Cálculo de Probabilidades II

Cuaderno de Ejercicios

Laboratorio

Varios colaboradores

5 de enero de 2026

Versión 0.46

Índice

Prefacio

Hace tres años se iniciaron las sesiones de ejercicios que llaman *laboratorios* de los cursos de Cálculo de Probabilidades I y II. Los encargados de los laboratorios inicialmente fueron David I. López Romero y L. Jordán Linares Pérez, alternándose los cursos. Cada uno de ellos colectó los ejercicios para sus sesiones. Ahora hemos empezado a recuperar las respuestas de los ejercicios y resolveremos una selección de ellos. Este cuaderno es el resultado de ellos.

Una segunda versión incluye las colaboraciones de Caleb Iván Gopar Morales y José Carlos Cruz Aranda, de la segunda generación de laboratoristas, quienes aportaron más ejercicios e uniformizaron la notación en los ejercicios de laboratorio de Cálculo de Probabilidades II.

La tercera versión que aquí se presenta refleja el cuidadoso trabajo de Fernando Pérez Millán y José Manuel Altamirano Zevallos, quienes además aportaron el resultado de los problemas.

Laboratorista	**semestre**	**año**
L. Jordán Linares Pérez	otoño	2021
L. Jordán Linares Pérez	primavera	2022
David I. López Romero	otoño	2022
Caleb I. Gopar Morales	primaver	2022
Caleb I. Gopar Morales	otoño	2022
J. Carlos Cruz Aranda	primavera	2023
Fernando Pérez Millán	otoño	2023
José Manuel Altamirano Zevallos	primavera	2024
José Manuel Altamirano Zevallos	otoño	2024
Mónica González García	primavera	2025
Carla Reyes Hernández	otoño	2025

Cualquier error que identifique, comentario y/o sugerencia serán bienvenido. Diríjalo a Ernesto Barrios `<ebarrios at itam.mx>`.

Ciudad de México, 5 de enero de 2026

1. Vectores Aleatorios

1. Una urna tiene 2 bolas: una marcada con el número "0" y otra marcada con el número "1". Se sacan dos bolas con reemplazo. Sea X la v.a. que denote el valor máximo entre los números de las bolas extraídas y sea Y el valor mínimo.

   a) Obtenga la función masa de probabilidad (*f.m.p.*) conjunta.

   b) Obtenga las *f.m.p.*'s marginales de X e Y.

2. Considera el experimento de lanzar dos tetraedros (poliedro regular de 4 caras) con caras etiquetadas del 1 al 4. Sea X el número de la cara hacia abajo del primer tetraedro y sea Y el número más grande de las caras hacia abajo. Encuentra la función de distribución de (X, Y).

3. Se sabe que en un cesto con 5 mangos dos de ellos están podridos. Un valiente changuito probará cada mango, uno a la vez, hasta encontrar los dos podridos. Sea N_1 el número de mangos que el changuito probará hasta encontrar el primer mango podrido, y N_2 el número de mangos adicionales que probará hasta identificar la segunda fruta podrida. Encuentre la f.m.p conjunta de N_1 y N_2.

4. Considera el experimento de lanzar 4 veces una moneda. Sea X el número de soles en los primeros 3 lanzamientos y sea Y el número de águilas en los últimos 3 lanzamientos. Encuentra la función de distribución de (X, Y).

5. Se extraen dos pelotitas de una bolsa que contiene: dos pelotitas rosas, una amarilla y dos verdes. Considerando un tipo de muestreo sin reemplazo, define una variable aleatoria X_1 que determine si el resultado de la primera extracción es rosa o no lo es. Similarmente, define una variable X_2 para determinar si la segunda extracción es rosa o no lo es.

   a) Describe la función de distribución conjunta de (X_1, X_2).

   b) Determina las funciones de distribución marginales de X_1 y de X_2.

6. Sean X, Y variables aleatorias discretas con función de masa de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{n(n+1)} & x \leq y,\ x, y \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}.$$

   a) Verifique que la *f.m.p.* conjunta sea *propia*, esto es, f es no negativa y suma 1.

   b) Encuentre las funciones de masa de probabilidad marginales f_X y f_Y.

7. Considere el vector aleatorio (X, Y) con función de masa de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda} p^x (1-p)^{y-x}}{x!(y-x)!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x) \mathbb{1}_{\{x,x+1,\ldots\}}(y)$$

   a) En un plano cartesiano describa gráficamente el soporte de la distribución conjunta.
   b) Encuentre las funciones de masa de probabilidad marginal f_X y f_Y.
   c) Determine $\mathbb{P}(X = Y)$.

8. Sean X e Y dos variables aleatorias continuas con función de densidad de probablilidad (*f.d.p.*) conjunta.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x + cy^2 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

   a) Halle el valor de la constante c.
   b) Calcule $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{2})$.
   c) Encuentre las funciones de densidad de probabilidad marginales f_X y f_Y.

9. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

   a) Calcule $\mathbb{P}(X < Y)$.
   b) Obtenga las *f.d.p.*'s marginales f_X, f_Y.

10. Considere el vector aleatorio (X, Y) con *f.d.p.* conjunta dada por

$$f(x,y) = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}e^{-y}, \quad \alpha \in \{2, 3, \ldots\}, 0 \leq x \leq y < \infty$$

   a) Encuentre el valor de α.
   b) Calcule las *f.d.p.*'s marginales de X y Y.

11. La *f.d.p.* conjunta de X y Y está dada por

$$f(x,y) = \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}) \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \mathbb{1}_{(0,2)}(y).$$

   a) Verique que f sea un función de densidad propia.
   b) Encuentre la función de densidad marginal de X.
   c) Calcule $\mathbb{P}(X > Y)$

12. Considere el vector aleatorio (X, Y) con funcion de densidedad conjunta

$$f(x,y) = kxe^{-y} \mathbb{1}_{(0<x<y)}(x,y).$$

   a) Describa gráficamente el soporte de la distribución.
   b) Encuentre el valor de k para que la función sea función de densidad conjunta propia.
   c) Encuentre las funciones de densidad marginales.

2. Variables aleatorias independientes

1. En una jaula hay un ratón y dos pollitos. La probabilidad de que cada uno de los animales salga de la jaula en la próxima hora es de 0.3. Esperamos una hora y observamos lo que queda en la jaula.

   a) ¿Cómo se distribuye la variable aleatoria ξ que cuenta el número de animales que quedan en la jaula?

   b) Si η es el número total de patas de los animales que hay en la jaula, encuentre la distribución conjunta de (ξ, η). ¿Son ξ y η independientes?

2. Sean X, Y, Z variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo (0,1). Calcule $\mathbb{P}(X \geq YZ)$.

3. Encuentre la probabilidad de que el polinomio $Ax^2 + Bx + 1$ tenga al menos una raíz real. Donde A, B son variables aleatorias independientes que siguen una distribución $\mathrm{Unif}(0, 1)$.

4. Sean $\theta > 0$ y $\mu > 0$, fijas y X e Y dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con medias $1/\theta$ y $1/\mu$ respectivamente. En estudios experimentales es común el caso de *observaciones censuradas*. Luego, en lugar de observar X e Y se registran

$$Z = \text{mín}\{X, Y\} \qquad \text{y} \qquad W = \begin{cases} 1 & \text{si } Z = X \\ 0 & \text{si } Z = Y \end{cases}$$

   a) Determine la función de distribución conjunta de (Z, W).

   b) Muestre que las variables aleatorias Z y W son independientes.

