Cálculo de Probabilidades II

Cuaderno de Ejercicios

Ernesto Barrios Z. Paulina Chambon A.

6 de enero de 2025

Versión 1.26

Índice

Prefacio

Los ejercicios en este documento consisten en problemas teóricos y de cálculo de probabilidades seleccionados de varios textos para apoyar el curso de Cálculo de Probabilidades II impartido en ITAM.

La mayoría de los problemas tienen la referencia a los libros de donde fueron tomados. La ficha bibliográfica completa se incluye al final del documento. Aquellos que no tienen referencia es porque no recordamos de dónde fueron extraídos o bien son de nuestra autoría.

Al final de los problemas se han incluido las respuestas y en algunos casos ayudas en la solución de los mismos.

Cualquier comentario y/o sugerencia será bienvenido. Diríjalo a Ernesto Barrios `<ebarrios at itam.mx>`.

Ciudad de México, 18 de enero de 2022

1. Vectores Aleatorios Bivariados

1. ((León-García 1994) Ej. 4.1) Para los siguientes vectores aleatorios bivariados $\mathbf{X} = (X, Y)$, bosqueje la región del plano que corresponda a los siguientes eventos.

   a) $\{X - Y \leq 2\}$ *b*) $\{e^X < 6\}$ *c*) $\{\text{máx}(X, Y) < 6\}$
   d) $\{|X - Y| \leq 2\}$ *e*) $\{|X| > |Y|\}$ *f*) $\{X/Y < 1\}$
   g) $\{X^2 \leq Y\}$ *h*) $\{XY \leq 2\}$ *i*) $\{\text{máx}(|X|, |Y|) \leq 3\}$

2. ((León-García 1994) Ej. 4.5) Considere las siguientes funciones de probabilidad conjunta.

i)

	X		
Y	-1	0	1
-1	$1/6$	0	$1/6$
0	0	$1/3$	0
1	$1/6$	0	$1/6$

ii)

	X		
Y	-1	0	1
-1	$1/9$	$1/9$	$1/9$
0	$1/9$	$1/9$	$1/9$
1	$1/9$	$1/9$	$1/9$

iii)

	X		
Y	-1	0	1
-1	0	0	$1/3$
0	0	$1/3$	0
1	$1/3$	0	0

   a) En cada caso determine las *f. m. p.*'s marginales de las variables aleatorias X y Y.

   b) Encuentre la probabilidad de los eventos: $A = \{X \leq 0\}$, $B = \{X \leq Y\}$, $C = \{X = -Y\}$.

3. ((León-García 1994) Ej. 4.9) Sean X y Y las señales de 2 antenas. El vector aleatorio (X, Y) tiene la siguiente *f. d. p.* conjunta

$$f(x, y) = axe^{-ax^2/2} bye^{-by^2/2} \mathbb{1}_{\{0<x<\infty,\ 0<y<\infty\}}(x, y), \quad \text{con} \quad a, b > 0$$

   a) Encuentre la *f. p. a.* conjunta $F_{X,Y}$.

   b) Encuentre $\mathbb{P}(X > Y)$.

   c) Encuentre las *f. d. p.* marginales f_X y f_Y.

4. ¿Son independientes las *v. a.´s* del problema anterior?

5. ((León-García 1994) Ej. 4.11) Considere las regiones mostradas en la figura 1.

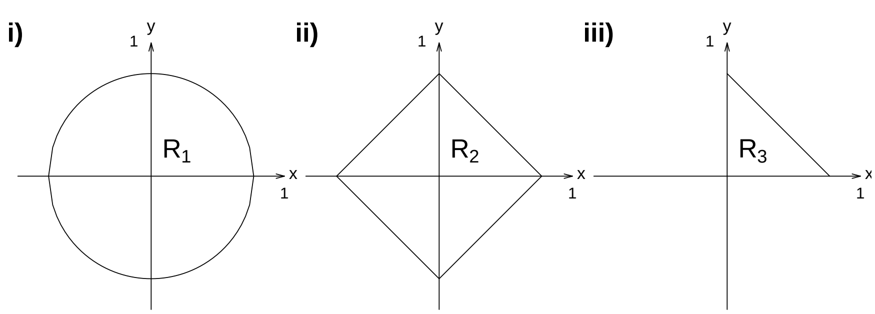


Figura 1: Regiones con distribución uniforme definidas.

En cada caso, el vector aleatorio (X, Y) es uniformemente distribuido. Esto es, $f(x, y) = k$, en las regiones mostradas y 0 en cualquier otra parte.

a) Para cada una de las regiones encuentre el valor de k.

b) Encuentre las *f. d. p.* marginal de X y Y en cada caso.

6. ¿Son independientes las *v. a.*'s del problema anterior?

7. ((León-García 1994) Ej. 4.23) Sean X y Y *v. a.*'s independientes. Encuentre una expresión en términos de las *f. p. a.* F_X y F_Y para la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) $\{a \leq X \leq b\} \cap \{Y \leq d\}$; *b*) $\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}$; *c*) $\{|X| \geq a\} \cap \{c \leq Y \leq d\}$

8. Considere el vector aleatorio discreto (X, Y) con función masa de probabilidad conjunta
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda} p^x (1-p)^{y-x}}{x!(y-x)!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \mathbb{1}_{\{x,x+1,\dots\}}(y)$$

   a) En un plano cartesiano describa gráficamente el soporte de la distribución conjunta.

   b) Encuentre las funciones masa de probabilidad marginal f_X y f_Y.

   c) Determine $\mathbb{P}(X = Y)$.

9. Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) conjunta dada por
$$f(x_1, x_2) = x_1 \mathbb{1}_T(x_1, x_2)$$
donde T es el triángulo determinado por los vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$. Responda los siguientes incisos:

   a) Sea $F(x_1, x_2)$ la función de probabilidad acumulada del vector. Calcule $F(0.5, 0.7)$.

   b) Determine f_1, la *f. d. p.* marginal de X_1.

   c) ¿Son X_1 y X_2 estocásticamente independientes? Justifique su respuesta.

10. Considere las *v. a.*'s continuas X y Y con la función de densidad conjunta f dada por
$$f(x, y) = \frac{g(x)g(y)}{G(x)} \mathbb{1}_{\{-\infty<y<x<\infty\}}(x, y)$$
donde $G(u)$ es la función de distribución tal que $g(u) = \frac{dG(u)}{du}$. Muestre que las *f. d. p.*'s de X y Y son respectivamente $f_X(x) = g(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$ y $f_Y(y) = -g(y)\log G(y)\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$. Verifique que f_Y es una *f. d. p.* legítima.

11. ((Casella and Berger 2002) Ej. 4.6) Dos personas A y B deciden encontrarse en un lugar predefinido entre la 1 y las 2 de la tarde. Suponga que llegarán al sitio aleatoriamente y de manera independiente durante los 60 minutos. Encuentre la distribución del tiempo (aleatorio) T que A esperará a B.

   a) Encuentre F_T, la *f. p. a.* del tiempo de espera de A. (Si B llega antes que A defina el tiempo de espera como 0.)

   b) Determine f_T, la correspondiente *f. d. p.*, indicando claramente el soporte de la distribución.

12. Calcular la probabilidad de que la matriz
$$\Delta = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ B & A & C \\ 0 & B & A \end{pmatrix}$$
con entradas A, B y C, *v.a.i.i.d.*'s con distribución común unif$(-1, 1)$ tenga todos sus valores propios reales.

2. Distribuciones Condicionales

1. ((León-García 1994) Ej. 4.17) Sea X la entrada a un canal de comunicación. X toma los valores ± 1 con la misma probabilidad. Suponga que la salida de el canal es $Y = X + W$, donde W es una *v. a.* **Laplaciana** parámetro $\alpha > 0$, con *f. d. p.*:

$$f_W(w) = \frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha|w|}, \quad -\infty < w < \infty$$

   y además W es independiente de X.

   a) Encuentre $\mathbb{P}(X = k, Y \leq y)$, para $k = \pm 1$.

   b) Encuentre la función de densidad marginal de Y.

   c) Suponga por dado que $Y > 0$. ¿Qué es más probable, $X = 1$ ó $X = -1$?

2. ((León-García 1994) Ej. 4.32) Encuentre $f(y|x)$ del problema 5 de la Lista 1, para cada uno los casos *i) — iii)*.

3. Sea f la función de densidad conjunta de X e Y dada por $f(x, y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\{0<x<y<\infty\}}(x, y)$. Verifique que $\mathbb{P}(X > 2|Y < 4) = 0.0885$

4. ((León-García 1994) ej. 4.22) El número total de defectos X en un chip sigue una distribución de Poisson parámetro α ($= \mathbb{E}[X]$). Suponga que cada defecto tiene una probabilidad $0 < p < 1$ de caer en una región específica R, y que la localización es independiente del número de defectos. Muestre que la *f. m. p.* de N, el número de defectos en R, sigue una distribución Poisson con media αp.

5. ((León-García 1994) ej. 4.23) El número de clientes que llegan a un servicio al tiempo t se distribuye Poisson con media βt. El tiempo de servicio T se distribuye exponencial parámetro α, esto es, $\mathbb{E}[T] = 1/\alpha$. Encuentre la *f. m. p.* de N, el número de clientes que arriban en T, el tiempo de servicio de un cliente específico.

6. Si $X \sim \text{Bin}(n, p)$ y $P \sim \text{unif}(0, 1)$. Encontrar $f_X(x)$. (Sugerencia: revise la distribución Beta.)

7. Sea Y una *v. a.* distribuida exponencialmente con valor medio $1/\lambda$. A su vez, Λ se distribuye exponencialmente con valor medio $1/\theta$. Encuentre f_Y, la *f. d. p.* marginal de Y.

8. ((León-García 1994) ej. 4.24) Sea $X \sim \text{unif}[0, 1]$, y $Y \sim \text{unif}[0, X]$. Encuentre $\mathbb{E}[Y]$ y $\text{var}(Y)$.

9. ((León-García 1994) Ej. 4.37) El número aleatorio de defectos N del banco de memoria de una computadora se distribuye con una ley de *Poisson* con una media $\lambda(> 0)$. A su vez, el parámetro $\Lambda(= \lambda)$ es aleatorio y sigue una distribución *gamma* con parámetros de forma $\alpha(> 0)$ y de escala $\beta(> 0)$, luego, $\mathbb{E}[\Lambda] = \alpha\beta$.

   a) Encuentre la función masa de probabilidad de N, el número de defectos.

   b) Use la esperanza condicional para encontrar $\mathbb{E}(N)$ y $\text{var}(N)$.

10. Una tarea llega a un sistema y es atendida por el procesador C_i con probabilidad p_i, $i = 1, \ldots, n$. El tiempo aleatorio que toma el procesador en terminar la tarea es distribuido exponencialmente parámetro λ_i.

   a) Muestre que la *f. d. p.* de T, el tiempo que toma el sistema para el procesamiento de la tarea está dada por

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad 0 \leq t$$

b) Muestre entonces que

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \mathbb{P}(C = i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{var}(T) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i} \right)^2$$

11. ((León-García 1994) Ej. 4.101) El tiempo de vida Y de un dispositivo es un *v. a.* exponencial con media $1/r$. Suponga que debido a irregularidades del proceso de producción, el parámetro $R = r$ es aleatorio siguiendo una distribución Gamma con parámetros de forma α y tasa λ.

    a) Encuentre la *f. d. p.* conjunta de Y y R.

    b) Encuentre la *f. d. p.* marginal de Y.

    c) Encuentre los primeros dos momentos de Y.
    (*Sugerencia*: Utilice las propiedades de esperanza condicional. Complete la *f. d. p.* de una distribución gamma.)

12. La *f. d. p.* conjunta del vector (X, Y) es

$$f(x, y) = (x + y)\mathbb{1}_{\{0<x<1,\ 0<y<1\}}(x, y)$$

    Encuentre $\mathbb{E}[X|Y]$.

13. Se tiran tres monedas justas y se denota por X el número de águilas obtenidas. Las monedas con las que se obtuvo águila se vuelve a tirar. Sea ahora Y el número de águilas obtenidas.

    a) Tabule la *f. m. p.* conjunta de (X, Y) y use la tabla para obtener $\mathbb{E}[X + Y]$.

    b) Calcule $\mathbb{E}[Y|X]$ y úselo para obtener de manera alternativa $\mathbb{E}[X + Y]$.

14. ((Ross 2010) Ej. 7.38) Considere el *v. a.* (X, Y) con *f. d. p.* conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{2}{x} e^{-2x} \mathbb{1}_{\{0\le y\le x<\infty\}}(x, y)$$

    Determine $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$.

    Sugerencia: Note que por el teorema de Fubini, $\mathbb{E}[Y] = \int y\big[\int f(x, y)dx\big]dy = \int \big[\int yf(x, y)dy\big]dx$

15. Considere X, Y *v. a.* con *f. d. p.* conjunta dada por

$$f(x, y) = 2e^{-(x+2y)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

    Calcule $\operatorname{var}(Y|X > 3, Y > 3)$.

16. ((Blitzstein and Hwang 2014) Ej. 7.1.25) Un compañía que elabora lámparas eléctricas modela razonablemente el tiempo de vida de sus productos mediante la distribución exponencial. La compañía tiene dos líneas de producción, L_1 y L_2 con los respectivos tiempos medio de vida $\mathbb{E}[T_1] = \mu_1$ y $\mathbb{E}[T_2] = \mu_2$. La línea L_i genera una fracción p_i del total de la producción, por lo que $1 = p_1 + p_2$. Si Y denota la variable indicadora de la línea de producción L_1 y ℓ una lámpara elegida al azar, $Y(\ell) = 1$ si la lámpara se produjo en la línea L_1 ó 0 si se produjo en la línea L_2, luego, $Y \sim \text{Ber}(p_1)$.

    Sea T la variable aleatoria que denota el tiempo de vida de una lámpara.

    a) Determine la función de probabilidad acumulada F_T de T y la correspondiente función de densidad de probabilidad f_T.

    b) ¿Tiene la distribución de T la propiedad *sin memoria* de la distribución exponencial? La distribución de T se dice una *mezcla de dos exponenciales*.

    c) Dado $T = t$, determine la distribución condicional de Y.

    d) Si supone que $\mu_1 > \mu_2$, determine $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(Y = 1|t = t)$.

