en media hora. $\mu_Y = \lambda = 2.5$. $\mathbb{P}(Y \leq 4) = 0.8911$.
   b) Sea X el número de personas que llegan a la exhibición en una hora. $\mu_X = \lambda = 5$. $\mathbb{P}(X \geq 12) = 0.005453$.

c) $\mathbb{E}[W] = 2455$.

d) Sea Z el número de días de la semana en la que llegan más de 7 personas entre las 11:00 y las 12:00hrs. $Z \sim \text{Bin}(5, p)$. Donde $p = \mathbb{P}(X > 7) = 0.133$.
$\mathbb{P}(Z \geq 4) = 0.0014$.

3. a) —

   b) $\mathbb{E}[X^3] = \lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 1)$.

4. $\mathbb{E}[X^2] = 6$.

5. $\mathbb{E}[X] = 40$.

6. Consideremos la v. a. $X \sim \text{Bin}(n, p)$ y la v. a. $Y \sim \text{Po}(\lambda = np)$.

   a) $\mathbb{P}(X = 2) = 0.148803, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = 0.143785$.

   b) $\mathbb{P}(X = 9) = 0.315124, \quad \mathbb{P}(Y = 9) = 0.13$.

   c) $\mathbb{P}(X = 0) = 0.3486, \quad \mathbb{P}(Y = 0) = 0.3678$.

   d) $\mathbb{P}(X = 4) = 0.06606, \quad \mathbb{P}(Y = 4) = 0.072301$.

7. Sabemos que si: $n \to \infty$ y, además $p \to 0$. Una v. a. $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ se aproxima a una v. a. con distribución Poisson, es decir, $X \sim \text{Poisson}(\lambda = np)$.

   a) $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 7) = 0.6016$.

   b) $\mathbb{P}(X \geq 8) = 0.13337$.

3.3. Distribución Uniforme Continua

1. a) $\mathbb{P}(U < \frac{b+a}{2}) = 0.5$.

   b) $\mathbb{P}(U - a \geq 3(b - U)) = 0.25$.

2. a) $\mathbb{E}[C] = c_0 + 10.33c_1$.

   b) $\mathbb{P}(Y \geq 2) = 0.75$.

   c) $\mathbb{P}(Y \geq 2 \mid Y \geq 1.5) = 0.8571$.

3. a) $\mathbb{E}[A] = \pi/3 \approx 1.047$.

   b) $\mathbb{E}[(A - \pi/3)^2] \approx 0.877$.

4. $a = 3$

5. a) $X \sim \text{Unif}(-5, 5)$.

   b)
$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} \mathbb{I}_{(0,1)}(y)$$

6. El discriminante de la ecuación tiene que ser positivo para tener dos raíces reales. Entonces, $\mathbb{P}(16W^2 - 16W - 32 > 0) = 0.6$.

3.4. Distribución Gamma, Exponencial, Ji-Cuadrada χ^2

1. $\mathbb{E}[X] = 1$.

2. *a)* $\mathbb{E}[Y^r] = \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\beta^r$

   b) Si r es negativo, entonces el r-ésimo momento existe si $r > -\alpha$.

3. *a)* —

   b)

$$f_W(w) = \frac{2w^{2\alpha-1}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{w^2}{\beta}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)$$

4. $\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(N = 0) = e^{-\lambda t}$. Esto es, T se distribuye exponencial con media λ.

5. $\mathrm{Var}(X) = 8.325$

6. —

7.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta\sqrt{2\pi}}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\beta^2$$

8. Sea X la cantidad a pagar. Luego, $\mathbb{E}[X] = 1.401$.

3.5. Distribución Normal

1. *a)* —

   b) $\mathbb{E}[e^{tZ}] = e^{t^2/2}$

   c) —

2. $\sigma_X = 1.020$

3. —

4. —

5. Sea X el número de veces que aparece el 6. $X \sim \mathrm{Bin}(1000, 1/6) \longrightarrow N(166.67, 11.785^2)$. $\mathbb{P}(150 \leq X \leq 200) = 0.919$.

6. *a)* $\mathbb{P}(947 \leq Y \leq 958) = 0.406$

   b) $c = 960.5$.

7. Si $Y \sim \mathrm{Bin}(500, 0.75)$ entonces $X \sim \mathrm{N}(\mu = 375, \sigma^2 = 93.75)$. $\mathbb{P}(360 \leq X \leq 400) = 0.9343$.

8. $\sigma = 0.05102$.

9. $\mathbb{P}(\mu - 1.5\sigma \leq X \leq \mu + 1.5\sigma) = 0.86638$.

4. Distribuciones Multivariadas.

1. *a)* $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0.2$.
   b) $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1) = 0.42$.
   c) Es el evento en la que no hay manguera sin ocuparse, indistintamente del despachador al que pertenecen.