5. Considere el círculo C de radio r_0 centrado en el origen

$$f(x, y) = k\mathbb{I}_C(x, y)$$

   a) Determina k para que sea una función de densidad conjunta.

   b) Encuentre la f.d.p marginal de Y.

   c) ¿Son X y Y variables aleatorias independientes?

6. Sean X y Y dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con medias $\mu_X = 1$ y $\mu_Y = 2$, respectivamente. Calcule $\mathbb{P}(X < Y)$.

7. Los precios de apertura por acción Y_1 y Y_2, de dos acciones similares son variables aleatorias *i.i.d.* con función de densidad de probabilidad común f dada por

$$f(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y-4)}\mathbb{I}_{(4,\infty)}(y)$$

   En una mañana determinada, un inversionista comprará acciones de la emisión menos costosa (X). Determine:

   (a) la función de densidad de probabilidad de la acción que comprará el inversionista;

   (b) el costo esperado por acción que pagará el inversionista.

8. Una estudiante sale de su casa entre las 7:00 a.m. y las 7:40 a.m. para dirigirse al Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). El tiempo de transporte que le toma llegar al ITAM varía entre 30 y 40 minutos. Suponiendo que la hora de salida de la estudiante, X, y el tiempo de viaje, Y, se distribuyen uniforme e independientemente, determine la probabilidad p de que la estudiante llegue a la escuela antes de las 8:00 a.m.

9. Dos personas A y B deciden encontrarse en un lugar predefinido entre la 1 y 2 de la tarde. Suponga que llegarán al sitio aleatoriamente y de manera independiente durante los 60 minutos. Encuentre la distribución de tiempo (aleatorio) T que A esperará a B.

   a) Encuentre F_T, la *f.p.a* del tiempo de espera de A. (Si B llega antes que A define el tiempo de espera como 0).

   b) Determine f_T, la correspondiente *f.d.p.*, indicando claramente el soporte de la distribución.

10. Calcular la probabilidad de que la matriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} A & C & 0 \\ B & A & C \\ 0 & B & A \end{pmatrix}$$

con entradas A, B y C *v.a.i.i.d.'s* con distribución común unif(-1, 1) tenga todos sus valores propios reales

3. Distribuciones condicionales

1. Las concentraciones de monóxido de carbono (X) y de bióxido de carbono (Y) en las emisiones de un coche elegido al azar en la Ciudad de México, siguen una distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-x-y}\mathbb{I}_{\{0\leq y<x<\infty\}}(x,y)$$

   (a) Para que un coche pase la verificación se necesita que $2X + Y \leq 9$. Calcula la probabilidad de que un coche elegido al azar pase la verificación.

   (b) Supón que al medir la cantidad de bióxido de carbono se observa una concentración de $Y = 2$. ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de monóxido de carbono (X) sea mayor que 4?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche que ha pasado la verificación emita una concentración de monóxido de carbono (X) mayor que 3?

2. De un grupo de 9 estudiantes internacionales: 4 mexicanos, 2 españoles y 3 franceses, se eligen tres estudiantes para otorgarles una beca. Sea X el número de estudiantes mexicanos elegidos, y Y el número de estudiantes españoles elegidos.

   (a) Construya la distribución conjunta (tabla de probabilidades) de X y Y.

   (b) Sea Z el número de estudiantes franceses elegidos. Obtenga $f(x|z = 2)$.

   (c) Si se sabe que exactamente un estudiante francés recibirá beca, calcule el número esperado de estudiantes españoles que recibirán beca.

3. Sean X_1, X_2 v.a.i.i.d. que siguen una distribución Geom(p) con soporte $\{0, 1, 2, ...\}$. Muestre que $Y = X_1 + X_2 \sim \text{BinNeg}(2, p)$. Determine la distribución de $(X_i|Y = y)$.

4. Sea Y una v.a. que sigue una distribución exponencial con parámetro de tasa θ. A su vez se deja a θ variar como la v.a. Θ que sigue una distribución Gamma con parámetros α y λ (tasa). Encuentre la función de densidad marginal de Y y la densidad condicional de Θ dado $Y = y$.

5. El número total de defectos X en un chip sigue una distribución de Poisson parámetro α. Suponga que cada defecto tiene una probabilidad $0 < p < 1$ de caer en una región específica R, y que la localización es independiente del número de defectos. Verifica que la f.m.p. de N, el número de defectos en R, sigue una distribución Poisson con media αp.

6. El número de tormentas que ocurren en la Ciudad México en un año sigue una distribución binomial con $n = 5$ y $p = 0.6$. Dado que m tormentas ocurren en la Ciudad de México en un año, el número de tormentas que afectan a la ciudad de Querétaro en el mismo año es m con probabilidad $1/2$, $m + 1$ probabilidad $1/3$ y $m + 2$ con probabilidad $1/6$. Calcule el número esperado de tormentas que ocurren en la Ciudad de México en un año dado que en Querétaro se registraron 5 tormentas.

7. Sea X la variable aleatoria que toma los valores de ± 1 y con probabilidad $1/3$ toma el valor 1. Sea Z una variable aleatoria que sigue una distribución Normal estándar e independiente de X. Defina $Y = Z + X$. Encuentre $\mathbb{P}(X = 1 | Y > 0)$.

8. Una máquina acuñadora de monedas produce monedas para las cuales la probabilidad de que caiga *"sol"* es una variable aleatoria P con función de densidad dada por $f_P(p) = pe^p \mathbb{I}_{(0,1]}(p)$. Suponga que lanza una moneda y cae *"sol"*, determine la correspondiente función de densidad condicional de P y evalúela en $P = 1/2$, exprésela con al menos 4 decimales.

4. Esperanza condicional y Covarianza

1. Sea X la proporción de personas económicamente activas cuyo ingreso es inferior a un salario mínimo (SM), y sea Y la proporción de personas cuyo ingreso es superior a 6 SM. La función de densidad conjunta entre X y Y está dada por

$$f(x, y) = 162xy\, \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2/3\}}(x) \mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq x/2\}}(y).$$

Además, se sabe que la función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = \frac{81}{4} x^3\, \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2/3\}}(x),$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{8}{15}, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{8}{27}, \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{8}{45}, \quad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{27}.$$

(a) Obtenga la función de densidad marginal de Y.

(b) Obtenga la proporción esperada de personas económicamente activas cuyo ingreso es superior a 6 SM, si se conoce la proporción de personas económicamente activas cuyo ingreso es inferior a un SM.

(c) Calcule el **coeficiente de correlación** entre las variables X y Y e interprete su valor.

(d) Las personas que tienen un ingreso inferior a un SM no pagan impuestos. Se propone que aquellos que tienen un ingreso inferior a 6 SM tampoco lo hagan. ¿Cuál será el valor esperado y varianza de la proporción de personas con un ingreso entre 1 y 6 SM?