3. Medias, varianzas y covarianzas. Mezclas

1. ((Ross 2010) ej. 7.4c)

   Sean X y Y *v. a.*'s con varianzas finitas σ_X^2 y σ_Y^2, respectivamente. Entonces

   $$0 \leq \text{var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = \frac{\text{var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\text{var}(Y)}{\sigma_Y^2} + 2\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 2[1 + \rho_{XY}]$$

   Por lo que $-1 \leq \rho_{XY}$. Considere ahora

   $$0 \leq \text{var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right)$$

   y elabore un argumento como el anterior para mostrar que $\rho_{XY} \leq 1$. Concluya que

   $$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

2. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 4.20) Sean X_1, X_2, X_3 *v. a.* independientes con varianzas finitas $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$, respectivamente. Encuentre la correlación entre $X_1 - X_2$ y $X_2 + X_3$.

3. Suponga una urna con tres bolas numeradas $1, 2, 3$. Dos bolas son seleccionadas de la urna *sin reemplazo*. Sea X el número de la primer bola y Y el número de la segunda bola. Determine $\text{cov}(X,Y)$ y $\text{corr}(Y,X)$.

4. Sea $U = a + bX$, $V = c + dY$. Muestre entonces que $|\rho_{XY}| = |\rho_{UV}|$.

5. ((Ross 2010) Ej. 7.38) Considere el *v. a.* (X,Y) con *f. d. p.* conjunta dada por

   $$f(x,y) = \frac{2}{x} e^{-2x} \mathbb{1}_{\{0 \leq y \leq x < \infty\}}(x,y)$$

   Determine $\text{cov}(X,Y)$.

6. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 4.19) Sean a_i y b_j constantes, X_i y Y_j *v. a.* con $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. Entonces, muestre que

   $$\text{cov}(\sum_{i=1}^m a_i X_i, \sum_{j=1}^n b_j Y_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \text{cov}(X_i, Y_j)$$

7. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) ej. 5.27) Sea $W = \sum_{i=1}^N X_i$, donde las X_i's son *v.a.i.i.d.* con *f. d. p.* dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. N es una *v. a.* independiente de las X_i's y que toma valores 1, 2 ó 3, cada uno con la misma probabilidad de 1/3. Encuentre $\text{var}(W)$.

8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con media μ y varianza σ^2 finita. Se definen la **media muestral** ($\bar{X}$) y la **varianza muestral** (S^2) por

   $$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

   respectivamente.

   a) Muestre que $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mu$ y $\text{var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$.
   b) Verifique que $\text{var}(X_1 - \bar{X}) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$.
   c) Muestre que $\mathbb{E}[S^2] = \sigma^2$. (*Sugerencia*: Sume y reste μ dentro del paréntesis de S^2.)

9. ((Ross 2010) ej. 7.4e) Sean $X_1, \dots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con varianza σ_X^2 finita. Muestre que

$$\mathrm{cov}(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

10. Suponga que el número de clientes de un cajero automático en cierto intervalo de tiempo puede aproximarse mediante una distribución Poisson con media 15.3. Por otro lado, se sabe que independientemente de la cantidad de clientes, la cantidad que extrae cada uno de ellos puede modelarse como variables aleatorias con media de \$1400 y desviación estándar de \$225. Determine la media y desviación estándar de cantidad total extraída en ese intervalo de tiempo.

11. Considere el *v. a.* (X_1, X_2) con *f. p.* conjunta dada por:

$x_1 \backslash x_2$	0	1
-1	.24	.06
0	.16	.14
1	.40	.00

Verifique que el vector de medias y la matriz de covarianzas están dados por

$$\mu_X = \begin{bmatrix} .1 \\ .2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma_X = \begin{bmatrix} .69 & -.08 \\ -.08 & .16 \end{bmatrix}$$

Determine la **variación total** del vector X, $\mathrm{vartot}(X) = \sum \sigma_i^2$.

12. Considere el ejemplo de los *dados cargados* representados por el *v. a.* (X, Y) con *f. p.* conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{42} I_{\{x \neq y\}}(x,y) + \frac{2}{42} I_{\{x=y\}}(x,y)$$

a) Determine el vector de medias μ y la matriz de covarianzas Σ.

b) Determine la matriz de correlación R del *v. a.* (X, Y)

13. Sea X *v. a.* con vector de medias $\mu^T = (-1, 0, +1)$ y matriz de covarianzas Σ dada por

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 25 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Determine $\mathrm{vartot}(X)$.

b) Refiérase a las notas del curso. Determine entonces las matrices $V^{1/2}$ y R la matriz de correlaciones para este ejercicio.

c) Verifique que $V^{1/2} R V^{1/2} = \Sigma$.

d) Determine los *valores propios* λ_i de la matrix Σ y verifique que $\mathrm{vartot}(X) = \sum \lambda_i$.

Sugerencia: utilice un programa de cómputo para determinar los valores propios λ.

14. Para $i = 1, 2, 3$, sean X_i *v. a.* tales que $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i$ y $\mathrm{var}(X_i) = \sigma_i^2$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sigma_{ij}$. Determine la media y varianza de:

a) $X_1 + X_2 + X_3$

b) $X_1 + 2X_2 - X_3$

15. Si Σ está dado por el problema 13, determine la media y varianza para los incisos del problema anterior.

16. Considere el vector aleatorio $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)^T$ que sigue une distribución con vector de medias μ_X y matriz de covarianzas Σ_X dadas por

$$\mu_X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Sigma_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Utilice alguna aplicación como MATLAB, OCTAVE *Python* o R para responder los siguientes incisos:

a) Determine $\operatorname{vartot}(X)$, la variación total del vector X.

b) Verifique que la matriz de covarianzas Σ_X es definida positiva.

c) Encuentre la *descomposición espectral* de la matriz Σ_X. Esto es, determine una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_5\}$ tales que, $\Sigma_X = Q\,\Lambda\,Q^{\mathrm{T}}$.

d) Determine el vector de medias μ_Y y la matriz de covarianzas Σ_Y de $Y = Q^{\mathrm{T}}X$.

e) Verifique que $\operatorname{vartot}(Y)$ coincide con $\operatorname{vartot}(X)$, enonctrado en el inciso *b*.

f) ¿Cuántas componentes de Y requiere para *explicar* el 90 % de la variación de X?

17. Sean $X = (X_1, \ldots, X_m)$ y $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ dos vectores aleatorios. Se define la covarianza entre los vectores X y Y por la matriz de dimensión $m \times n$

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \big(\sigma_{ij}\big)$$

donde $\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(X_i, Y_j)$.

Considere ahora las matrices reales $A_{u\times m}$ y $B_{v\times n}$. Muestre que

$$\operatorname{cov}(AX, BY) = A\operatorname{cov}(X, Y)\,B^{\mathrm{T}}$$

18. Sea X un *v. a.* p-variado con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ y considere la matriz $A_{p\times p}$. Entonces la **forma cuadrática** $q_X = x^T A x$ tiene valor esperado dado por

$$\mathbb{E}[q_X] = \mathbb{E}[X^T A X] = \operatorname{tr}(A\Sigma) + \mu^T A \mu$$

donde $\operatorname{tr}(\cdot)$ es el operador traza. Demuestre la igualdad anterior. (*Sugerencia*: Note que q_X es un escalar y utilice las propiedades del operador traza.)

19. El número de personas N que entran en un elevador se distribuye aproximadamente como un Poisson de media $\lambda = 2.3$ ($\mathbb{P}(N \geq 10) = 0.00014$). Por otro lado, el peso W de una persona es modelado mediante una distribución Gamma con parámetros de forma y escala, $\alpha = 53$ y $\beta = 1.25$, respectivamente. Determine el valor medio y la desviación estándar con que opera (carga) el elevador por recorrido.

20. El número de personas que retira efectivo de cierto cajero automático entre las 10 y las 11 de la mañana se modela mediante una distribución binomial negativa con una media de 9.7 personas con una desviación estándar de 3.9. Además se ha visto que la cantidad de efectivo que saca una persona es razonablemente modelado mediante una distribución normal centrada en \$1750 y un *rango intercuartílico* de \$600. Determine la cantidad media que se retira entre las 10 y las 11 de la mañana así como su desviación estándar.

Mezcla de distribuciones

21. ((Ross 2006), EX 7.65) El número de tormentas invernales en un *buen año* se distribuye como una ley Poisson de media 3, mientras que en un *mal año* es de 5. Si el año que entra será un *buen año* con probabilidad de 0.4, o un *mal año* con probabilidad de 0.6, encuentre la media y varianza del número de tormentas invernales que ocurrirán el próximo año.

22. ((Hogg, McKean, and Craig 2005), Ex. 3.7.1) Considere la siguiente mezcla de distribuciones *loggamma* y *gamma* con probabilidad de mezcla p y $(1-p)$. Entonces, la *f. d. p.* de la mezcla está dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[\frac{1-p}{\beta_2^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}x^{\alpha_2-1}e^{-x/\beta_2}\right] I_{(0,1]}(x) \\ &+ \left[\frac{p}{\beta_1^{\alpha_1}\Gamma(\alpha_1)}(\log x)^{\alpha_1-1}x^{-(\beta_1+1)/\beta_1} + \frac{1-p}{\beta_2^{\alpha_2}\Gamma(\alpha_2)}x^{\alpha_2-1}e^{-x/\beta_2}\right] I_{(1,\infty)}(x) \end{aligned}$$

Suponga que $\beta_1 < 1/2$. Muestre entonces que el valor esperado de la mezcla está dado por

$$\mu = p(1-\beta_1)^{-\alpha_1} + (1-p)\alpha_2\beta_2$$

23. ((Hogg, McKean, and Craig 2005), Ex 3.7.4) *Una distribución sesgada con cola pesada.* Considere una *v. a.* distribuida *gamma*, $X \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$, y donde el parámetro λ es a su vez distribuido *gamma*, tal que $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Entonces, la distribución marginal o **compuesta** de X es

$$f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)} \frac{\beta^k}{(1+\beta x)^{\alpha+k}}\, x^{k-1} I_{(0,\infty)}(x) \tag{1}$$

que corresponde a la *f. d. p.* de una **distribución de Pareto generalizada**. Si $k=1$, entonces la *f. d. p.* condicional es la exponencial, y la función marginal de X es

$$f_X(x) = \alpha\beta(1+\beta x)^{-(\alpha+1)} I_{(0,\infty)}(x)$$

que corresponde a la **distribución de Pareto**. Muestre que efectivamente X tiene la la función de densidad dada por la expresión (1).

24. ((Hogg, McKean, and Craig 2005), EX 3.7.7) Sea X una *v. a.* distribuida Pareto parámetros α y β. Muestre que la correspondiente **tasa de fallos** (o **función de riesgo**) es

$$\frac{f(x)}{1-F_X(x)} = \frac{\alpha}{x+1/\beta}$$

4. Función generadora de momentos

1. Suponga X variable aleatoria (*v. a.*) con todos sus momentos finitos dados por $\mu_X^{(k)} = k!,\ k \in \mathbb{N}$. Si X tiene función generadora de momentos, encuentre la distribución de X.

2. Considere (X_1, X_2) *v. a.* con *f. g. m.* conjunta dada por

$$M(t_1,t_2) = \exp\left\{-t_2 + \frac{1}{2}t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2\right\}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Calcule, $\mathbb{E}[X_i],\ \text{var}(X_i)$ y $\text{corr}(X_1, X_2)$

3. Considere (X_1, X_2) *v. a.* con *f. g. m.* conjunta dada por

$$M_{X_1X_2}(t_1,t_2) = \left[\frac{1}{3}(e^{t_1+t_2}+1) + \frac{1}{6}(e^{t_1}+e^{t_2})\right]^2, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Calcule, $\mathbb{E}[X_1]$, $\operatorname{var}(X_2)$ y $\operatorname{cov}(X_1, X_2)$, suponiendo que éstas son finitas.

4. Sea X *v. a.* con función característica (*f. c.*) dada por $\varphi(t) = e^{i\alpha t - \beta t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ $(-\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0)$ y donde $i = \sqrt{-1}$. Identifique la *ley de probabilidades* de X y calcule $E[X^3]$.

5. ((Harris 1966) Ej. 4-4.5) Sea W *v. a.* que sigue la distribución Cauchy $(0, 1)$. Esto es, con *f. d. p.* dada por

$$f_W(w) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}, \qquad -\infty < w < \infty$$

Muestre que W no tiene *f. g. m.* $m_W(t)$ salvo para $t = 0$. Sin embargo, sí tiene la función característica $\varphi_W(t) = e^{-|t|}$, para $t \in \mathbb{R}$.

6. ((Harris 1966) Appendix 3*) Sea X *v. a.* con *f. p. a.* $F(x)$ y *f. c.* $\varphi(t)$. Entonces, $\varphi(t)$ es real si y solo si F es simétrica, en el sentido que $F(-x) = 1 - F(x)$, para todo x.

7. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ejem. 8.7) Suponga que $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Use la *f. g. m.* de X para mostrar que los momentos impares de X son cero y los pares están dados por

$$\mu_X^{(2n)} = \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{2^n(n!)}$$

8. Sea Z *v. a.* distribuida normal estándar. Verifique que $\mathbb{E}[Z^4] = 3$.

9. Sea $W = \sum_{i=1}^{N} X_i$, donde las X_i's son *v.a.i.i.d.* con *f. d. p.* dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$. N es una *v. a.* independiente de las X_i's y que toma valores 1, 2 ó 3, cada uno con la misma probabilidad de $1/3$. Encuentre la función generadora de momentos (*f. g. m.*) de W.

10. Suponga que Θ es una *v. a.* distribuida gamma parámetros α y λ, con α entero positivo, y suponga que condicionado a Θ, X sigue una distribución Poisson con parámetro Θ. Encuentre la distribución marginal de $\alpha + X$. (*Sugerencia*: encuentre la *f. g. m.* mediante la esperanza condicional. Esto es, $m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{tX}|\Theta]]$.)

Distribuciones de algunas sumas de variables aleatorias

Utilice la función característica o la función generadora de momentos y el **teorema de unicidad** para mostrar las siguientes proposiciones.

8. Sean $X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i, p)$, $i = 1, 2$, *v. a.* independientes. Entonces $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$.

9. Sean $Y_i \sim \mathrm{BinNeg}(r_i, p)$, $i = 1, 2$, *v. a.* independientes. Entonces $Y_1 + Y_2 \sim \mathrm{BinNeg}(r_1 + r_2, p)$.