2. *a)* $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0.15$
   b) Es el evento en donde el número de clientes esperando tanto en la caja de salida común y el de la caja rápida es el mismo. $\mathbb{P}(X = Y) = 0.4$.
   c) $\mathbb{P}(X + Y = 4) = \sum_{x=0}^{4} \mathbb{P}(X = x, Y = 4 - x) = 0.17$

3. *a)* $K = \frac{3}{380000}$.
   b) $\mathbb{P}(X \leq 26, Y \leq 26) = 0.3024$.
   c) $\mathbb{P}(|X - Y| \leq 2) = 0.4004$.
   d)
   $$f_X(x) = \frac{3x^2 + 1900}{38000}$$

4. *a)* $\mathbb{P}(X \geq 3, Y \geq 3) = 1.5360\text{x}10^{-6}$.
   b) $\mathbb{P}(X \leq 7, Y \leq 7) = 0.874$.
   c)
   $$f_X(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{\{x \geq 0\}}(x) \qquad f_Y(y) = \frac{1}{(1+y)^2}\mathbb{I}_{\{y \geq 0\}}(y)$$

5. *a)*
   $$f_{XY}(x, y) = \mathbb{I}_{[5,6]}(x)\mathbb{I}_{[5,6]}(y)$$
   b) $\mathbb{P}(0.25 \leq X \leq 0.75, 0.25 \leq Y \leq 0.75) = 0.25$.
   c) $\mathbb{P}(|X - Y| \leq \frac{1}{6}) = \frac{2}{6}$.

6. $\mathbb{E}[X + Y] = 14.1$.

7. *a)* $\mathbb{E}[|X - Y|] = 0.25$.
   b) $\mathbb{E}[XY] = 0.5$.
   c) $\mathbb{E}[X] = 0.75, \mathbb{E}[Y] = 2/3$.

8. $\mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_7] = 7\mu$.

9. *a)* —
   b) —

10. $\mathbb{E}[(X - Y)^2] = 2\sigma^2$.

11. $\text{cov}(X + Y, X - Y) = 0$.

12. $\text{cov}(X, Y) = \lambda$.

13. $\text{cov}(X, Y) = 0.125$.

14.
   $$\mathbb{E}[X_1] = 1, \quad V(X_2) = 0.5, \quad \text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{6}$$

15. *a)* $M_X(t) = e^t(0.6 + 0.4e^t)$.

    b) X e Y no son independientes. Nótese que $f(1,1) \neq f_X(1) \cdot f_Y(1)$.

    c) $\mathbb{E}\left[\frac{Y}{X}\right] = 0.74$.

16. $\mu_Y = c\mu_X,\ \sigma_Y^2 = c\mu_X + c\sigma_X^2$

17. Si $X = \tan(U)$, entonces $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathbb{I}_{(-\infty,\infty)}(x)$.

18. $f_X(x) = e^{-x},$ por lo que $X \sim$Exp(1).

19. *a)*

$$f_{TW}(t,w) = \frac{\lambda^2\, t\, e^{-\lambda t}}{(w+1)^2}\mathbb{I}_{\{t\geq 0, w\geq 0\}}(t,w)$$

    b)

$$f_T(t) = \lambda^2\, t\, e^{-\lambda t}\mathbb{I}_{\{t\geq 0\}}(t), \qquad f_W(w) = \frac{1}{(w+1)^2}\mathbb{I}_{\{w\geq 0\}}(w)$$

20.

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{\lambda^{a+b}\, z^{a+b-1}\, w^{a-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)(1+w)^{a+b}}\, e^{-\lambda z}\ \mathbb{I}_{\{w\geq 0, z\geq 0\}}(w,z)$$

21. $Y \sim \mathrm{N}(-1, 19/6)$. $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 0.2871$, $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 1) = 0.3694$

5. Distribución Normal Multivariada.

1. *a*) $\rho = -\frac{1}{2}$.
   b) $\sigma_{XY} = -50$.
   c) $(X \mid Y = y) \sim \mathrm{N}(50 - \frac{1}{2}(y-25), 75)$.
   d) Si $Y = 30$, entonces $(X \mid Y = 30) \sim \mathrm{N}(47.5, 75)$. Luego, $\mathbb{P}(X > 55 \mid Y = 30) = 0.1932$

2. *a*) $c = 1/2\pi$.
   b) Son independientes.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

   c) El vector $\underline{X} \sim \mathrm{N}_2(\underline{\mu}, \Sigma)$, donde

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Defina $\underline{V} = (X + 2Y, 3X + 4Z, 5Y + 6Z)^{\mathrm{T}}$. Entonces

$$M_{\underline{V}}(\underline{t}) = \exp\left\{2.5t_1^2 + 3t_1t_2 + 10t_1t_3 + 12.5t_2^2 + 24t_2t_3 + 30.5t_3^2\right\}$$

4. $c = \rho\sigma_Y/\sigma_X$.

5. *a*) $\mathbb{P}(Y > 22) = 0.252$.
   b) $V(X + Y) = 13.9$.
   c) $\mathbb{P}(X > 5 \mid Y = 15) = 0.916$

6. U_1, U_2 sí son independientes. $(U_1, U_2) \sim \mathrm{N}(\underline{\mu}, \Sigma)$, donde

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Considere a R como la v. a. que denota el rendimiento total del portafolio. $R \sim \mathrm{N}(0.153, 1.4584)$, luego, $\mathbb{P}(R > 0.25) = 0.467$.