2. Considere el vector aleatorio (X, Y) con función de densidad propia conjunta dada por
$$f(x, y) = \frac{2}{x} e^{-2x} \mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq x < \infty\}}(x, y).$$
Determine $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

5. Covarianza y correlación

1. Sean X y Y *v.a's* con densidad conjunta $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$ para $x, y \geq 0$. Calcule la densidad condicional y la esperanza condicional de Y dada X.

2. Carla juega un total de N juegos de ajedrez en toda su vida. Suponga que N se distribuye geométricamente con parámetro r, fijo. Suponga además que la probabilidad de ganar cada juego es p independientemente de los demás. Sea T el número de total de partidas que ganó Carla en su vida.

   a) Calcule la media y la varianza de T.
   b) Confirme la media de T mediante el cálculo de su función generadora de momentos.

3. El número de personas que retira efectivo de cierto cajero automático entre las 10 y las 11 de la mañana se modela mediante una distribución binomial negativa con una media de 9.7 personas con una desviación estándar de 3.9. Además se ha visto que la cantidad de efectivo que saca una persona es razonablemente modelado mediante una distribución normal centrada en \$1750 y un rango intercuartílico de \$600. Si se supone independencia entre el número de personas que retira efectivo y la cantidad de efectivo que cada una saca, determine la cantidad media de efectivo que se retira entre las 10 y las 11 de la mañana así como su desviación estándar.

4. Sean X, Y v.a.'s. Se define $\varepsilon = Y - \mathbb{E}(Y|X)$. Determine $\mathrm{Cov}(X, \varepsilon)$.

5. Suponga una urna con tres bolas numeradas 1,2,3. Dos bolas son seleccionadas de la urna sin reemplazo. Sea X el número de la primera bola extraída y Y el número de la segunda bola extraída. Determine $\mathrm{Cov}(X, Y)$ y ρ_{XY}.

6. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con media y varianza común μ_X y σ_X^2 respectivamente. Sea $n > 3$ y $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

   a) Demuestre que $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
   b) Calcule la $Var(X_3 - \overline{X})$.
   c) Determine $Cov(\overline{X}, X_3 - \overline{X})$.
   d) Determine $Cov(X_3, X_3 - \overline{X})$.
   e) Calcule $Cov(X_1 - \overline{X}, X_3 - \overline{X})$.

7. Considere la siguiente información de dos variables aleatorias
$$\mathbb{E}[X] = 5, \qquad \mathbb{E}[X^2] = 27.4,$$
$$\mathbb{E}[Y] = 7, \qquad \mathbb{E}[Y^2] = 51.4,$$
$$\mathrm{Var}(X + Y) = 8.$$
Calcula la $\mathrm{Cov}(X + Y, X + 1.2Y)$.

6. Covarianza y Función generadora de momentos

1. Sea (X, Y) $v.a.$ tal que $\mathbb{E}[XY] < \infty$. Demostrar:
$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X \mid Y]]$$

2. Sean X, Y v.a.'s., se definen $U = a + bX$ y $V = c + dY$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Muestra que $|\rho_{XY}| = |\rho_{UV}|$.

3. Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias con $f.d.p.$ conjunta dada por
$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2y_1 & , 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & , \text{e.o.c} . \end{cases}$$
Encuentre la covarianza de Y_1 y Y_2.

4. Sean Y_1 y Y_2 variables aleatorias discretas con $f.d.p.$ conjunta como se muestra en la tabla

$Y_2 \setminus Y_1$	$Y_1 = -1$	$Y_1 = 0$	$Y_1 = 1$
$Y_2 = -1$	$1/16$	$3/16$	$1/16$
$Y_2 = 0$	$3/16$	0	$3/16$
$Y_2 = 1$	$1/16$	$3/16$	$1/16$

Muestre que Y_1 y Y_2 son dependientes pero tienen covarianza 0.

5. Use el hecho de que $\rho^2 \leq 1$ para demostrar que
$$-\sqrt{\text{Var}(Y_1) \times \text{Var}(Y_2)} \leq \text{Cov}(Y_1, Y_2) \leq \sqrt{\text{Var}(Y_1) \times \text{Var}(Y_2)}$$

6. Considere un vector aleatorio (X_1, X_2) con función generadora de momentos conjunta dada por
$$m(t_1, t_2) = \exp\left\{-t_2 + \frac{1}{2}t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2\right\}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$
Calcule $\mathbb{E}[X_i]$, $\text{Var}(X_i)$ y $\text{Corr}(X_1, X_2)$.

7. Sea $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de $v.a.i.i.d.$'s con función generadora de momentos m_X y N una variable entera positiva, independiente de los X_i's, con función masa de probabilidad f_N. Determine la $f.g.m.$ $m_Y(t)$, donde
$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$
Si las X_i siguen la distribución exponencial de media $\theta = 2$ y N tiene la $f.m.p.$ dada por la tabla

n	1	2	3
p	$1/6$	$3/6$	$2/6$

Evalúe $m_Y(1/4)$.

8. El número de mensajes que llegan al servidor en un intervalo de tiempo t (medido en horas) sigue una distribución Poisson con media λt, para alguna $\lambda > 0$, fijo. El número de mensajes en intervalos de tiempo disjuntos son independientes. Sean X, Y y Z el número de mensajes recibidos entre 9am y mediodía, del mediodía a las 6pm y de 6pm a medianoche, respectivamente. Responda los siguientes reactivos:

a) Determine la función masa de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y, Z).

b) Si se sabe que el numero total de mensajes T entre 9am y medianoche fue de t, determine la función masa de probabilidad conjunta de (X, Y, Z).

c) Calcule $\mathbb{P}(X = 3, Y = 20, Z = 13|T = 36)$ y exprésela con al menos 4 decimales.

7. Repaso

1. Los precios (X) y cantidades (Y) de las ventas diarias al por mayor de cerveza, en un mercado regional de la zona norte de México, están determinados por la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xe^{-xy}\mathbb{I}_{[2,4]}(x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Donde los precios son medidos en pesos y las cantidades en 100,000 unidades de litros (por ejemplo, $y = 2$ significa que 200,000 litros fueron vendidos y $x = 1$ significa que se vendió el litro a un peso).

a) Encuentre $f_{Y|X}(y|x)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de cerveza vendida exceda 50,000 litros si el precio es de 2 pesos? ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de cerveza vendida exceda 50,000 litros si el precio es de 4 pesos?

c) Encuentre $\mathbb{E}(Y|X = 2)$

d) Sea $Z = XY$ la variable aleatoria que denota las ventas totales diarias en pesos durante el verano. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas diarias totales excedan \$3,000,000 pesos?

2. Una persona participa en un concurso de dos etapas. En la primera etapa se tiran 2 dardos, la probabilidad de que acierte en el centro es de 0.3. El número de veces que acertó en el centro es el número de pelotas que va a extraer de una caja, sin reemplazo. La caja tiene dos pelotas marcadas con el número 1, dos con el número 2 y una con el número 3. Sea X: el número de veces que acierta en el centro, y Y : la suma de los números en las bolas extraídas.

a) Encuentra la *f.m.p.* conjunta de X y Y.

b) Encuentra la covarianza y el coeficiente de correlación.

c) Encuentra la función de densidad de Y, dado que solo se acertó una vez el tiro al blanco.

d) Si la ganancia es $G = 1000Y$, encuentra la esperanza y varianza de la ganancia.