10. Sean $N_i \sim \mathrm{Po}(\lambda_i)$, $i = 1, 2$, *v. a.* independientes. Entonces $N_1 + N_2 \sim \mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

11. Sean $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$, $i = 1, \ldots, n$, *v.a.i.i.d.*. Entonces $S_n \equiv X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

12. Sean $Y_i \sim \mathrm{Geom}(p)$, $i = 1, \ldots, r$, *v.a.i.i.d.*. Entonces $Y_1 + \cdots + Y_r \sim \mathrm{BinNeg}(r, p)$.

13. Sean $W_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2$, *v. a.* independientes. Entonces $W_1 + W_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.
(Con esta parametrización, α es el parámetro de forma y λ el parámetro tasa, así $W \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, entonces $\mathbb{E}[X] = \alpha/\lambda$. O bien, si el parámetro de escala es β, entones $\beta = 1/\lambda$ y $\mathbb{E}[W] = \alpha\beta$.)

14. Sean $T_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$, *v.a.i.i.d.*. Entonces $E_m \equiv T_1 + \cdots T_m \sim \text{Gamma}(m, \lambda)$, conocida también como **distribución m-Erlang de parámetro λ**.

15. Sean $U_i \sim \text{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$, *v. a.* independientes. Entonces $U_1 + U_2 \sim \text{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

16. Sean $Z_i \sim \text{N}(0, 1)$, $i = 1, \dots, n$, *v.a.i.i.d.*. Entonces $S_n \equiv \sum_1^n Z_i \sim \text{N}(0, n)$.

17. Sean $X_i \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$, *v.a.i.i.d.*. Entonces $\bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \sim \text{N}(\mu, \sigma^2/n)$.

18. Sea Z distribuida normal estándar. Calcule la *f. g. m.* (*f. c.*) de Z^2. Utilice el teorema de unicidad para mostrar que $Y = Z^2$ sigue una distribución $\text{Gamma}(\alpha = 1/2, \beta = 2)$.

19. Sea $Y \sim \text{Gamma}(\alpha = \nu/2, \beta = 2)$. Y se dice que sigue una **distribución Ji-cuadrada con ν grados de libertad** ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) y es denotada por $Y \sim \chi^2_\nu$. Muestre que si $Y_i \sim \chi^2_1$, para $i = 1, \dots, k$ *v.a.i.i.d.*, entonces $S_k = \sum_1^k Y_i \sim \chi^2_k$.

20. Sean $V_i \sim \chi^2_{\nu_i}$, $i = 1, \dots, m$, *v. a.* independientes, entonces $\sum_1^m V_i \sim \chi^2_\nu$, con $\nu = \sum_1^m \nu_i$.

21. Sean $X_i \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots n$, *v.a.i.i.d.* Entonces
$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n$$

5. Distribución Multinomial

1. ((Canavos 1984) Ej. 6.1) Sesenta personas fueron elegidas aleatoriamente y se les preguntó por marcas que compiten A, B y C. Las preferencias fueron 27, 18 y 15, respectivamente. ¿Qué tan probable es este resultado si no hay otras marcas y se supone que tienen la misma preferencia (*market share*)?

2. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 3.15) Considere que un dado honesto se lanza siete veces de manera independiente. Calcule la probabilidad (condicional) de que cada una de las caras haya salido en una ocasión si se sabe que la cara 1 salió dos veces exactamente.

3. Tres monedas honestas se lanzan 10 veces. Sea X_i el número de veces que se obtuvieron i águilas, $i = 0, 1, 2, 3$. Note que $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 10$. Calcules las siguientes probabilidades.

   a) $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4)$.
   b) $\mathbb{P}(X_1^2 < 5)$.
   c) $\mathbb{P}(X_0 + X_1 = 6)$.
   d) $\mathbb{P}(X_2 < 2 | X_1 = 5, X_0 = 3)$.

4. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 5.120) Considere una muestra con n observaciones de un lote de gran tamaño. Sea p_1 la proporción de artículos con un defecto y p_2 la proporción de artículos con más de un defecto. Luego, $0 \leq p_1 + p_2 \leq 1$. El costo de reparar el lote es $C = Y_1 + 3Y_2$, donde Y_1 y Y_2 denotan el número de artículos con uno o más de un defecto respectivamente. Si $n = 100$, $p_1 = 0.3$ y $p_2 = 0.2$, determine la media y la varianza de C.

5. ((Hogg and Craig 1978) Sec. 3.1) El caso particular de la distribución multinomial con 3 clases se conoce como la **distribución trinomial**.

   Sea p_i la probabilidad de que un objeto sea clasificado como C_i, $i = 1, 2, 3$. Entonces, $0 \leq p_i \leq 1$ y $1 = p_1 + p_2 + p_3$. Considere una muestra de tamaño n y sea X_i el número de objetos de la clase C_i, $i = 1, 2, 3$. Luego para $x_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y tales que $n = x_1 + x_2 + x_3$, donde $\binom{n}{x_1\,x_2\,x_3} = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\,x_3!}$ es el **coeficiente multinomial**.

   La función anterior es en realidad la *f. m. p.* conjunta de un vector bivariado pues la distribución queda determinada por 2 de las *v. a.*'s solamente pero se expresa más fácilmente en términos de $X = (X_1, X_2, X_3)$, que tiene como su función generadora de momentos

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3}] \\
&= \sum_{\{x_1+x_2+x_3=n\}} \binom{n}{x_1\,x_2\,x_3} (p_1 e^{t_1})^{x_1} (p_2 e^{t_2})^{x_2} (p_3 e^{t_3})^{x_3} \\
&= (p_1 e^{t_1} + p_2 e^{t_2} + p_3 e^{t_3})^n
\end{aligned}
$$

   para todo $t = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$.

   a) Utilice la *f. g. m.* para mostrar que marginalmente $X_i \sim \text{Bin}(n, p_i)$, $i = 1, 2, 3$.

   b) Concluya que X_1, X_2 y X_3 son necesariamente *v. a.*'s dependientes.

   c) Muestre que
   $$(X_2 | X_1 = x_1) \sim \text{Bin}\big(n - x_1, \frac{p_2}{1 - p_1}\big)$$

   d) Muestre que
   $$\mathbb{E}[X_3 | X_2 = x_2] = (n - x_2) \frac{p_3}{1 - p_2}$$

   e) Utilice la *f. g. m.* conjunta para mostrar que
   $$\text{corr}(X_1, X_3) = \rho_{13} = -\sqrt{\frac{p_1\, p_3}{(1 - p_1)(1 - p_3)}}$$

6. Una agencia de noticias emite por *twitter* comunicados que pueden ser clasificados como noticias. La tabla de la derecha muestra la clasificación del tipo de noticias y su correspondiente proporción del total de 100 % de notas. Considere que los comunicados que se emiten son independientes.

clase	tipo	proporción
C_1	política	0.15
C_2	gobierno	0.40
C_3	internacionales	0.10
C_4	crimen	0.09
C_5	espectáculos	0.12
C_6	otros	0.14

   a) Determine la probabilidad de que en los próximos 5 tweets hay 2 noticias de gobierno, 1 internacional y 2 de espectáculos.

   b) Calcule la probabilidad de que en los 5 tweets haya habido al menos uno de espectáculos si se sabe que 3 fueron de política.

6. Distribución Normal Multivariada

Definición : El vector bivariado $X = (X_1, X_2)^T$ con función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times \tag{2}$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \right] \right\}$$

se dice que sigue una **distribución normal bivariada** con medias μ_1 y μ_2; varianzas σ_1^2 y σ_2^2 y coeficiente de correlación ρ.

Definición : En general se dice que el vector aleatorio p-variado $X = (X_1, \ldots, X_p)^T$ con *f. d. p.* dada por

$$f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \ \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu) \right\} \tag{3}$$

sigue una **distribución normal multivariada** con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ.

Proposición : Sean X_1 y X_2 sub-vectores del vector aleatorio $X \sim \mathrm{N}_p(\mu, \Sigma)$. Esto es, si

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}_p\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \right)$$

se tiene entonces que,

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim \mathrm{N}_{p_1}(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2})$$

donde el vector de medias $\mu_{1|2}$ y la matriz de covarianzas $\Sigma_{1|2}$ están dados por

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \quad \text{ y } \quad \Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \tag{4}$$

1. La *f. d. p.* conjunta de la demanda aleatoria de dos productos, X e Y, es una normal bivariada dada por

   $$f(x, y) = \frac{1}{100\pi\sqrt{3}} \exp\left\{ -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{x-50}{10}\right)^2 + \left(\frac{x-50}{10}\right)\left(\frac{y-25}{10}\right) + \left(\frac{y-25}{10}\right)^2 \right] \right\}$$

   a) ¿Cuál es el coeficiente de correlación entre X y Y?

   b) ¿Cuál es la covarianza entre X y Y?

   c) Determine la distribución condicional de X dado $Y = y$.

   d) Suponga que la demanda real de Y es 30. Determine entonces la probabilidad de que la demanda de X mayor a 55.

2. Suponga que el nivel de IQ (X) y la calificación promedio de cierta prueba (Y) son variables aleatorias distribuidas conjuntamente normal bivariadas con $\mu_X = 100$, $\sigma_X = 10$, $\mu_Y = 3$, $\sigma_Y = 0.3$ y $\mathrm{cov}(X, Y) = 2.25$.

a) Si el nivel de IQ de una persona es 120, ¿cuál es la media y desviación estándar de la calificación promedio de la prueba?

b) Si el nivel de IQ es 120, determine la probabilidad de que la persona tenga una calificación mayor a 3.5.

c) Suponga que una persona tuvo una calificación promedio de 2.8. ¿Cuál es la probabilidad que el IQ de esa persona sea mayor que 115?

3. ((León-García 1994) Ej. 4.76) Suponga que las *v. a.*'s X y Y tienen la *f. d. p.* conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = k \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^2 + \frac{16}{3}y^2 + \frac{8}{3}xy - 8x - 16y + 16\right]\right\}$$

a) Encuentre la constante k apropiada ($k = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}$)

b) Determine las densidades marginales de X y Y.

c) Encuentre los siguientes momentos: $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{var}(Y)$, $\mathrm{cv}(X)$, $\textsc{snr}(Y)$.
($\mathrm{cv} = \sigma/|\mu|$ denota **el coeficiente de variación** y $\textsc{snr}$=$|\mu|/\sigma$ **la relación señal-ruido**.)

d) Determine $\mathrm{cov}(X,Y)$ y $\mathrm{corr}(Y,X)$.

e) Encuentre la distribución condicional de X dado $Y = 2$ y la condicional de Y dado $X = -1$.

f) Determine $\mathbb{E}[X|Y = -1]$ y $\mathrm{var}(Y|X = 2)$.

g) Calcule nuevamente $\mathbb{E}[X]$ y $\mathrm{var}(Y)$ utilizando los momentos condicionales $\mathbb{E}[X|Y]$ y $\mathrm{var}(Y|X)$.

4. Considere el vector bivariado $X = (X_1, X_2)^T$ distribuido normalmente con función de densidad conjunta dada por (2). Muestre que la *f. d. p.* (1) se puede escribir matricialmente como la *f. d. p.* dada por (3), con

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

donde $\sigma_{11} = \sigma_1^2$, $\sigma_{22} = \sigma_2^2$ y $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$.

5. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes, tales que X_1 y X_3 se distribuyen $\mathrm{N}(1,1)$ y X_2 se distribuye $\mathrm{N}(0,1)$. Defina $Y_1 = X_1 + 2X_2$ y $Y_2 = X_2 + 3X_3$. Determine $\mathbb{P}(Y_2 > 4|Y_1 = 2)$. Exprese el resultado en términos de Φ, la función de probabilidad acumulada del la distribución normal estándar.

6. Considere $X \sim N_5(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cómo se distribuye X_5?

b) Encuentre la *f. d. p.* marginal de X_1 y la de X_4. ¿Cuál es su correlación?

c) Encuentre la distribución marginal de (X_2, X_3).

d) Muestre que X_2 y X_4 son *v. a.*'s independientes.

e) Encuentre la distribución condicional de X_4 dado $X_1 = -2$.

f) Encuentre una matriz $A_{5\times 5}$ tal que el *v. a.* $Y = AX$ tenga componentes independientes.

g) Verifique que $\text{vartot}(X) = \text{vartot}(Y)$.

h) Para cada una de las entradas del vector Y calcule su participación proporcional en la variación total, esto es $\delta_i = \text{var}(Y_i)/\text{vartot}(Y)$. Determine la proporción acumulada $\Delta_j = \delta_1 + \cdots + \delta_j$ hasta la componente j-ésima para $1 \leq j \leq 5$.

7. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes normalmente distribuidas, $X_i \sim \text{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$; $i = 1, 2$ que representan las ventas de dos tiendas de departamentos ubicadas en ciudades diferentes. Sea $Y_2 = X_1 + X_2$ la variable aleatoria que representa las ventas totales, mientras que $Y_1 = X_1$ representa las ventas de la tienda uno.

   a) Muestre que la distribución conjunta de (Y_1, Y_2) es una normal bivariada.

   b) Encuentre la distribución condicional de las ventas totales (Y_2) dado que la tienda uno tuvo ventas iguales a y_1.

8. Sea $X \sim \text{N}_3(\mu, \Sigma)$, donde

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}; \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

   a) Encuentre la distribución de $Y_1 = 3X_1 + X_2 - X_3$.

   b) Encuentre la distribución conjunta de Y_1, y $Y_2 = X_2 + X_3$.

   c) Encuentre $\mathbb{E}[X_1 X_2]$.

   d) Sea $Z = (X_1, X_3)^T$ y $X_2 = 1$. Encuentre la distribución condicional de Z dado $X_2 = 1$. Esto es, y abusando de la notación, la distribución de $(Z|X_2 = 1)$.

9. Considere el vector aleatorio $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)^T$ que sigue une distribución normal multivariada con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ dadas por

$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

   a) Determine la distribución del vector $(X_4, X_2)^T$ dado que $X_1 = 1$.

   b) Calcule en particular $\mathbb{E}[2X_2 - X_4|X_1 = 1]$ y $\text{var}(2X_2 - X_4|X_1 = 1)$.

   c) Calcule $\mathbb{P}(X_4 - X_2 > 0)$.

   d) Calcule $\mathbb{P}(X_4 - X_2 > 0|X_3 = 1, X_5 = -1)$.