3. Sea (X, Y, Z) un vector aleatorio que representa un punto aleatorio dentro de una esfera de radio r.

(a) Encuentre la función de densidad conjunta del vector (X, Y, Z).

(b) Encuentre la función de densidad marginal de (X, Y)

Sugerencia: La f.m.p conjunta debe ser una constante por ser isotrópica (la probabilidad es igual en cualquier dirección).

4. Se tiene una colección de n problemas de los cuales m de ellos se usaron en el examen final del *periodo de mayo*. Para el *periodo de diciembre* se seleccionaron al azar m problemas y para el *periodo de enero* nuevamente se han elegido al azar m problemas. Sea D la variable aleatoria que denota el número de problemas en diciembre que no fueron usados en el periodo de mayo y E que denota el número de problemas del periodo de enero no usados anteriormente. Suponga que $n \geq 3m$.

   Responda los siguientes incisos. La respuesta debe quedar expresada en términos de los parámetros n y m.

   (a) Determine f_D, la función masa de probabilidad marginal de D.

   (b) Determine f_E, la función masa de probabilidad marginal de E.

   (c) Si sabe que e de los problemas seleccionados para enero no fueron utilizados anteriormente, determine la probabilidad de que d de los m problemas de diciembre no hayan sido usados en el periodo de mayo.

5. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas geométricamente con parámetro $p = 1/4$ y soporte $\{0, 1, 2, \ldots\}$

   (a) Si $S_5 = X_1 + \cdots + X_5$ determine $\mathbb{E}[S_5]$ y $\mathrm{var}(S_5)$.

   (b) Determine la distribución de $S_5 = X_1 + \cdots + X_5$, indicando claramente el soporte de la distribución y sus parámetros.

   (c) Sea K una variable aleatoria distribuida Poisson con media $\lambda = 5$ e independiente de las X_i's. Sea $S_K = X_1 + X_2 + \cdots + X_K$. Determine $\mathbb{E}[S_K]$ y $\mathrm{var}(S_K)$

6. Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^T$ un vector aleatorio con *f.g.m.* conjunta dada por

$$M_X(t_1, t_2) = \exp\left\{\frac{1}{2}(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)\right\}$$

   Encuentre la varianza de $W = 3X_1 - 2X_2$

7. En un centro de atención telefónica, cada agente atiende llamadas de forma continua hasta que decida tomar un descanso. La duración de cada llamada se distribuye Exponencial con parámetro $\lambda = 0.2$ y es independiente de la anterior. Además, el número N de llamadas realizadas es por lo menos 5, y se distribuye geométricamente con parámetro $p = 0.3$. Si se supone independencia entre el número de llamadas y la duración de las llamadas, calcule el valor esperado y la varianza de la duración total de las llamadas que atiende el agente.

8. Diego está jugando un videojuego con varios niveles. Diego pasa de nivel cuando gana una partida, y cada partida es independiente de las anteriores. Las partidas necesarias para pasar un nivel se distribuyen Geométricamente con parámetro $p = 0.25$. Encuentre la esperanza y la varianza del total de partidas necesarias para que Diego logre pasar 5 niveles.

8. Distribución multinomial y normal multivariada

1. Considere que un dado honesto se lanza siete veces de manera independiente. Calcule la probabilidad p de que cada una de las caras haya salido en una ocasión si se sabe que la cara 1 salió dos veces exactamente.

2. Tres monedas honestas se lanzan 10 veces. Sea X_i el número de veces que se obtuvieron i águilas, $i = 0, 1, 2, 3$. Note que $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 10$. Calcule las siguientes probabilidades.

   a) $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4)$

   b) $\mathbb{P}(X_1^2 < 5)$

   c) $\mathbb{P}(X_0 + X_1 = 6)$

   d) $\mathbb{P}(X_2 < 2 | X_1 = 5, X_0 = 3)$

3. Se hacen cuatro observaciones independientes en un intervalo que sigue una *f.d.p.* dada por $f(r) = (1 - |r|)\mathbb{I}_{(-1,1)}(r)$. Suponga que el intervalo se divide en 4 subintervalos de la misma longitud.

   (a) Determine la probabilidad p de que una de las observaciones caiga en el subintervalo del extremo izquierdo; otra en el siguiente subintervalo; dos más en el siguiente; y que no haya observaciones en el subintervalo del extremo derecho.

   (b) Suponga ahora 20 observaciones independientes. Sea X_i el número de observaciones en el i-ésimo subintervalo ($i = 1, 2, 3, 4$). Determine la correlación entre X_1 y X_4

4. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes, tales que X_1 y X_3 se distribuyen $N(1, 1)$ y X_2 se distribuye $N(0, 1)$. Defina $Y_1 = X_1 + 2X_2$ y $Y_2 = X_2 + 3X_3$. Determine $\mathbb{P}(Y_2 > 4 | Y_1 = 2)$. Exprese el resultado en términos de la función de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar.

5. Considere (X, Y) un vector aleatorio normal bivariado tal que $\mu_X = 2, \sigma_X^2 = 4$, $\mathbb{E}[Y|X = x] = 2 + x$, y $\text{var}(Y|X = x) = 5$. Calcule $\mathbb{P}(Y > 5)$.

6. Sea $X^T = (X_1, X_2, X_3)^T$ un vector aleatorio tal que $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$, con

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   Determine todos los posibles valores $a, \ b, \ c \in \mathbb{R}$ tales que las variables aleatorias X_2 y $Y = aX_1 + bX_2 + cX_3$ sean independientes.

7. Sea $\sim N_3(\mu, \Sigma)$, donde

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \ \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Encuentre la distribución de $Y_1 = 3X_1 + X_2 - X_3$.

   (b) Encuentre la distribución conjunta de Y_1, y $Y_2 = X_2 + X_3$.

   (c) Encuentre $\mathbb{E}[X_1 X_2]$

   (d) Sea $Z = (X_1, X_3)^T$ y $X_2 = 1$ Encuentre la distribución condicional de Z dado $X_2 = 1$

8. Si (X, Y) tiene f.d.p normal bivariada

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1 - \rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2) \right\}$$

   Demuestre que $\text{corr}(X^2, Y^2) = \rho^2$.

9. Transformación de variables aleatorias (caso univariado)

1. Sea Y_1 una variable aleatoria binomial con n_1 intentos y $p_1 = 0.2$ y sea Y_2 una variable aleatoria binomial independiente con n_2 intentos y $p_2 = 0.8$. Encuentre la función de probabilidad de $Y_1 + n_2 - Y_2$.

2. Responda las siguientes preguntas.

   a) Sean X y Y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en $\{1, 2, 3, 4\}$. Encuentre la f.m.p. de $W = X - Y$

   b) Sea $X \sim \text{Bin}(2, p)$. Encuentre la f.m.p. de $Y = (X - 1)^2$.

3. Demuestre el siguiente teorema:

   Sea X v.a. continua con f.p.a. F_X, f.d.p. f_X y soporte S_X. Supongamos:
   i) $Y = g(X)$ es inyectiva de S_X a S_Y
   ii) $X = g^{-1}(Y)$ es derivable respecto a y, continua y no cero $\forall y \in S_Y$.
   $\therefore Y$ tiene f.d.p. $f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y)\right|\mathbb{I}_{S_Y}(y)$

4. Sea $X \sim \text{Unif}(-a, b)$. t.q. $0 < a < b$

   a) Obtenga la función de densidad de $Y = |X|$.

   b) Si el soporte de la v.a. X cambia a $(-b, a)$, ¿cuál es la f.d.p. de Y?

5. Sea X una v.a. con función de distribución (f.p.a.) dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0$$

   Sea Y la v.a. definida en términos de X como $Y = m$, si $m \leq X < m + 1$, donde m es un entero no negativo. Esta función se conoce como *piso o suelo*, y se denota con $Y = \lfloor X \rfloor$. ¿Cómo se distribuye Y?

6. Sea X una v.a. continua con función de densidad

$$f(x) = \frac{3}{8}(x + 1)^2\mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

   Defina la siguiente v.a.

$$Y = \begin{cases} 1 - X^2, & \text{si } X \leq 0, \\ 1 - X, & \text{si } X > 0. \end{cases}$$

   y encuentre su f.d.p.

7. Sea X una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f_X(x) = |x|\mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$. Encuentre la correspondiente función de densidad de $Y = X^2$.

8. Considere la variable aleatoria X con función de distribución $F_X(x)$. Defina la variable aleatoria $Y = \text{máx}\{0, X\}$. Encuentre la función de distribución $F_Y(y)$ en términos de $F_X(x)$.

9. Si $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathbb{I}_{(-\infty,+\infty)}$, encuentre la distribución de $Y = 1/X$.

10. Sea $X \sim \text{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$. Encuentre la f. d. p. de $Y = e^X$. La densidad se conoce como función de densidad lognormal.

10. Transformación de variables aleatorias

1. Sean X y Y *v.a's* con densidad conjunta $f(x,y) = xe^{-x(y+1)}$ para $x, y \geq 0$. Calcule la densidad condicional y la esperanza condicional de Y dada X.

2. El número aleatorio de defectos N del banco de memoria de una computadora se distribuye con una ley de Poisson con una media $\lambda(>0)$. A su vez, el parámetro $\Lambda(=\lambda)$ es aleatorio y sigue una distribución *gamma* con parámetros de forma $\alpha(>0)$ y de escala $\beta(>0)$; luego, $\mathbb{E}[\Lambda] = \alpha\beta$.

   a) Encuentre la función masa de probabilidad de N, el número de defectos.
   b) Use la esperanza condicional para encontrar $\mathbb{E}(N)$ y $\mathrm{Var}(N)$.

3. Una tarea llega a un sistema y es atendida por el procesador C_i con probabilidad p_i, $i = 1, \ldots, n$. El tiempo aleatorio que toma el procesador en terminar la tarea está distribuido exponencialmente con parámetro λ_i.

   a) Muestre que la f.d.p. de T, el tiempo que toma el sistema para el procesamiento de la tarea, está dada por
   $$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \qquad 0 \leq t.$$
   b) Muestre entonces que
   $$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}\, \mathbb{P}(C=i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i}, \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Var}(T) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i}\right)^2.$$

4. Considere el v.a. (X,Y) con f.d.p. conjunta dada por
   $$f(x,y) \;=\; \frac{2}{x}\, e^{-2x}\, \mathbf{1}_{\{0\leq y\leq x<\infty\}}(x,y).$$
   Determine $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$.

5. Sea X una v.a. con función de densidad de probabilidad
   $$f_X(x) = \frac{1+x}{2}\, \mathbf{1}_{(-1,1)}(x)$$
   a) Encuentre la función de densidad de $Y = X^2$.
   b) Encuentre la transformación $Z = g(X)$ tal que Z se distribuya unif$(0,1)$.

6. Sea a una constante. Demuestre que la diferencia de dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en el intervalo $(a-1/2, a+1/2)$ tiene función de densidad:
   $$f(u) = \begin{cases} 1-|u| & \text{si } -1<u<1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

7. Considere (X,Y) un vector aleatorio con f.d.p conjunta dada por
   $$f_{XY}(x,y) = ye^{-y(x+1)}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$
   Encuntre la función de densidad de $U = XY$.

8. Sea $X = (X_1, X_2)$ un v.a. con f.d.p. conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x_1)\mathbb{I}_{(1,\infty)}(x_2).$$

   Encuentre la f.d.p. de X_1/X_2.

9. Suponga que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con densidad exponencial, esto es, $X_i \sim Exp(\lambda)$, $i = 1, 2$. Sean $U = X_1 + X_2$ y $V = \frac{X_1}{X_1+X_2}$
   (a) Encuentre la función de densidad conjunta de U y V e indica claramente su soporte.
   (b) Obtenga las densidades marginales de U y V.
   (c) ¿U y V son independientes?

10. Considere U_1 y U_2 *v.a.i.i.d* uniformemente en el intervalo (0,1). Sean $X_1 = U_1 + U_2$ y $X_2 = U_1 - U_2$. Determine la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio $X = (X_1, X_2)$ indicando en su justificación claramente el soporte S_X de la distribución. Calcule la probabilidad $p = P(X \in C)$ donde C es la región determinada por los puntos (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).

11. Sumas y cocientes de variables aleatorias

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad de probabilidades conjunta dada por:
   $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\{0<y<x<\infty\}}(x, y)$.
   a) Encuentre la función de densidad marginal de X y calcule su valor esperado.
   b) Determine la función de densidad del cociente $W = X/Y$ y muestre que es una densidad propia.
   c) Muestre que $\mathbb{E}[W]$ no existe.

2. Si $f(x) = e^{-x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)$, encuentre la distribución de $X/(1 + X)$.

3. Si $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathbb{I}_{(-\infty,+\infty)}$, encuentre la distribución de $Y = 1/X$.

4. Sea (X, Y) *v.a.* con *f.d.p* conjunta dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$$

   Sea $U = e^{-(X+Y)}$. Determine la *f.d.p* de la *v.a.* U.

12. Distribución t de Student y distribución F y respaso

1. Sea T un variable aleatoria que sigue una distribución t con υ grados de libertad. Muestre que
   a) $\mathbb{E}[T] = 0$ si $\upsilon > 1$;
   b) $\mathrm{Var}(T) = \frac{\upsilon}{\upsilon-2}$ si $\upsilon > 2$.

2. Si la variable aleatoria W sigue la distribución F con n y m grados de libertad. Muestre que

a) $\mathbb{E}[W] = \frac{m}{m-2}$ si $m > 2$

b) $\mathrm{Var}(W) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$ si $m > 4$

3. Sea $W \sim F_{m,n}$, $0 < p < 1$ y denote $F(p; m, n)$ al p-ésimo percentil de la distribución de W. Esto es, $p = \mathbb{P}(W \leq F(p; m, n))$. Muestre entonces que:

$$F(p; m, n) = \frac{1}{F(1-p; n, m)}.$$

4. Muestre que si $X \sim F_{m,n}$ entonces,

$$Y = \frac{\frac{m}{n}X}{1 + \frac{m}{n}X} \sim \mathrm{Beta}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

5. Sean

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

de manera que $Y \sim N_5(\mu, \Sigma)$. Dado que $Y_1 = -1$, $Y_3 = 0$, $Y_5 = 2$, determine μ y σ de manera que

$$Z = \frac{Y_2 - \mu}{\sigma}$$

se distribuya normal estándar.

6. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $N(0, \sigma^2)$. (X_1, X_2) representa un punto en el plano cartesiano y sea R la distancia del centro del plano a dicho punto. R se dice que sigue la distribución de Rayleigh. Encuentre f_R, la función de densidad de probabilidad de la distribución. (Sugerencia: note que X_i/σ sigue una distribución normal estándar.)

7. Sean X y Y v.a.'s con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < \infty\}}.$$

Encuentre la función de densidad conjunta de X y $X + Y$. Con base en ella calcule las funciones de densidad marginal de X y de $X + Y$.

13. Estadísticos de orden

1. Considere $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población distribuida uniformemente en el intervalo $(0,\theta)$. Considere los estimadores $\tilde{\theta}$ y $\hat{\theta}$ del parámetro θ dados por:

$$\tilde{\theta} = 2\overline{X}, \qquad \hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)},$$

donde $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ es la media muestral y $X_{(n)} = \max(X_1, ..., X_n)$ el n-ésimo estadístico de orden. Muestre que ambos son estimadores insesgados de θ. Es decir,:

$$\mathbb{E}[\tilde{\theta}] = \theta \qquad \text{y} \qquad \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

2. Sea $U = (U_1, \ldots, U_n)$ una muestra aleatoria de $U \sim Unif(\mu - \theta, \mu + \theta)$. Encuentre la *f.d.p* del rango muestral $R(U) = U_{(n)} - U_{(1)}$.

3. Sean $U_1, ..., U_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Encuentre la mínima n tal que

$$\mathbb{P}\left(\min_i\{U_i\} \geq 0.01 \cap \max_j\{U_j\} \leq 0.99\right) \leq 0.5$$

4. Sean U_1, U_2 y U_3 variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Sean Y_1, Y_2, Y_3 los correspondientes estadísticos de orden ($Y_i = U_{(i)}$).

   a) Encuentre la f.d.p. marginal de (Y_1, Y_2) especificando su soporte.
   b) Encuentre la f.d.p. condicional de Y_3 dado que $Y_1 = y_1$ y $Y_2 = y_2$, indicando claramente su soporte.

5. Considere $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución con f.d.p dada por
$$f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1}\mathbb{I}(0, 1)(x)$$
para alguna $\alpha > 0$. Sean $Y_1, \ldots, Y_n$ los correspondientes estadísticos de orden de las X's. Muestre que Y_i/Y_{i+1}, para $i = 1, \ldots, n-1$ y Y_n son *v. a.'s* independientes.

6. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con media λ_i, con $i = 1, 2, ..., n$.

   a) Demuestre que la variable $\min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ tiene disitribución Exp$(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$,
   b) Muestre que $\mathbb{P}(X_k = \min\{X_1, ..., X_n\}) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + ... + \lambda_n}$.

7. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e indénticamente distribuidas con una densidad
$$f(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{I}(0, \theta)(x)$$
Muestre que $X_{(1)}/X_{(n)}$ y $X_{(n)}$ son independientes.

8. Sean X y Y absolutamente continuas e independientes. Defina $V = \max\{X, Y\}$. Demuestre que $f_V(v) = F_X(v)f_Y(v) + f_X(v)F_Y(v)$.

14. Convergencia y Teorema Central del Límite

1. Sean $X_1, X_2, \ldots$ *v.a.i.i.d* distribuidas exponencialmente con media 1. Sea $X_{(n)}$ el máximo de las primeras n variables. Para $x > 0$ fijo, encuentre $p_n = \mathbb{P}(X_{(n)} - ln(n) \leq x)$ y determine el límite de p_n cuando $n \to \infty$.

2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$ y función de probabilidad acumulada F. Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ se define
$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=i}^{n} \mathbb{I}_{(-\infty, x]}(X_i).$$
Suponga $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ fijos. Resolver los siguientes incisos:

   a) Encuentre $\mathbb{E}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))]$.

b) Determine $\text{var}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))]$.

c) Muestre que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\{F_n(x)\}$ converge en probabilidad a $F(x)$.

3. Demuestre que si $X \sim F_{(n_1,n_2)}$, entonces la distribución límite de $n_1 X$ conforme $n_2 \to \infty$ es $\chi^2_{(n_1)}$.

4. Usando funciones generadores de momentos muestre que la sucesión de distribuciones binomiales con parámetros n y p_n, tal que $np_n \to \lambda$ mientras que $n \to \infty$, converge en distribución a la distribución Poisson parámetro λ.

5. Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que siguen una distribución Unif(a, b). Muestre que

   a) $\text{mín}\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} a$.

   b) $\text{máx}\{X_1, ..., X_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} b$.

6. Un jugador de basquetbol sabe que en promedio él puede anotar el 60 % de sus tiros libres. ¿Cuál es la probabilidad de que en 25 intentos el anote mas de la mitad? Suponga que el número S_n de anotaciones de n tiros se distribuye binomial con parámetros n y $p = 0.6$.

7. Una persona tiene 100 bombillas cuyo tiempo de vida se distribuye exponencialmente y de manera independiente con media 5 horas. Si las bombillas son usadas una por una, reemplazando inmediatamente una bombilla cada que otra falla, aproxime la probabilidad de que al menos una bombilla siga funcionando después de 525 horas.

8. Las calificaciones de los exámenes de cierto profesor tienen media 74 y desviación estándar 14. Si el profesor va a entregar dos exámenes, uno a un grupo con 25 alumnos y otro a una con 64.

   a) Aproxime la probabilidad de que el promedio de las calificaciones del grupo de 25 sea mayor a 80.

   b) Aproxime la probabilidad de que el promedio de las calificaciones del grupo grande sea mayor que las del grupo chico por más de 2.2 puntos.

15. Repaso final

1. Considere la variable aleatoria X con distribución determinada por su función de densidad de probabilidad f_X. Se sabe que X tiene al menos su segundo momento finito. De hecho, $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 < \infty$ es conocida.

   Suponga que X modela el nivel de acidez de cierto líquido y se desea *estimar* (aproximar) su nivel medio $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ desconocida. Para esto, se toma una **muestra aleatoria** $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *v.a.i.i.d.* con $X_i \sim f_X$, y se determina la **media muestral** $X_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, La Ley de los Grandes Números asegura que $X_n \xrightarrow{P} \mu_X$, cuando $n \to \infty$.

   Si se desea aproximar μ_X de manera que se satisfaga que

   $$\mathbb{P}\big(\big|X_n - \mu_X\big| \leq k\sigma_X\big) \geq 1 - \alpha$$

   Determine el valor mínimo de n de manera que se satisfaga la desigualdad anterior para $k = 1/10$ y $\alpha = 0.05$, utilizando

   a) La Desigualdad de Chebyshev.
   b) El Teorema Central del Límite.
   c) ¿Cómo explicaría la gran diferencia entre resultados?