10. *Suma de normales no necesariamente se distribuye normal.* Sea $X_1 \sim \text{N}(0, 1)$, y sea

$$X_2 = \begin{cases} -X_1 & -1 \leq X_1 \leq 1 \\ X_1 & \text{otra forma} \end{cases}$$

   a) Muestre que $X_2 \sim \text{N}(0, 1)$.

   b) Muestre que X_1 y X_2 no siguen conjuntamente una distribución normal bivariada. *Sugerencia*: considere $\mathbb{P}(X_2 - X_1 = 0)$ para este caso. Calcule la misma probabilidad para el caso que efectivamente (X_1, X_2) fuesen distribuidas como una normal bivariada conjunta y compare.

7. Transformaciones de variables aleatorias

1. *a*) Un cuadrado tiene un lado de longitud distribuido uniformemente en $[0, 1]$. Encuentre el área esperada del cuadrado.

   b) Un rectángulo tiene sus lados aleatorios distribuidos independientemente uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Encuentre el área del rectángulo esperada. Compárelo con el inciso anterior.

   c) Repita los dos incisos anteriores si la longitud de los lados se distribuye exponencialmente.

2. Considere un triángulo equilátero con lados de longitud ℓ.

   a) ((Hoel, Port, and Stone 1971) 5.6) Se elige un punto al azar de la base del triángulo. Sea X la distancia del punto seleccionado al vértice opuesto. Encuentre F_X, la *f. p. a.* de X.

   b) Encuentre la función de densidad de probabilidad f_X.

   c) Se elige ahora un punto al azar de cualquiera de los lados del triángulo. Encuentre la probabilidad de que la distancia del punto al vértice opuesto sea mayor que $\frac{9}{10}\ell$.

3. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.22) Sean X una *v. a.* , g una función de densidad con respecto a la integración y φ una función diferenciable estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Suponga que

$$\mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{\varphi(x)} g(z)dz, \qquad -\infty < x < \infty.$$

   Muestre que la *v. a.* $Y = \varphi(X)$ tiene función de densidad g.

4. Sea X una *v. a.* con función de distribución (*f. p. a.*) dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \ge 0$$

   Sea Y la *v. a.* definida en términos de X como $Y = m$ si $m \le X < m + 1$, donde m es un entero no negativo. ¿Cómo se distribuye Y?

5. Sea $U \sim \text{unif}(0, 1)$. Encuentre la función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) de $Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - U)$.

6. Muestre que si X se distribuye exponencialmente también lo hace cX, para $c > 0$.

7. ((Dudewicz and Mishra 1988) 5.6.2) Sea X *v. a.* con *f. d. p.* dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x)$$

   Encuentre una transformación g de manera que $Y = g(X)$ se distribuya uniformemente en $(0, 1)$.

8. Sea $Y \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, tal que $\mathbb{E}[Y] = \alpha\beta$ y $\text{var}(Y) = \alpha\beta^2$.

   a) Muestre que si $c > 0$, $cY \sim \text{Gamma}(\alpha, c\beta)$.

   b) Encuentre la *f. d. p.* de $W = \sqrt{Y}$.

   c) Si $\alpha > 1$, encuentre la *moda* de la distribución.

9. Sea $T \sim \text{Exp}(\alpha)$, con $\mathbb{E}[T] = 1/\alpha > 0$ y para $\beta > 0$ sea $W = T^{1/\beta}$. Muestre que la *f. d. p.* de W está dada por

$$f_W(w) = \alpha\beta w^{\beta-1} e^{-\alpha w^\beta} I_{(0,\infty)}(w)$$

La *v. a.* W se dice que sigue una **distribución Weibull** parámetros α y β, y en tal caso

a) $\mathbb{E}[W] = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$.

b) $\text{var}(W) = \alpha^{-2/\beta}\left[\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})\right]$.

10. Sea Θ una variable aleatoria que se distribuye uniformemente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ y sea $V = \tan\Theta$. Muestre que V sigue una **distribución de Cauchy**. Esto es,

a) $F_V(v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan v$, para todo $v \in \mathbb{R}$.

b) $f_V(v) = \frac{1}{\pi(1+v^2)} I_{(-\infty,\infty)}(v)$.

11. ((Hoel, Port, and Stone 1971) 5.31) Sea $X \sim \text{N}(0, \sigma^2)$. Encuentre la *f. d. p.* de $Y = |X|$.

12. ((Hoel, Port, and Stone 1971) 5.32) Sea $X \sim \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Encuentre la *f. d. p.* de $Y = e^X$. La densidad se conoce como **función de densidad lognormal**.

13. Sea $X \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$. Si $Y = -\ln X$, encuentre f_Y, la *f. d. p.* de la *v. a.* Y. En particular verifique que si $\alpha_1 = \lambda$ y $\alpha_2 = 1$, entonces, $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

14. Si X sigue una **distribución Beta**, ¿cómo se distribuye $1 - X$?

15. Si $f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$, encuentre la distribución de $X/(1 + X)$.

16. Si $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathbb{1}_{(-\infty,+\infty)}$, encuentre la distribución de $Y = 1/X$.

17. Sean Y_1 y Y_2 *v.a.i.i.d.* distribuidas gamma parámetros α y λ y tal que $\mathbb{E}[Y_i] = \alpha/\lambda$. Encuentre $\mathbb{E}[R^2]$, donde $R^2 = Y_1^2 + Y_2^2$.

18. ((Hogg and Craig 1978) Ejem. 4.6) Sean X_1 y X_2, *v.a.i.i.d.* con distribución común χ^2_2. Sea $Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)$ y $Y_2 = X_2$. Muestre que Y_1 sigue una **distribución Laplaciana o Doble Exponencial** con *f. d. p.* dada por

$$f(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$$

19. Sean X_1 y X_2 *v.a.i.i.d.* normal estándar. Sea $Y = (X_2 - X_1)^2/2$. Muestre que $Y \sim \text{Gamma}(1/2, 1/2) \equiv \chi^2_1$.

20. Sean X_i, $i = 1, 2$ *v. a.* independientes con $X_i \sim \text{Gamma}(n_i, \lambda)$. Encuentre la *f. d. p.* $Y_1 = X_1/(X_1 + X_2)$. (*Sugerencia*: defina $Y_2 = X_1 + X_2$ y aplique el teorema cambio de variables para vectores bivariados.)

21. ((Mood, Graybill, and Boes 1974) 5.51) Sea (X, Y) *v. a.* con *f. d. p.* conjunta dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Sea $U = e^{-(X+Y)}$. Determine la *f. d. p.* de la *v. a.* U.

22. Sean X_1 y X_2 *v.a.i.i.d.* normal estándar.

a) Encuentre la distribución conjunta de $Y_1 = (X_1 + X_2)/\sqrt{2}$ y $Y_2 = (X_1 - X_2)/\sqrt{2}$.

b) Discuta por qué $2X_1X_2$ y $(X_1^2 - X_2^2)$ tienen la misma distribución.

(*Sugerencia*: note que $\frac{1}{2}(X_1^2 - X_2^2) = \frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} = Y_1Y_2$.)

23. Si $f_{XY}(x,y) = 4xyI_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$, encuentre la *f. d. p.* conjunta de X^2 y Y^2.

24. ((Mood, Graybill, and Boes 1974) 5.52) Sean X y Y *v. a.* con *f. d. p.* conjunta dada por
$$f_{XY}(x,y) = 2e^{-(x+y)}I_{[0,y]}(x)I_{[0,\infty)}(y)$$
Encuentre la *f. d. p.* conjunta de X y $X+Y$. Encuentre las *f. d. p.* marginales de X y $X+Y$.

25. ((Mood, Graybill, and Boes 1974) 5.57) Considere
$$f_{XY|Z}(x,y|z) = [z + (1-z)(x+y)]I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$$
para $0 \le z \le 2$, y $f_Z(z) = \frac{1}{2}I_{(0,2)}(z)$.

    a) Encuentre $\mathbb{E}[X+Y]$.

    b) ¿Son X y Y independientes? Verifíquelo.

    c) ¿Son X y Z independientes? Verifíquelo.

    d) Encuentre la *f. d. p.* conjunta de X y $X+Y$

    e) Determine la distribución de $\max\{X,Y\}|Z=z$.

    f) Determine la distribución de $(X+Y)|Z=z$.

8. Sumas y cocientes de variables aleatorias

1. Sean X y Y *v.a.i.i.d.* uniformes en el intervalo $(0,1)$. Determine la *f. d. p.* de $Z = X+Y$.

2. Sean X_1 y X_2 *v. a.* distribuidas independientemente $\text{Gamma}(\alpha_i,\beta)$, $i=1,2$. Utilizando la convolución de densidades muestre que $Z = X_1 + X_2 \sim \text{Gamma}(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$.

3. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 6.10) Sean X y Y *v. a.* independientes. Encuentre la *f. d. p.* de $U = Y - X$.

4. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 6.13) Sean X y Y *v.a.i.i.d.* uniformes en el intervalo (a,b). Determine la *f. d. p.* de $|X-Y|$.

5. Sean X_1 y X_2 *v.a.i.i.d.* distribuidas $\text{N}(0,\sigma^2)$. Muestre que $W = X_1^2/X_2^2$ tiene una función de densidad dada por
$$f_W(w) = \frac{1}{\pi(1+w)\sqrt{w}}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(w)$$

6. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 6.18) Sean X y Y *v. a.* independientes. Encuentre la *f. d. p.* de $V = XY$.

7. Sean X_1 y X_2 *v.a.i.i.d.* normal estándar. Encuentre $M_W(t)$, la *f. g. m.* de $W = X_1X_2$.

8. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 6.19) Sean X y Y *v.a.i.i.d.* normal estándar. Entonces X/Y y $X/|Y|$ se distribuyen Cauchy.

9. Sean X y Y *v.a.i.i.d.* distribuidas uniformemente en el intervalo $(0,1)$. Sean $Z = XY$ y $U = X/Y$. Encuentre las *f. d. p.* marginales de Z y U. Verifique que $\mathbb{E}[X]/\mathbb{E}[Y] = 1$, mientras que $\mathbb{E}[U] \nearrow \infty$.

10. Si X y Y son *v.a.i.i.d.* normal estándar. Encuentre la densidad de $Z = |Y|/|X|$.

Distribución t de Student

11. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 7.14) Sea Z una *v. a.* distribuida normal estándar independiente de Y distribuida χ^2_ν. Entonces
$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$
sigue una distribución t con ν grados de libertad.
    a) Determine $\mathbb{E}[Z]$ y $\mathbb{E}[Z^2]$. (*Sugerencia*: recuerde que para toda *v. a.*, $\mathbb{E}[Z^2] = \operatorname{var}(Z) + \mathbb{E}[Z]^2$.)
    b) Muestre que si $Y \sim \chi^2_\nu$, entonces
    $$\mathbb{E}[Y^r] = \frac{\Gamma(\nu/2 + r)}{\Gamma(\nu/2)} 2^r, \qquad \text{para } r > -\nu/2$$
    c) Use los incisos anteriores para mostrar que
        1) $\mathbb{E}[T] = 0$, si $\nu > 1$.
        2) $\operatorname{var}(T) = \nu/(\nu - 2)$, si $\nu > 2$.

Distribución F (Snedecor-Fisher)

12. *a*) Muestre que si $Y \sim \chi^2_n$, entonces
    $$\mathbb{E}[Y^k] = \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + k)}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^k, \qquad \text{para } k > -\frac{n}{2}$$
    b) Sean $X \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \beta)$ y $Y \sim \text{Gamma}(\alpha_2, \beta)$, *v. a.*'s independientes. Entonces la *f. d. p.* de Y/X está dada por
    $$f_{Y/X}(u) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{u^{\alpha_2 - 1}}{(1 + u)^{\alpha_1 + \alpha_2}} \mathbb{1}_{(0.\infty)}(u)$$
    c) Sean Y_1 y Y_2 *v. a.*'s independientes distribuidas ji-cuadrada con n_1 y n_2 grados de libertad respectivamente. Encuentre la función de densidad de probabilidad de Y_2/Y_1. (*Sugerencia*: aplique el resultado del inciso anterior.)
    d) Muestre que si $X \sim \chi^2_m$ y $Y \sim \chi^2_n$ independientemente, entonces
    $$W = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{m,n}$$
    Esto es, la variable aleatoria W sigue la **distribución F con m y n grados de libertad**, con función de densidad dada por
    $$f_W(w) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{m}{n}\right) \frac{(\frac{m}{n} w)^{m/2 - 1}}{(1 + \frac{m}{n} w)^{(m+n)/2}} \mathbb{1}_{(0.\infty)}(w)$$
    (Recuerde que $f_{cX}(w) = \frac{1}{|c|} f_X(\frac{w}{c})$.)
    e) Muestre que $\mathbb{E}[W] = n/(n-2)$, si $n > 2$. (*Sugerencia*: exprese $W = kXY^{-1}$. Luego, por independencia de X y Y, se sigue que $\mathbb{E}[W] = k\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y^{-1}]$.)
    f) Similarmente, muestre que $\operatorname{var}(W) = \left[2n^2(m + n - 2)\right] / \left[m(n-2)^2(n-4)\right]$, si $n > 4$.
    g) Sea $W \sim F_{m,n}$, $0 < p < 1$ y denote $F(p; m, n)$ al p-ésimo percentil de la distribución de W. Esto es, $p = \mathbb{P}(W \leq F(p; m, n))$. Muestre entonces que
    $$F(p; m, n) = \frac{1}{F(1 - p; n, m)}$$

13. Muestre que si $X \sim F_{m,n}$, entonces $X^{-1} \sim F_{n,m}$.

14. Muestre que si $T \sim t_n$, entonces $T^2 \sim F_{1,n}$.

9. Estadísticos de Orden

1. Considere $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población distribuida uniformemente en el intervalo $(0, \theta)$. Considere los **estimadores** $\tilde{\theta}$ y $\hat{\theta}$ del parámetro θ dados por
$$\tilde{\theta} = 2\bar{X}, \qquad \hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$$
donde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es la **media muestral** y $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$ el n**-ésimo estadístico de orden**. Muestre que ambos son **estimadores insesgados** de θ. Es decir,
$$\mathbb{E}[\tilde{\theta}] = \theta \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

2. Considere $U_1, \ldots, U_n$ una *m. a.* de una población distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$.
   a) Muestre que el k-ésimo estadístico de orden sigue distribución Beta$(k, n-k+1)$.
   b) Encuentre la media y la varianza del k-ésimo estadístico de orden $U_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$.
   c) Encuentre $\mathbb{E}[\text{Rango}(U)] = \mathbb{E}[(U_{(n)} - U_{(1)})]$.
   d) Encuentre $\mathbb{E}[(U_{(k)} - U_{(k-1)})]$.