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = 8xy\mathbb{1}_{\{0<y<x<1\}}(x, y)$$

   a) Calcule $\mathbb{P}(2X > 1,\ 2Y < 1)$.
   b) Determine la función de distribución conjunta $F_{XY}(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3. Muestre los siguientes resultados:

   a) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}\,(X,\ E[Y|X])$.
   b) X y $(Y - \mathbb{E}[Y|X])$ tienen correlación 0.
   c) Si $\mathbb{E}[X|Y] = 18 - \frac{3}{5}Y$ y $\mathbb{E}[Y|X] = 10 - \frac{1}{3}X$, determine $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$.

4. Considere una variable aleatoria Y con función de densidad dada por

$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$$

   También considere una variable aleatoria X tal que $(X|Y = y) \sim \mathrm{Unif}(0, y)$

   a) Encuentre la función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ indicando claramente el soporte de la distribución.
   b) Encuentre la función de densidad marginal de X.
   c) Encuentre la función de densidad condicional de Y dado $X = x$, indicando claramente el soporte de la distribución.
   d) Demuestre que

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } x \in (0, 1) \\ \frac{3}{2}x & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

5. Suponga que X y Y son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente con media β. Defina $Z = X + Y$ y $W = X/Y$.

   a) Determine la función de densidad conjunta de Z y W.
   b) ¿Son las variables aleatorias Z y W independientes? Justifique su respuesta.

6. Considere $\mathbf{X}$ un vector aleatorio que sigue una distribución normal multivariada $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}_5(\mu, \Sigma)$, con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ dadas por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}; \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

   Determine el valor de la constante c de manera que

$$\mathbb{P}(X_3 > c|X_4 = 2, X_2 = 1) = 0.10$$

7. El vector aleatorio (X, Y) tiene función de densidad conjunta

$$f(x, y) = cx^a \mathbb{I}_S(x, y)$$

con $a > -1$ fijo y $S = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1, x + y > 1\}$.

   a) Calcule el valor de c.

   b) Determine la función de probabilidad acumulada para todo $(x, y) \in S$. No es necesario reducir algebraicamente el resultado.

   c) Determine la función de densidad marginal de X, indicando claramente el soporte de la distribución.

   d) ¿Son X y Y independientes? Argumente su respuesta.

8. Sea $X_1, X_2, \ldots,$ una sucesión de *v.a.i.i.d.'s* con función generadora de momentos m_X y N una variable entera positiva, independiente de los X_i's, con función masa de probabilidad f_N. Determine la *f.g.m.* $m_Y(t)$, donde

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Si las X_i siguen la distribución exponencial de media $\theta = 2$ y N tiene la *f.m.p.* dada por la tabla

n	1	2	3
p	1/6	3/6	2/6

Evalúe $m_Y(1/4)$.

- Sean $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ y $\Phi(z) = P(Z \leq z)$. Se tiene entonces que

$$\Phi(1/3) = 0.631, \quad \Phi(1/2) = 0.691, \quad \Phi(1) = 0.841, \quad \Phi(2) = 0.977, \quad \Phi(3) = 0.999$$

$$\Phi(1.282) = 0.900, \quad \Phi(1.645) = 0.950, \quad \Phi(1.960) = 0.975 \quad \Phi(2.326) = 0.990$$

Respuestas

1. Introducción

1:1. *a*) La función masa de probabilidad conjunta está dada por:

$X \setminus Y$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	1/4	0
$X=1$	2/4	1/4

b) $f_X(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{1\}}(x)$,
$f_Y(y) = \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{0\}}(y) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{1\}}(y)$

1:2. La función de distribución de (X, Y) está dada por:

$X \setminus Y$	$Y<1$	$Y\le 1$	$Y\le 2$	$Y\le 3$	$Y\ge 4$
$X<1$	0	0	0	0	0
$X\le 1$	0	1/16	2/16	3/16	4/16
$X\le 2$	0	1/16	4/16	6/16	8/16
$X\le 3$	0	1/16	4/16	9/16	12/16
$X\ge 4$	0	1/16	4/16	9/16	1

1:3. La función masa de probabilidad conjunta está dada por:

$N_1 \setminus N_2$	$N_2=1$	$N_2=2$	$N_2=3$	$N_2=4$
$N_1=1$	1/10	1/10	1/10	1/10
$N_1=2$	1/10	1/10	1/10	0
$N_1=3$	1/10	1/10	0	0
$N_1=4$	1/10	0	0	0

1:4. La función de distribución de (X, Y) está dada por:

$X \setminus Y$	$Y<0$	$Y\le 0$	$Y\le 1$	$Y\le 2$	$Y\ge 3$
$X<0$	0	0	0	0	0
$X\le 0$	0	0	0	1/16	2/16
$X\le 1$	0	0	2/16	6/16	8/16
$X\le 2$	0	1/16	6/16	12/16	14/16
$X\ge 3$	0	2/16	8/16	14/16	1

1:5. *a*) La función de distribución conjunta está dada por:

$X_1 \setminus X_2$	$X_2<0$	$X_2\le 0$	$X_2\ge 1$
$X_1<0$	0	0	0
$X_1\le 0$	0	6/20	12/20
$X_1\ge 1$	0	12/20	1

b) $F_{X_j}(x_j) = \frac{12}{20}\mathbf{1}_{[0,1)}(x_j) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x_j)$ para $j = 1, 2$.

1:6. *a)* —

b) $f_X(x) = \frac{2(n-x+1)}{n(n+1)} \mathbf{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}(x)$,
$f_Y(y) = \frac{2y}{n(n+1)} \mathbf{1}_{\{1,2,\ldots,n\}}(y)$

1:7. *a)* —

b) $X \sim \mathrm{Po}(p\lambda)$ y $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda)$

c) $e^{-\lambda(1-p)}$

1:8. *a)* $c = \frac{3}{2}$

b) $p = \frac{3}{32}$

c) $f_X(x) = x + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$,
$f_Y(y) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2) \mathbf{1}_{(0,1)}(y)$

1:9. *a)* $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2}$.

b) $f_X(x) = 12x(1-x)^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = f_Y(x)$

1:10. *a)* $\alpha = 2$.

b) $f_X(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$,
$f_Y(y) = ye^{-y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$

1:11. *a)* —

b) $f_X(x) = \frac{6}{7}(2x^2 + x) \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$

c) $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{15}{56}$.

1:12. *a)* —

b) $\mathrm{k} = 1$

c) $f_X(x) = xe^{-x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$,
$f_Y(y) = \frac{1}{2}y^2 e^{-y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$.

2. Vectores aleatorios

2:1. *a)* $\xi \sim \mathrm{Bin}(n = 3, p = 0.7)$

b) La distribución conjunta de (ξ, η) esta dada por:

$\eta \setminus \xi$	$\xi < 0$	$\xi \leq 0$	$\xi \leq 1$	$\xi \leq 2$	$\xi \geq 3$
$\eta < 0$	0	0	0	0	0
$\eta \leq 0$	0	0.027	0.027	0.027	0.027
$\eta \leq 2$	0	0.027	0.153	0.153	0.153
$\eta \leq 4$	0	0.027	0.216	0.363	0.363
$\eta \leq 6$	0	0.027	0.216	0.657	0.657
$\eta \geq 8$	0	0.027	0.216	0.657	1

No son independientes.

2:2. $\mathbb{P}(X \geq YZ) = \frac{3}{4}$.