3. ((Tubilla 2013)) Sean $X_1, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* que siguen una ley de probabilidades exponencial con media 1. Sean $Y_i = X_{(i)}$ para $i = 1, \ldots, n$, los correspondientes estadísticos de orden. Considere ahora las *v. a.*'s W_i definidas como
$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{X_1}{n} \\ W_2 &= \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n-1} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ W_n &= \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n-1} + \cdots + \frac{X_n}{1} \end{aligned}$$
Muestre entonces que la distribución conjunta de $(W_1, \ldots, W_n)$ es la misma que la de $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

4. ((Dudewicz and Mishra 1988):5.6.6) Considere $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución **exponencial recorrida** con *f. d. p.* dada por
$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-A)/\theta} \mathbb{1}_{(A,\infty)}(x)$$
para alguna $\theta > 0$. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ los correspondientes estadísticos de orden de las X's. Muestre que Y_1, $Y_2 - Y_1$,...,$Y_n - Y_{n-1}$ son *v. a.*'s independientes.

5. ((Dudewicz and Mishra 1988):5.6.7) Considere $X_1, \ldots, X_n$ una *m. a.* de tamaño n de una distribución con *f. d. p.* dada por
$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$
para alguna $\alpha > 0$. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ los correspondientes estadísticos de orden de las X's. Muestre que Y_i/Y_{i+1}, para $i = 1, \ldots, n-1$ y Y_n son *v. a.*'s independientes.

6. Suponga que la vida útil de ciertas lámparas se distribuye exponencialmente con vida media de 100 horas. Si 10 de tales lámparas son instaladas de manera simultánea, ¿cuál es la distribución del tiempo de vida de la primer lámpara que falla? ¿Cuál su vida esperada?

7. Sean $X_1, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d.* con *f. d. p.* dada por

$$f(x) = x^{-2} I_{(1,\infty)}(x)$$

Sea $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. ¿Existe $\mathbb{E}[X_1]$? Si es así, determínelo. ¿Existe $\mathbb{E}[Y]$? Si es así, determínelo.

8. ((Ross 2010):Ej. 6.6.a) Tres personas "se distribuyen al azar" a lo largo de una milla. Encuentre la probabilidad que para ningún dos personas la distancia entre ellas sea menor que d millas, con $d \leq 1/2$.

10. Desigualdades de Probabilidad

Regla empírica. (Ref: (Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) pag. 10-11.) Para una distribución de mediciones (con media μ y desviación estándar σ) que sigue aproximadamente una distribución normal, se tiene la siguiente cobertura:

- $\mu \pm \sigma$ contiene aproximadamente el 68 % de las mediciones.
- $\mu \pm 2\sigma$ contiene aproximadamente el 95 % de las mediciones.
- $\mu \pm 3\sigma$ contiene aproximadamente el 99.7 % de las mediciones.

1. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.167) Sea Y una *v. a.* con media 11 y varianza 9. Utilice la desigualdad de Chebyshev para encontrar:

   a) Una cota inferior para $\mathbb{P}(6 < Y < 16)$.

   b) El valor de c para el cual $\mathbb{P}(|Y - 11| \geq c) \leq 0.09$.

2. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.169) *La desigualdad de Chebyshev no puede mejorarse.*

   Sea Y una variable aleatoria tal que

y	-1	0	$+1$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$1/18$	$16/18$	$1/18$

   a) Muestre que $\mu = \mathbb{E}[Y] = 0$ y $\sigma^2 = \mathrm{var}(Y) = 1/9$.

   b) Use la distribución de probabilidad para calcular $\mathbb{P}(|Y - \mu| \geq 3\sigma)$. Compare el resultado con el provisto por la desigualdad de Chebyshev y verifique que la cota se alcanza para $k = 3$.

   c) En el inciso anterior se garantiza que $\mathbb{E}[Y] = 0$ basando la distribución en los valores $-1, 0, +1$ y haciendo que $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = +1)$. La varianza fue controlada por las probabilidades asignadas a $\mathbb{P}(Y = -1)$ y $\mathbb{P}(Y = 1)$. Usando la misma idea, construya una distribución de probabilidades para la *v. a.* X y tal que $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq 2\sigma_X) = 1/4$.

   d) Si se especifica cualquier k, ¿cómo se puede construir una *v. a.* W tal que $\mathbb{P}(|W - \mu_W| \geq k\sigma_W) = 1/k^2$?

3. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.173) Una moneda balanceada es lanzada tres veces. Sea Y el número observado de águilas.

   a) Calcule la probabilidad de que Y tome los valores de $0, 1, 2$ y 3.

b) Encuentre la media y desviación estándar de Y.

c) Empleando la distribución encontrada en el primer inciso, encuentre la fracción de la población teórica que se encuentra a más de una desviación estándar de la media. Repita los cálculos para 2 desviaciones estándar. ¿Cómo se comparan los resultados con los obtenidos empleando la desigualdad de Chebyshev? ¿Cómo comparando con la distribución normal (**regla empírica**)?

4. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.147) Una máquina empleada para llenar cajas de cereales dispensa en promedio, μ onzas por caja. El empresario desea que la cantidad real dispensada Y no esté más allá de μ por una onza al menos 75 % del tiempo. ¿Cuál es el valor más grande de σ_Y que puede ser tolerado para satisfacer lo pedido por el empresario?

5. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.148) Sea Y una *v. a.* con *f. d. p.* dada por

$$f(y) = c(2-y)\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$$

Encuentre $\mathbb{P}(|Y-\mu| \leq 2\sigma)$ y compare la probabilidad con la que le ofrece la desigualdad de Chebyshev y la regla empírica.

6. ((Parzen 1960) Sec. 8.6) Sea X *v. a.* con segundo momentos finito. Se define la **razón señal-ruido** de X (SNR(X)) por

$$\mathrm{SNR}(X) = \frac{|\mu_X|}{\sigma_X}$$

a) Muestre que si $\mathrm{SNR}(X) \geq 44.7$, se tiene entonces que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu_X}{\mu_X}\right| \leq 0.10\right) \geq 0.95$$

(Sugerencia: utilice la desigualdad de Chebyshev.)

b) Si además se sabe que X se distribuye normal, entonces basta que $\mathrm{SNR}(X) \approx 19.6$.

7. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.149) Encuentre $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq k\sigma)$ donde U se distribuye uniforme en el intervalo $(0,1)$, y compare la probabilidad con la que le ofrece la desigualdad de Chebyshev, para $k = 1, 2,$ y 3.

8. ((Ross 2010) Ej. 8.20) Sea X una *v. a.* no negativa con media 25. ¿Qué puede decir de los siguientes valores esperados?

$$i)\ \mathbb{E}[X^3]; \quad ii)\ \mathbb{E}[\sqrt{X}]; \quad iii)\ \mathbb{E}[\log X]; \quad iv)\ \mathbb{E}[e^{-X}]$$

9. ((Ross 2010) Ej. 8.21) Sea X una *v. a.* no negativa. Muestre que

$$\mathbb{E}[X] \leq (\mathbb{E}[X^2])^{1/2} \leq (\mathbb{E}[X^3])^{1/3} \leq \cdots$$

10. **Desigualdades entre medias**.

- **Media aritmética**: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$
- **Media geométrica**: $\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \log x_i\right\} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$
- **Media armónica**: $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right]^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n números positivos. Muestre que siempre se cumple que

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n})} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

donde las desigualdades serán igualdades solamente si $x_1 = \cdots = x_n$. (*Sugerencia*: asigne la distribución uniforme a los valores x_i's y utilice la desigualdad de Jensen con la función cóncava logaritmo para mostrar la desigualdad entre las medias aritmética y la geométrica.)

11. ((Ross 2006) Ej. 8.19) En un lago hay 4 distintos tipos de peces. Suponga que al pescar un pez los distintos tipos son igualmente probables. Sea Y que denota el número de peces que se necesitan pescar para obtener al menos uno de cada uno.

    a) De un intervalo (a, b) tal que $\mathbb{P}(a \leq Y \leq b) \geq 0.90$.

    b) Usando la *desigualdad de Chebyshev de un lado*, ¿cuántos peces se necesitan pescar para tener al menos 90 por ciento de certeza de tener por lo menos uno de cada tipo.

    (*Sugerencia*: Defina Y_{i+1} la variable aleatoria que denota el número de peces que deben ser capturados hasta obtener el nuevo tipo de pescado habiendo ya i distintos para $i = 0, 1, 2, 3$.)

12. ((Ross 2006) Self Test 8.3) Si $\mathbb{E}[X] = 75$, $\mathbb{E}[Y] = 75$, $\text{var}(X) = 10$, $\text{var}(Y) = 12$ y $\text{cov}(X, Y) = -3$. De una cota superior para las siguientes probabilidades:

    a) $\mathbb{P}(|X - Y| > 15)$

    b) $\mathbb{P}(X > Y + 15)$

    c) $\mathbb{P}(Y > X + 15)$

13. Sea N_t en número de partículas emitidas en $[0, t]$. Suponga que $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$ para algún $\lambda > 0$. Para $\lambda = 1.7$, $t = 10$ microsegundos y $\epsilon = 1$, determine $\mathbb{P}(|N_t/t - \lambda| \geq \epsilon)$,

    a) utilizando la desigualdad de Chebyshev.

    b) utilizando la distribución exacta.

11. Ley de los Grandes Números y Teorema Central del Límite

1. ((Ross 2006) Ej. 8.2) Por experiencia, un profesor sabe que el resultado de un examen final de un estudiante es una variable aleatoria con media 75.

    a) Encuentre un cota superior para la probabilidad de que el estudiante obtenga una calificación mayor a 85. Suponga que el profesor sabe que la varianza la calificación del estudiante es 25.

    b) ¿Qué se puede decir sobre la probabilidad de que la calificación del estudiante esté entre 65 y 85?

    c) Sin usar el Teorema Central del Límite, determine cuántos estudiantes deben tomar el examen para asegurar, con probabilidad de al menos 0.90, que el promedio de la clase esté a no más de 5 unidades de 75. Esto es, $\mathbb{P}\big(|\bar{X}_n - 75| \leq 5\big) \geq 0.90$, con $\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$.

2. ((Ross 2006) Ej. 8.4) Sea $X_1, \ldots, X_{20}$ variables aleatorias independientes con *f. m. p.* distribuida Poisson con media 1.

a) Utilice la desigualdad de Markov para obtener una cota a $\mathbb{P}\left(\sum_1^{20} X_i > 15\right)$

b) Aplique el teorema central del límite para aproximar $\mathbb{P}\left(\sum_1^{20} X_i > 15\right)$

3. ((Ross 2006) Ej. 8.7) Una persona tiene 100 bombillas cuyo tiempo de vida se distribuye exponencialmente y de manera independiente con media 5 horas. Si las bombillas son usadas una por una, reemplazando inmediatamente una bombilla cada que otra falla, aproxime la probabilidad de que al menos una bombilla siga funcionando después de 525 horas.

4. ((Ross 2006) Ej. 8.9) Si X es una variable aleatoria distribuida Gamma con parámetros $(n, 1)$, aproximadamente que tan grande necesita ser n para que se cumpla que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - 1\right| > .01\right) < .01$.

5. ((Ross 2006) Ej. 8.13) Las calificaciones de los exámenes de cierto profesor tienen media 74 y desviación estándar 14. Si el profesor va a entregar dos exámenes, uno a un grupo con 25 alumnos y otro a una con 64.

   a) Aproxime la probabilidad de que el promedio de las calificaciones del grupo de 25 sea mayor a 80.

   b) Aproxime la probabilidad de que el promedio de las calificaciones del grupo grande sea mayor que las del grupo chico por más de 2.2 puntos.

6. ((Ross 2006) Self Test 8.7) Mandar a arreglar a una máquina consta de un servicio de dos pasos por separado. El tiempo del primer paso se distribuye exponencial con media 0.2 horas y el tiempo del segundo paso se distribuye exponencial con media 0.3 de manera independiente. Si una persona tiene 20 máquinas para mandar al servicio, aproxime la probabilidad de que todo el trabajo sea completado en 8 horas.

7. ((Ross 2006) Self Test 8.11) En una colección de 40 pilas cada pila es igualmente probable de ser del tipo A o del tipo B. El tipo A tienen una duración media es de 50 y desviación estándar de 15, el tipo B tiene una duración media es de 30 y desviación estándar de 6.

   a) Aproxime la probabilidad de que la vida total de las pilas sea mayor a 1700.

   b) Suponga que se sabe que 20 de las pilas son del tipo A y 20 del tipo B. Ahora aproxime la probabilidad de que la vida total de las pilas sea mayor a 1700.

8. ((Hoel, Port, and Stone 1971) EJ. 7.13) Un jugador de basquetbol sabe que en promedio él puede anotar el 60 % de sus tiros libres. ¿Cuál es la probabilidad de que en 25 intentos el anote mas de la mitad? Suponga que el número S_n de anotaciones de n tiros se distribuye binomial con parámetros n y $p = 0.6$.

9. ((Hoel, Port, and Stone 1971) EJ. 7.14) Se toma una muestra de tamaño n para determinar el porcentaje de personas que planean votar por un partido en la siguientes elecciones. Sea $X_k = 1$ si la k-ésima persona de la muestra que planea votar por ese cierto partido y $X_k = 0$ de cualquier otra manera. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ son *v.a.i.i.d.* tal que $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, y $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$. Entonces $\mu = p$ y $\sigma^2 = p(1-p)$, suponga también que p se acerca lo suficiente a 0.5 de tal forma que $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ puede ser aproximada de manera correcta por $\sigma \approx 1/2$. La variable aleatoria S_n/n denota la fracción de las personas en la muestra que planean votar por ese partido y puede usarse para estimar la verdadera probabilidad p. Utilice la aproximación normal para resolver:

   a) Suponga que $n = 900$. Encuentre la probabilidad de que $\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq .025$

b) Suponga que $n = 900$. Encuentre la c tal que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq c\right) = .01$

c) Encuentre n tal que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq 0.025\right) = .01$

10. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 7.38) Una moneda justa se lanza hasta que caen 100 soles. Encuentre la probabilidad de que al menos 226 tiros sean necesarios.

11. ((Harris 1966) Ej. 7.29) Considere $\{X_n\}$ una sucesión de ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito p. Esto es, $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$. Se define la **proporción empírica** $\hat{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Encuentre el menor entero para el cual $\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| \leq 0.01) \geq 0.95$. (Use la aproximación normal.)

12. ((Harris 1966) Ej. 7.49) Considere la proporción empírica $\hat{p}_n$. Si $p = 0.5$, utilice la desigualdad de Chebyshev para que determinar el mínimo entero n para el cual $\mathbb{P}(0.4 < \hat{p}_n < 0.6) > 0.9$.

13. ((Harris 1966) Ej. 7.50) Suponga que $p = 0.2$. Encuentre n tal que $\mathbb{P}(|\hat{p}_n - 0.2| > 0.01) < 0.05$, usando la desigualdad de Chebyshev y compárela con aquella obtenida mediante el teorema central de límite.

14. ((Harris 1966) Ej. 7.51) Encuentre n tal que $\mathbb{P}(|\hat{p}_n - p| > 0.01) < 0.05$, usando la desigualdad de Chebyshev y compárela con aquella obtenida mediante el teorema central de límite. Compare el resultado con el problema anterior.

15. ((Harris 1966) Ej. 7.52) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una *m. a.* de X con *f. d. p.* dada por $f(x) = xe^{-x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$. Usando la desigualdad de Chebyshev y el teorema central de límite encuentre n tal que $\mathbb{P}(|\bar{X} - \mu| < 0.10) \geq 0.95$.

16. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 8.8) Sea X una variable aleatoria tal que su *f. g. m.* es $M_x(t)$, finita para toda t. Utilice el mismo argumento de la demostración de la desigualdad de Chebyshev ((Hoel, Port, and Stone 1971) Sec. 4.6) para concluir que

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-tx}M_x(t)$$

para $t \geq 0$. Se sigue que

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \min_{t \geq 0}\ e^{-tx}M_x(t)$$

suponiendo que $e^{tx}M_x(t)$ tenga un mínimo en $0 \leq t \leq \infty$.

17. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 8.9) Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución gama con parámetros de *forma* α y *tasa* λ. Utilice el resultado del ejercicio anterior para probar que $\mathbb{P}(X \geq 2\alpha/\lambda) \leq (2/e)^{\alpha}$.

18. ((Harris 1966) Ej. 7.1) Usando funciones características muestre que la sucesión de distribuciones binomiales con parámetros n y p_n, tal que $np_n \to \lambda$ mientras que $n \to \infty$, converge en distribución a la distribución Poisson parámetro λ.

19. ((Harris 1966) Ej. 7.6) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en $[0, a)$. Sea $Y_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, y sea $W_n = nY_n$. Muestre que Y_n y W_n convergen en distribución y encuentre las distribuciones límite.

20. ((Harris 1966) Ej. 7.16) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución Cauchy. Muestre que $\bar{X}_n$ no tiene una distribución asintótica normal. Encuentre la distribución límite. (Considere la función característica de la distribución Cauchy(0,1) dada por $\varphi(t) = e^{-|t|}$.)

Referencias

Blitzstein, J. K. and J. Hwang (2014). *Intorduction to Probability*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Canavos, G. C. (1984). *Applied Probability and Statistical Methods*. Boston: Little, Brown and Company.

Casella, G. and R. L. Berger (2002). *Statistical Inference* (2nd ed.). Pacific Gove, CA: Duxbury.

Dudewicz, E. J. and S. N. Mishra (1988). *Modern Mathematical Statistics*. New York, N.Y.: Wiley.

Harris, B. (1966). *Theory of Probability*. Reading, MA.: Addison-Wedsley.

Hoel, P. G., S. C. Port, and C. J. Stone (1971). *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Miffling Company.

Hogg, R. V. and A. T. Craig (1978). *Introduction to Mathematical Statistics* (4 ed.). New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Hogg, R. V., J. W. McKean, and A. T. Craig (2005). *Introduction to Mathematical Statistics* (6 ed.). Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall.

León-García, A. (1994). *Probability and Random Processes for Electrical Engineering* (2 ed.). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Mood, A. M., F. A. Graybill, and D. C. Boes (1974). *Introduction to the Theory of Statistics* (3rd ed.). Singapore: McGraw-Hill.

Parzen, E. (1960). *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons.

Ross, S. (2006). *A First Course in Probability* (7th ed.). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Ross, S. (2010). *A First Course in Probability* (8th ed.). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Tubilla, A. (2013). Comunicación personal.

Wackerly, D. D., W. Mendenhall III, and R. L. Scheaffer (2008). *Mathematical Statistics with Applications* (7 ed.). Australia: Thomson.

Respuestas

1. Vectores Aleatorios Bivariados

1:1. La Figura 1 muestra el bosquejo de los eventos definidos para el vector bivariado (X, Y).

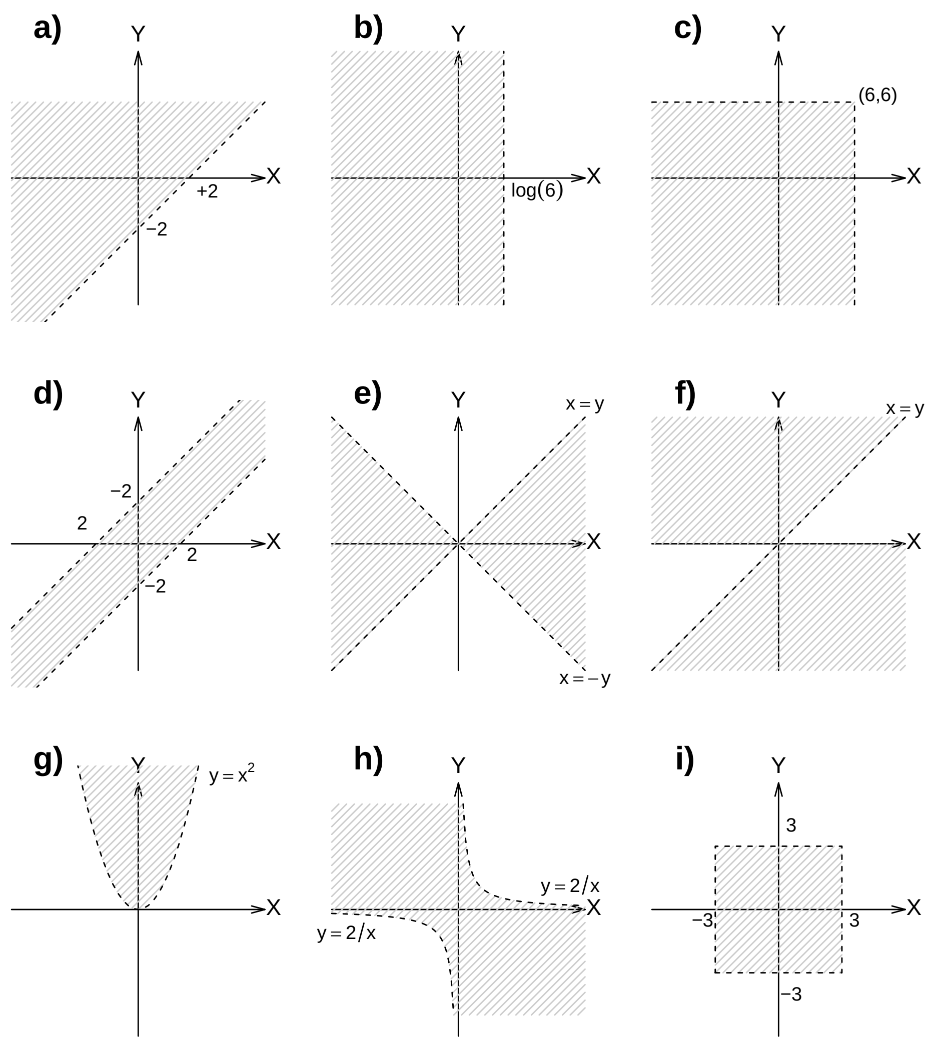


Figura 2: Representación de eventos en el vector bivariado (X, Y).

1:2. Este problema muestra que no necesariamente se puede construir la *f. m. p.* conjunta $f_{X,Y}$ a partir de las *f. m. p.* marginales f_X y f_Y.

a) Para los tres incisos *i–iii)*, las funciones masa de probabilidad marginales están dados por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & x = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1/3 & y = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

b)

$$\begin{array}{rlll} i) & \mathbb{P}(A) = 2/3, & \mathbb{P}(B) = 5/6, & \mathbb{P}(C) = 2/3 \\ ii) & \mathbb{P}(A) = 2/3, & \mathbb{P}(B) = 2/3, & \mathbb{P}(C) = 1/3 \\ iii) & \mathbb{P}(A) = 2/3, & \mathbb{P}(B) = 2/3, & \mathbb{P}(C) = 1 \end{array}$$

1:3. *a*) Para todo $x, y \geq 0$,

$$F_{X,Y}(x,y) = \left(1 - e^{-ax^2/2}\right)\left(1 - e^{-by^2/2}\right)$$

b)

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{b}{a+b}$$

c)

$$f_X(x) = axe^{-ax^2/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$
$$f_Y(x) = bye^{-by^2/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

1:4. Las *v. a.*'s X y Y del problema anterior son independientes puesto que la *f. d. p.* conjunta $f_{X,Y}$ es el producto de las marginales f_X y f_Y.

1:5. *a*)

i) $k = 1/\pi$, *ii*) $k = 1/2$, *iii*) $k = 2$

b) 1)

$$f_X(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$
$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

2)

$$f_X(x) = (x+1)\mathbb{1}_{[-1,0]}(x) + (-x+1)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$
$$f_Y(y) = (y+1)\mathbb{1}_{[-1,0)}(y) + (-y+1)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

3)

$$f_X(x) = (2-2x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$
$$f_Y(y) = (2-2y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

1:6. Las *v. a.*'s X y Y del problema anterior son dependientes pues por un lado la *f. d. p.* conjunta $f_{X,Y} = k$, mientras que por el producto de las marginales $f_X \cdot f_Y$ involucra explícitamente x y y.

1:7. *a*)

$$\mathbb{P}\left(\{a \leq X \leq b\} \cap \{Y \leq d\}\right) = \left[F_X(b) - F_X(a)\right] F_Y(d)$$

b)

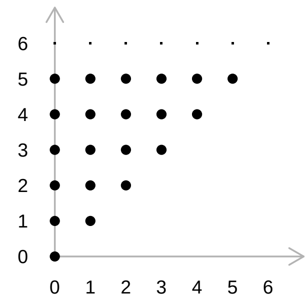
$$\mathbb{P}\left(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}\right) = \left[F_X(b) - F_X(a)\right]\left[F_Y(d) - F_Y(c)\right]$$

c) Suponiendo las *v. a.*'s continuas, $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a)$. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(\{|X| \geq a\} \cap \{c \leq Y \leq d\}\right) = \left[1 + F_X(-a) - F_X(a)\right] \cdot \left[F_Y(d) - F_Y(c)\right]$$

1:8. *a*)

La figura de la derecha muestra el soporte de la distribución, a saber, $\mathbb{S} = \{(0,0),(0,1),(1,1),\dots\}$.



b)

$$f_X(x) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(y)$$

c)

$$\mathbb{P}(X = Y) = e^{-\lambda(1-p)}$$

1:9. *a*) $F(0.5, 0.7) = 0.0417$

b) $f_1(x) = x^2\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + x(2-x)\mathbb{1}_{(1,2]}(x)$

c) X_1 y X_2 no son independientes.

1:10. —

1:11. Sea T el tiempo que espera A a B.

a)

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

b) $f_T(t) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + (1-t)\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$

1:12. $p = 1/2$.

2. Distribuciones Condicionales

2:1. *a*) Si $k = -1$,

$$\mathbb{P}(X = k, Y \leq y) = \frac{1}{4}e^{\alpha(y+1)}\mathbb{1}_{(-\infty,-1]}(y) + \frac{1}{4}\left[2 - e^{-\alpha(y+1)}\right]\mathbb{1}_{(-1,\infty)}(y)$$

Si $k = +1$,

$$\mathbb{P}(X = k, Y \leq y) = \frac{1}{4}e^{\alpha(y-1)}\mathbb{1}_{(-\infty,1]}(y) + \frac{1}{4}\left[2 - e^{-\alpha(y-1)}\right]\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$$

b) La función de probabilidad acumulada marginal de Y,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X = -1, Y \leq y) + \mathbb{P}(X = 1, Y \leq y)$$

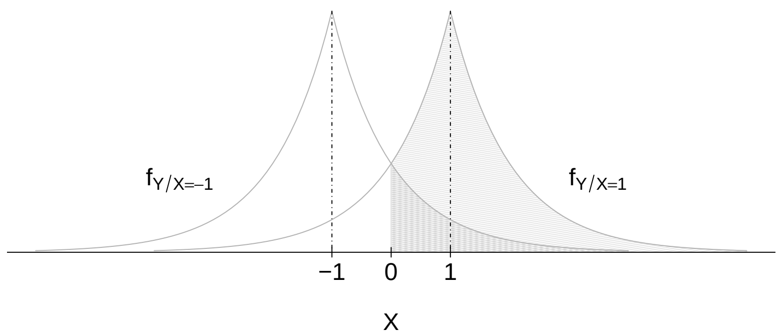


Figura 3: Funciones de densidad Laplacianas centradas en ± 1.

Luego,

$$F_y(y) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{4} e^{\alpha y}, & y \leq -1 \\ \\ \frac{1}{2} + \frac{e^{-\alpha}}{4}(e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}), & -1 < y \leq 1 \\ \\ 1 - \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{4} e^{-\alpha y}, & y > 1 \end{cases}$$

de donde,

$$f_Y(y) = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{4} \alpha e^{\alpha y} \mathbb{1}_{(-\infty,-1]}(y) + \frac{e^{-\alpha}}{4} \alpha (e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}) \mathbb{1}_{(-1,1]}(y) + \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{4} \alpha e^{-\alpha y} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$$

c)

$$\mathbb{P}(X = k|Y > 0) = \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(Y > 0)} [1 - \mathbb{P}(Y \leq 0|X = k)]$$

por lo que basta comparar $\mathbb{P}(Y \leq 0|X = k)$, para $k = \pm 1$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(X = -1|Y > 0) \leq \mathbb{P}(X = 1|Y > 0)$$

2:2. *i)* Para $0 < |x| \leq 1$,

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \; \mathbb{1}_{\{0<|y|\leq|\sqrt{1-x^2}\}}(y)$$

ii) Si $-1 \leq x \leq 0$,

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{2(1+x)} \mathbb{1}_{[-1-x,1+x]}(y)$$

Si $0 \leq x \leq -1$,

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{2(1-x)} \mathbb{1}_{[-1+x,1-x]}(y)$$

iii) Para $0 < x < 1$,

$$f_Y(y|x) = \frac{1}{1-x} \mathbb{1}_{[0,1-x]}(y)$$

2:3. —

2:4. El número de defectos en la región R se distribuye Poisson parámetro αp,

$$\mathbb{P}(N = n) = (\alpha p)^n \frac{e^{-(\alpha p)}}{n!} \; \mathbb{1}_{\{0,1,\dots\}}(n)$$

2:5. El número de clientes N que arriban durante el tiempo T de servicio de un cliente se distribuye geométricamente con parámetro $\alpha/(\alpha+\beta)$. A saber,

$$\mathbb{P}(N=n) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^n \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(n)$$

2:6. X es una *v. a.* discreta que se distribuye uniformemente en $\{0,1,\ldots,n\}$. Esto es,

$$f_X(x) = \frac{1}{n+1}\ \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

2:7.

$$f_Y(y) = \frac{\theta}{(y+\theta)^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

2:8. $\mathbb{E}[Y] = 1/4$ y $\mathrm{var}(Y) = 7/144$.

2:9. *a*)

$$f_N(n) = \binom{n+\alpha-1}{n}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots\}}(n)$$

Esto es, marginalmente la variable N sigue una distribución binomial negativa con parámetros α y $1/(1+\beta)$.

b)

$$\mathbb{E}[N] = \alpha\beta \quad \text{y} \quad \mathrm{var}(N) = \alpha\beta(1+\beta)$$

2:10. —

2:11. *a*) La *f. d. p.* conjunta del vector bivariado (Y,R) está dada por

$$f_{YR}(y,r) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, r^\alpha e^{-r(\lambda+y)}\ \mathbb{1}_{\{0\le y,r<\infty\}}(y,r)$$

b) La *f. d. p.* marginal de Y

$$f_Y(y) = \frac{\alpha}{\lambda+y}\left(\frac{\lambda}{\lambda+y}\right)^\alpha\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

c)

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\lambda}{\alpha-1} \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[Y^2] = 2\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

2:12. $\mathbb{E}[X|Y] = \dfrac{Y/2+1/3}{Y+1/2}$

2:13. *a*) La función masa de probabilidad conjunta de (X,Y) está dada por la siguiente tabla:

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y) = \frac{1}{64}\cdot \begin{array}{c|cccc|c} x\backslash y & 0 & 1 & 2 & 3 & f_X \\ \hline 0 & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & 8 \\ 1 & 12 & 12 & \cdot & \cdot & 24 \\ 2 & 6 & 12 & 6 & \cdot & 24 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ \hline f_Y & 27 & 27 & 9 & 1 & 64 \end{array}; \qquad \mathbb{E}[X+Y] = \frac{144}{64}$$

b) La esperanza condicional de Y dado $X=x$:

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \mathbb{E}[Y|X=x] & 0 & 32/64 & 64/64 & 96/64 \\ \hline f_X(x) & 8/64 & 24/64 & 24/64 & 8/64 \end{array}; \qquad \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] = \frac{48}{64}, \quad \mathbb{E}[X] = \frac{96}{64}$$

2:14. $\mathbb{E}[X] = 1/2$ y $\mathbb{E}[Y] = 1/4$.

2:15. $\mathrm{var}(Y|X > 3, Y > 3) = 1/4$.

2:16. Sean $\lambda_i = 1/\mu_i$, $i = 1, 2$.

a)

$$F_T(t) = \left[(1 - e^{-\lambda_1 t})p_1 + (1 - e^{-\lambda_2 t})p_2\right] \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$
$$f_T(t) = \left[p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\right] \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

b) La distribución no tiene la propiedad *sin memoria* de la distribución exponencial.

c)

$$\mathbb{P}(Y = y|T = t) = \frac{p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\mathbb{1}_{\{1\}}(y) + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}\mathbb{1}_{\{0\}}(y)}{p_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

d) Si $\mu_1 > \mu_2$, $P(Y = 1|t = t) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

3. Medias, varianzas y covarianzas

3:1. —

3:2. $\mathrm{cov}(X_1 - X_2, X_2 + X_3) = -\dfrac{\sigma_2^2}{\sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(\sigma_2^2 + \sigma_3^2)}}$

3:3. $\mathrm{cov}(X, Y) = -\dfrac{1}{3}$; $\quad$ $\mathrm{corr}(X, Y) = -\dfrac{1}{2}$

3:4. —

3:5. $\mathrm{cov}(X, Y) = 1/8$.

3:6. —

3:7. $\mathrm{var}(W) = \dfrac{8}{3\lambda^2}$

3:8. —

3:9. —

3:10. Sea T la cantidad total extraída. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= 15.3 \cdot 1400 = 21420.\\ \mathrm{var}(T) &= 15.3 \cdot 1400^2 + 15.3 \cdot 225^2\\ \mathrm{de}(T) &= \sqrt{15.3(1400^2 + 225^2)} = 5546.40\end{aligned}$$

3:11. $\mathrm{vartot}(X) = 0.85$.

3:12. *a)*

$$\mu = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.5 \end{bmatrix}; \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 2.917 & 0.417 \\ 0.417 & 2.917 \end{bmatrix}$$

b) $\mathrm{corr}(X, Y) = 0.1429$.

3:13. *a)* $\mathrm{vartot}(X) = 38$.

b)

$$V = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}; \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5\cdot 2} & \frac{4}{5\cdot 3} \\ -\frac{2}{5\cdot 2} & 1 & \frac{1}{2\cdot 3} \\ \frac{4}{5\cdot 3} & \frac{1}{2\cdot 3} & 1 \end{bmatrix}$$

c) Cálculo. ...

d) $\lambda = (26.078, 8.496, 3.426)$ y $\sum \lambda_i = 38$.

3:14. *a*) $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$; $\quad \mathrm{var}[X_1 + X_2 + X_3] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_{12} + \sigma_{13} + \sigma_{23})$.

b) $\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 - X_3] = \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3$; $\quad \mathrm{var}[X_1 + 2X_2 - X_3] = \sigma_1^2 + 4\sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 4\sigma_{12} - 2\sigma_{13} - 4\sigma_{23}$.

3:15. *a*) $\mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = 0$; $\quad \mathrm{var}[X_1 + X_2 + X_3] = 44$.

b) $\mathbb{E}[X_1 + 2X_2 - X_3] = -2$; $\quad \mathrm{var}[X_1 + 2X_2 - X_3] = 30$.

3:16. *a*) $\mathrm{vartot}(X) = 15$.

b) Los valores propios de la matriz Σ son todos positivos.

c) $\Sigma = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$, donde $\Lambda = \mathrm{diag}\{6.1335, 4.3598, 3.0000, 1.0981, 0.4087\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1691 & -0.2945 & 0.0000 & -0.3510 & 0.8726 \\ -0.2468 & 0.0534 & 0.5774 & 0.7302 & 0.2639 \\ 0.3106 & 0.5215 & -0.5774 & 0.3823 & 0.3900 \\ -0.5574 & -0.4680 & -0.5774 & 0.3479 & -0.1260 \\ -0.7095 & 0.6476 & -0.0000 & -0.2763 & -0.0300 \end{bmatrix}$$

d) $\mathbb{E}[Y] = (-3.8006, 0.5387, 0, 0.2148, -0.4682)^{\mathrm{T}}$ y
$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{diag}\big\{6.1335, 4.3598, 3.0000, 1.0981, 0.4087\big\}$

e) $\mathrm{vartot}(Y) = 6.1335 + 4.3598 + 3 + 1.0981 + 0.4087 = 15$.

f) La varianza relativa acumulada por las componentes de Y es: 0.4089, 0.6996, 0.8996, 0.9728 y 1.0000, por lo que con Y_1, Y_2 y Y_3 se explica el 90 % de la variación total.

3:17. —

3:18. —

3:19. Sea W la carga con la que opera el elevador. Entonces, $\mu_W = 152,4$ kg. y $\sigma_W = 101.42$ kg.

3:20. Sea T la cantidad total extraída del cajero automático. Entonces, $\mu_T = \$16975.0$ y $\sigma_T = \$6964.16$.

Mezcla de distribuciones

3:21. $\mu = 4.2$ y $\sigma^2 = 5.16$.

3:22. —

3:23. —

3:24. —

4. Función generadora de momentos

4:1. $X \sim \text{Gamma}(1, 1)$.

4:2. $\mathbb{E}[X_1] = 0$, $\mathbb{E}[X_2] = -1$, $\text{var}(X_1) = 1$, $\text{var}(X_2) = 2$ y $\text{corr}(X_1, X_2) = -1/\sqrt{2}$.

4:3.
$$\mathbb{E}[X_1] = 1; \quad \text{var}(X_2) = \frac{1}{2}; \quad \text{cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{6}$$

4:4. $\mathbb{E}[X^3] = M_X'''(0) = 6\alpha\beta + \alpha^3$.

4:5. —

4:6. Para $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$ y $\mathbb{E}[X^{2k}] = \frac{(2k)!\sigma^{2k}}{2^k k!}$.

4:7. —

4:8.
$$M_W(t) = \frac{1}{3}\Big[(1 - t/\lambda)^{-1} + (1 - t/\lambda)^{-2} + (1 - t/\lambda)^{-3}\Big]$$

4:9. —

4:10. $X \sim \text{BinNeg}\big(\alpha, \frac{1}{1+\beta}\big)$ con soporte $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Por lo que $Y = \alpha + X \sim \text{BinNeg}\big(\alpha, \frac{1}{1+\beta}\big)$ con soporte $\{\alpha, \alpha + 1, \ldots\}$.

4:11. —

4:12. —

4:13. —

4:14. —

4:15. —

4:16. —

4:17. —

4:18. —

4:19. —

4:20. —

4:21. —

5. Distribución Multinomial

5:1. $\mathbb{P}(X_A = 27, X_B = 18, X_C = 15) = 0.0022$.

5:2. $\mathbb{P}(X_2 = \cdots = X_6 = 1 | X_1 = 2) = 0.038$

5:3. *a*) $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4) = 0.0029$.
b) $\mathbb{P}(X_1^2 < 5) = 0.211$.
c) $\mathbb{P}(X_0 + X_1 = 6) = 0.205$.
d) $\mathbb{P}(X_2 < 2 | X_1 = 5, X_0 = 3) = 0.00399/0.00912 = 0.438$.

5:4. $\mathbb{E}[C] = 90$; $\text{var}[C] = 129$.

5:5. *a) – e)* Demostraciones.

5:6. *a*) $\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 2, X_6 = 0) = 0.0069$.
b) $\mathbb{P}(X_5 \geq 1 | X_1 = 3) = 0.2624$.

6. Distribución Normal Multivariada

6:1. *a*) $\text{corr}(X, Y) = \rho = -1/2$.

b) $\text{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = -50$

c) $(X|Y = y) \sim \text{N}(50 - \frac{1}{2}(y - 25), 75)$.

d) $\mathbb{P}(X > 55|Y = 30) = 0.193$.

6:2. *a*) $(Y|X = x) \sim \text{N}(3.45, 0.0394)$.

b) $\mathbb{P}(Y > 3.5|X = 120) = 0.4005$.

c) $(X|Y = 2.8) \sim \text{N}(95.0, 43.75)$, $\mathbb{P}(X \geq 115) = 0.0012$.

6:3. *a*) $k = \frac{2}{\pi\sqrt{3}}$.

b) $X \sim \text{N}(2, 1)$ y $Y \sim \text{N}(1, 1/4)$.

c) $\mathbb{E}[X] = 2$, $\text{var}(Y) = 1/4$, $\text{cv}(X) = \frac{1}{2}$ y $\text{SNR}(Y) = 2$.

d) $\text{cov}(X, Y) = -1/4$ y $\text{corr}(Y, X) = -1/2$.

e) $(X|Y = 2) \sim \text{N}(1, 3/4)$ y $(Y|X = -1) \sim \text{N}(7/4, 3/16)$.

f) $\mathbb{E}[X|Y = -1] = 4$ y $\text{var}(Y|X = 2) = 3/16$.

g) $\mathbb{E}[X] = \mu_X$ y $\text{var}(X) = \sigma_X^2$.

6:4. —

6:5. $\mathbb{P}(Y_2 > 4|Y_1 = 2) = 1 - \Phi(0.1978) = 0.4216$.

6:6. *a*) $X_5 \sim \text{N}(0, 5)$.

b) $X_1 \sim \text{N}(0, 1)$, $X_4 \sim \text{N}(2, 4)$ y $\text{corr}(X_1, X_4) = 1/2$.

c) $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim \text{N}_2\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right)$.

d) Se sigue de $\sigma_{24} = 0$ y la normalidad.

e) $(X_4|X_1 = -2) \sim \text{N}(0, 3)$.

f) La matriz de covarianzas Σ acepta la descomposición espectral $\Sigma = Q\Lambda Q^T$, con Q es la matriz ortogonal formada por lo vectores propios de Σ y $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_n > 0$, sus correspondientes valores propios y donde

$$Q = \begin{bmatrix} 0.161 & -0.271 & 0.027 & 0.390 & 0.865 \\ 0.331 & 0.035 & 0.470 & -0.768 & 0.281 \\ -0.352 & 0.436 & -0.628 & -0.374 & 0.390 \\ 0.360 & -0.664 & -0.579 & -0.277 & -0.132 \\ 0.782 & 0.543 & -0.220 & 0.205 & -0.061 \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 5.423 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5.064 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2.869 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1.247 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0.397 \end{bmatrix}$$

$Y = Q^T X$ con $\text{var}(Y) = \Lambda$. Así, $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$, para $i \neq j$. Se sigue de la normalidad la independencia de las componentes de Y.

El código en lenguaje R que define la matriz Σ_X y calcula su descomposición espectral sería

```
R > Sigma <- matrix(c(1,0,-1,1,0, 0,2,-1,0,1, -1,-1,3,-1,0, 1,0,-1,4,0, 0,1,0,0,5),
                nrow=5)
R > print(Sigma)
R > print(eigen(Sigma))
```

g) $\text{vartot}(X) = \sum \sigma_i^2 = 1 + \cdots + 5 = 15 = \sum \lambda_j = 5.423 + \cdots + 0.397 = \text{vartot}(Y)$.

6:7. *a*) $Y = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1 + X_2 \end{bmatrix} \sim \mathrm{N}_2\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 + \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$.

b) $(Y_2 | Y_1 = y_1) \sim \mathrm{N}(\mu_2 + y_1, \sigma_2^2)$.

6:8. *a*) $Y_1 \sim \mathrm{N}(-2, 28)$.

b) $Y \sim \mathrm{N}_2\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 & -5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}\right)$.

c) $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = 0$.

d) $(Z_1 | Z_2 = x_2) \sim \mathrm{N}_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}\right)$.

6:9. *a*)

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}_3\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

y

$$\left(\begin{bmatrix} X_4 \\ X_2 \end{bmatrix} | X_1 = 1\right) \equiv (Y_1 | Y_2 = 1) \sim \mathrm{N}_2\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

b)

$$\mathbb{E}[2X_2 - X_4 | X_1 = 1] = -1$$

y

$$\mathrm{var}[2X_2 - X_4 | X_1 = 1] = 11$$

c) $\mathbb{P}(X_4 - X_2 > 0) \approx 0.6584$.

d) $\mathbb{P}\big(X_4 - X_2 > 0 | X_3 = 1, X_5 = -1\big) \approx 0.6584$

6:10. —

7. Transformaciones de variables aleatorias

7:1. *a*) $\mathbb{E}[\mathrm{Area}] = 1/3$.

b) $\mathbb{E}[\mathrm{Area}] = 1/4$.

c) $L \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, luego $\mathbb{E}[L^2] = 2/\lambda^2$.
Por otro lado, si $L_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$, $L_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$, entonces $\mathbb{E}[L_1 \cdot L_2] = 1/\lambda_1\lambda_2$.

7:2. *a*)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < \sqrt{3}\ell/2 \\ \sqrt{4x^2 - 3\ell^2}/\ell & \sqrt{3}\ell/2 \le x \le \ell \\ 1 & x > \ell \end{cases}$$

b)

$$f_X(x) = \frac{4x}{\ell}(4x^2 - 3\ell^2)^{-1/2}\ \mathbb{1}_{[\sqrt{3}\ell/2, \ell]}(x)$$

c)

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{9}{10}\ell\right) = 1 - \frac{\sqrt{24}}{10} \approx 0.51$$

7:3. —

7:4. Y es un variable aleatoria discreta distribuida geométricamente con parámetro $p = 1 - e^{-\lambda}$ y soporte $\{0, 1, 2, \dots\}$. Esto es,

$$f_Y(y) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}(y)}$$

7:5. Y se distribuye exponencialmente con $\mathbb{E}[Y] = 1/\lambda$.

7:6. Si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, entonces $Y = cX \sim \text{Exp}(\lambda/c)$.

7:7. $Y = 1 - 1/X$.

7:8. *a*) Demostración.

b) $f_W(w) = \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\ 2w^{2\alpha-1}e^{-w^2/\beta}$

c) Demostración.

7:9. Demostración.

a) —

b) —

7:10. Demostración.

a) —

b) —

7:11. $f_{|X|}(y) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\ e^{-y^2/2\sigma^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$

7:12. $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y}\ e^{-(\ln y - \mu)^2/2\sigma^2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$

7:13. $f_Y(y) = \dfrac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)}(e^{-y})^{\alpha_1 - 1}(1 - e^{-y})^{\alpha_2 - 1} \cdot \left|-e^{-y}\right| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) = \lambda e^{-\lambda y}$

7:14. Si $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, entonces $Y = 1 - X \sim \text{Beta}(\beta, \alpha)$.

7:15. $f_Y(y) = \dfrac{e^{-\frac{y}{1-y}}}{(1-y)^2}\ \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$

7:16. $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(1 + y^2)}\ \mathbb{1}_{(\infty,+\infty)}(y)$

7:17. $\mathbb{E}[R^2] = 2\alpha(\alpha + 1)/\lambda^2$

7:18. —

7:19. —

7:20. $Y_1 \sim \text{Beta}(n_1, n_2)$.

7:21. $f_U(u) = -\ln(u)\mathbb{1}_{(0,1)}(u)$.

7:22. Sea $W = X_1X_2$.

a)

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y_1+y_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y_1-y_2}{\sqrt{2}}\right)^2\right)}$$

b) —

7:23. $f_{X^2Y^2}(w_1, w_2) = \mathbb{1}_{(0,1)\times(0,1)}(w_1, w_2)$

7:24. Sean $W_1 = X$ y $W_2 = X + Y$,

$$f_W(w) = f_{W_1W_2}(w_1, w_2) = 2e^{-w_2}\mathbb{1}_{(0,w_2/2)}(w_1)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(w_2)$$

Marginalmente $W_1 \sim \text{Exp}(\lambda = 2)$ y $W_2 \sim \text{Gamma}(\alpha = 2, \lambda = 1)$. Esto es,

$$\begin{aligned} f_{W_1}(w) &= 2e^{-2w}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(w) \\ f_{W_2}(w) &= we^{-w}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(w) \end{aligned}$$

7:25. Considere

$$f_{XY|Z}(x, y|z) = [z + (1 - z)(x + y)]I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$$

para $0 \le z \le 2$, y $f_Z(z) = \frac{1}{2}I_{(0,2)}(z)$.

a) Encuentre $\mathbb{E}[X + Y]$.

b) ¿Son X y Y independientes? Verifíquelo.

c) ¿Son X y Z independientes? Verifíquelo.

d) Encuentre la *f. d. p.* conjunta de X y $X + Y$

e) Determine la distribución de $\max\{X, Y\}|Z = z$.

f) Determine la distribución de $(X + Y)|Z = z$.

Solución:

a) $\mathbb{E}[X + Y] = 1$.

b) X y Y son *v. a.* independientes pues $f_X(x)f_Y(y) = f_{X,Y}(x, y)$.

c) X y Z no son independientes, pues

$$f_{XZ}(x, z) = \frac{1}{4} + x(1 - x) - \frac{1}{4}z \neq f_X(x)f_Z(z)$$

d) Sean $W_1 = X$ y $W_2 = X + Y$, y sea $S = \{(u, v) : 0 < u < 1; u < v < 1 + u\}$, por lo que la función de densidad conjunta de $W = (W_1, W_2)$ es

$$f_W(w_1, w_2) = \mathbb{1}_S(w_1, w_2)$$

e) Sea $W = \text{máx}\{X, Y\}$. Luego,

$$F_{W|Z}(w|z) = \mathbb{P}(W \le w|Z = z) = \mathbb{P}(X \le w, Y \le w|Z = z] = zw^2 + (1 - z)w^3$$

Por lo tanto

$$f_w(w|z) = \left(2w + 3(1 - z)w^2\right)\mathbb{1}_{(0,1)}(w)$$

f) Sea $W = X + Y$

$$\begin{aligned} P(W \le w|Z = z) = f_{X+Y|Z}(w|z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{XY|Z}(x, w - x|z)dx \\ &= \cdots \\ &= \left[z + (1 - z)w\right]\left\{\mathbb{1}_{(0,1]}(w) + (2 - w)\mathbb{1}_{(1,2]}(w)\right\} \end{aligned}$$

8. Sumas y cocientes de variables aleatorias

8:1.

$$f_{X+Y}(z) = z\,\mathbb{1}_{(0,1)}(z) + (2-z)\,\mathbb{1}_{(1,2)}(z)$$

8:2.

$$f_{X+Y}(z) = \frac{1}{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\, e^{-z/\beta} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$$

Esto es, $X+Y \sim \text{Gamma}(\alpha_1+\alpha_2, \beta)$.

8:3.

$$f_{Y-X}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z+x)\mathrm{d}x$$

8:4.

$$f_{Y-X}(z) = \frac{(b-a)-|z|}{(b-a)^2}\,\mathbb{1}_{[a-b,b-a]}(z)$$

y

$$f_{|X-Y|}(w) = \frac{dF_W(w)}{dw} = \frac{2}{(b-a)}\left[1-\frac{w}{(b-a)}\right]\mathbb{1}_{(a-b,b-a)}(w)$$

8:5. —

8:6.

$$f_{XY}(v) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|} f_X(x) f_Y\left(\frac{v}{x}\right)\mathrm{d}x$$

8:7.

$$M_{X_1X_2}(t) = (1-t^2)^{-1/2}$$

8:8.

8:9.

$$f_{XY}(z) = -\ln(z)\;\mathbb{1}_{(0,1)}(z) \quad \text{y} \quad f_{X/Y}(u) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{(0,1)}(u) + \frac{1}{2u^2}\,\mathbb{1}_{(1,\infty)}(u)$$

Luego, $\mathbb{E}[X/Y] = \infty$, pero $\mathbb{E}[X]/\mathbb{E}[Y] = (1/2)/(1/2) = 1$.

8:10.

$$f_{|Y|/|X|}(z) = \frac{2}{\pi(1+z^2)}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(z)$$

8:11. **Distribución F (Snedecor-Fisher)**

a) —

b) —

c)

$$f_{Y/X}(u) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})}\frac{u^{\alpha_2-1}}{(1+u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}\;\mathbb{1}_{(0.\infty)}(u)$$

d) —

e) —

f) —

g) —

9. Estadísticos de Orden

9:1. —

9:2. *a*) —

b)

$$\mathbb{E}[U_{(k)}] = \frac{k}{n+1} \quad \text{y} \quad \operatorname{var}(U_{(k)}) = \frac{k(n-k+1)}{(n+2)(n+1)^2}$$

c)

$$\mathbb{E}[U_{(n)} - U_{(1)}] = \mathbb{E}[U_{(n)}] - \mathbb{E}[U_{(1)}] = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

d)

$$\mathbb{E}[U_{(k)} - U_{(k-1)}] = \mathbb{E}[U_{(k)} - U_{(k-1)}] = \left(\frac{k}{n+1}\right) - \left(\frac{k-1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$$

9:3. —

9:4. —

9:5. —

9:6. $\mathbb{E}[Y_1] = 10$.

9:7. $\mathbb{E}[X_i]$ no existe, pero $\mathbb{E}[\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}] = \frac{n}{n-1}$.

9:8. $\mathbb{P}(D) = (1-2d)^3$, donde D el evento {La distancia entre ningún dos personas es menor que d millas}.

10. Desigualdades de Probabilidad

10:1. *a*) $\mathbb{P}(6 < Y < 16) \geq 16/25$.

b) $c = 10$.

10:2. —

10:3. *a*)

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

b) $\mathbb{E}[X] = 3/2$; $\operatorname{var}[X] = 3/4$.

c)
- $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq \sqrt{3}/2) = 1/4$.
- Regla empírica: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq \sqrt{3}/2) = 0.32$
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq \sigma) \leq 1$.

- $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq 2(\sqrt{3}/2)) = 0$.
- Regla empírica: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq 2(\sqrt{3}/2)) = 0.05$
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)2} = 1/2$

10:4. $\sigma_Y \leq 1/2$.

10:5.
- $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma) = 0.962$.
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma) \geq 0.75$.
- Regla empírica: $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma) = 0.95$.

10:6. —

10:7.
- Para $k = 1$:
  - $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq \sigma) \approx 0.577$
  - Chebyshev: $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq \sigma) \geq 0$
- Para $k = 2$:
  - $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq 2\sigma) = 1$
  - Chebyshev: $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq \sigma) \geq 0.75$
- Para $k = 3$:
  - $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq \sigma) = 1$
  - Chebyshev: $\mathbb{P}(|U-\mu| \leq 3\sigma) \geq 0.888$

10:8. *i)* $\mathbb{E}[X^3] \geq 15625$.
ii) $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq 5$.
iii) $\mathbb{E}[\log(X)] \leq 3.22$.
iv) $\mathbb{E}[e^{-X}] \geq 1.389 \times 10^{-11}$.

10:9. —

10:10. —

10:11. *a*) $a = \frac{25}{3} - \sqrt{10\frac{130}{9}} = -3.685$ y $b = \frac{25}{3} + \sqrt{10\frac{130}{9}} = 20.352$.
b) Mayor o igual a 20.

10:12. *a*) $\mathbb{P}(|X-Y| > 15) = 0.1244$.
b) $\mathbb{P}(X > Y + 15) = 0.11067$.
c) $\mathbb{P}(Y > X + 15) = 0.11067$.

10:13. *a*) $\mathbb{P}(|N_{10}/10 - 1.7| \geq 1) \leq 0.17$
b) $\mathbb{P}(|N_{10}/10 - 1.7| \geq 1) \approx 0.0206$

11. Ley de los Grandes Números y Teorema Central del Límite

11:1. *a*) 0.8824.
b) 0.75.
c) 10.

11:2. *a*) $\mathbb{P}\left(\sum_1^{20} X_i > 15\right) = \frac{4}{3}$.
b) $\mathbb{P}\left(\sum_1^{20} X_i > 15\right) = 0.8810$.

11:3. 0.3085.

11:4. $n \geq 66564$.

11:5. *a*) 0.0162.
b) 0.2514.

11:6. 0.1075.

11:7. *a*) 0.149.
b) 0.0838.

11:8. 0.8461.

11:9. *a*) $\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq .025 = 0.134.$

b) $c = 0.043.$

c) $n = 2663.$

11:10. 0.04186.

11:11. $n = 38416(p(1-p)).$

11:12. $n = 250.$

11:13.
- Chebyshev: $n = 32000.$
- Teorema Central del Límite: $n = 6147.$

11:14.
- Chebyshev: $n = 50000.$
- Teorema Central del Límite: $n = 9604.$

11:15.
- Chebyshev: $n = 4000.$
- Teorema Central del Límite: $n = 769.$

11:16. —

11:17. —

11:18. —

11:19. —

11:20. —