2:3. $p = \frac{1}{12}$.

2:4. *a)* $F_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} 0 & \text{si } z,w < 0 \\ \frac{\mu}{\theta+\mu}\left[1-\exp\{-(\theta+\mu)z\}\right] & \text{si } z \geq 0, w \leq 0 \\ 1-\exp\{-(\theta+\mu)z\} & \text{si } z \geq 0, w \geq 1 \end{cases}$

b) —

2:5. *a)* $k = \frac{1}{\pi r_0^2}$

b) $f_Y(y) = \frac{2}{\pi r_0^2}(\sqrt{r_0^2 - y^2})\mathbf{1}_{(-r_0,r_0)}(y)$

c) No son independientes.

2:6. $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{2}{3}$.

2:7. *a)* $f_X(x) = e^{-(x-4)}\mathbf{1}_{(4,\infty)}(x)$

b) $\mathbb{E}[X] = 5$

2:8. $p = \frac{5}{8}$

2:9. Sea T el tiempo que espera A a B.

a) $F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \\ \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

b) $f_T(t) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\}}(t) + (1-t)\mathbb{1}_{(0,1)}(t)$

2:10. $p = \frac{1}{2}$.

3. Distribuciones condicionales

3:1. *a)* $\mathbb{P}(2X + Y \leq 9) \approx 0.9630$

b) $\mathbb{P}(X \geq 4 | Y = 2) = e^{-2}$

c) $\mathbb{P}(X \geq 3 | 2X + Y \leq 9) \approx 0.0624$

3:2. *a)* La tabla de probabilidades esta dada por:

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	$\frac{\binom{4}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}}$
1	$\frac{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}}$	0
2	$\frac{\binom{4}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}}$	0	0

b) $f_{X|Z=2}(x) = \frac{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\mathbb{I}_{\{0\}}(x)+\binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}\mathbb{I}_{\{1\}}(x)}{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2}+\binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}$

c) $\mathbb{E}[Y|Z = 1] = \frac{2}{3}$

3:3. $f_{X_i|Y=y}(x) = \frac{1}{y+1}\mathbb{I}_{0,1,\ldots,y}(x)$

3:4. $f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(y+\lambda)^{\alpha+1}}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$

$\Theta | Y = y \sim$Gamma$(\alpha+1, y+\lambda)$.

3:5. —

3:6. $\mathbb{E}[M|Q=5] = \frac{495}{127} \approx 3.89764$

3:7. $\mathbb{P}(X=1|Y>0) \approx 0.72607$

3:8. $f_{P|x=1}(p) = \frac{p^2 e^p}{e-2}\mathbb{I}_{(0,1]}(p)$
$f_{P|x=1}(2) \approx 0.57384$

4. Esperanza condicional y Covarianza

4:1. *a)* $f_Y(y) = 18y\left(2-18y^2\right)\mathbb{I}_{\left(0,\frac{1}{3}\right)}(y)$

b) $\mathbb{E}[Y \mid X=x] = \frac{x}{3}$

c) $\text{Cor}(X,Y) \approx 0.49237$ que representa una relación lineal positiva (media)

d) El valor esperado es $\frac{13}{45}$
La varianza es $\frac{43}{2025}$

4:2. $\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{8}$

5. Covarianza y correlación

5:1. $f_{Y|X}(y) = Xe^{-Xy}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$
$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{1}{X}$

5:2. *a)* $\mathbb{E}(T) = p\frac{1-r}{r}$
$\text{Var}(T) = p(1-p)(\frac{1-r}{r}) + p^2(\frac{1-r}{r^2})$

b) Hint: encontrar una relación entre la generadora de momentos de T y la generadora de momentos de N usando Esperanza Iterada.

5:3. La cantidad media retirada es $16,975$.
La desviación estandar de la cantidad retirada es aproximadamente $6,967.981511$.

5:4. $\text{Cov}(X,\varepsilon) = 0$

5:5. $\text{Cov}(X,Y) = -\frac{1}{3}$
$\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$

5:6. *a)* —

b) $\text{Var}\left(X_3 - \bar{X}\right) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$

c) $Cov(\overline{X}, X_3 - \overline{X}) = 0$

d) $Cov(X_3, X_3 - \overline{X}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$.

e) $Cov(X_1 - \overline{X}, X_3 - \overline{X}) = -\frac{\sigma^2}{n}$.

5:7. $\text{Cov}(X+Y, X+1.2Y) = 8.8$

6. Covarianza y Función generadora de momentos

6:1. —

6:2. —

6:3. $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$

6:4. —

6:5. —

6:6. $\mathbb{E}[X_1] = 0$ y $\mathbb{E}[X_2] = -1$
$\text{Vav}(X_1) = 1$ y $\text{Var}(X_2) = 2$
$\text{Corr}(X_1, X_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

6:7. $m_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-1}}{6} + \frac{3(1-2t)^{-2}}{6} + \frac{2(1-2t)^{-3}}{6}$
$m_Y(1/4) = \frac{11}{3}$

6:8.
a) $f(x,y,z) = \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-6\lambda}(6\lambda)^y}{y!} \cdot \frac{e^{-6\lambda}(6\lambda)^z}{z!} \mathbb{I}_{\{x,y,z \in \mathbb{N}_0\}}(x,y,z)$
b) $f_{(X,Y,Z)|T=t}(x,y,z) = \frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^y \left(\frac{2}{5}\right)^z \mathbb{I}_{\{t=x+y+z\}}(x,y,z)$
c) $\mathbb{P}(X = 3, Y = 20, Z = 13 \mid T = 46) \approx 0.0024157$

7. Repaso

7:1.
a) $f_{Y|X}(y) = xe^{-xy}\mathbb{I}(0,\infty)(y)$ t.q. $x \in (2,4)$
b) $\mathbb{P}(Y > 0.5 \mid X = 2) = e^{-1}$
$\mathbb{P}(Y > 0.5 \mid X = 4) = e^{-2}$
c) $\mathbb{E}[Y \mid X = 2] = \frac{1}{2} = 0.5$
d) $\mathbb{P}(Z > 30) = e^{-30}$

7:2.
a)

$x\backslash y$	0	1	2	3	4	5
0	0.49	0	0	0	0	0
1	0	0.168	0.168	0.084	0	0
2	0	0	0.009	0.036	0.027	0.018

b) $\text{Cov}(X,Y) = 0.7560$
$\text{Corr}(X,Y) \approx 0.9023$
c) $f_{Y|X=1}(y) = 0.4\mathbb{I}_{\{1,2\}}(y) + 0.2\mathbb{I}_{\{3\}}(y)$
d) $\mathbb{E}[G] = 1080.0$
$\text{Var}(G) \approx 1671600.0$

7:3.
a) $f(x,y,z) = \frac{3}{4\pi r^3}\mathbb{I}_{\{x^2+y^2+z^2 \leqslant r^2\}}(x,y,z)$
b) $f_{XY}(x,y) = \frac{3\sqrt{r-x^2-y^2}}{2\pi r^2}\mathbb{I}_{\{x^2+y^2 \leqslant r^2\}}(x,y)$

7:4.
a) $f_D(x) = \dfrac{\binom{n-m}{x}\binom{m}{m-x}}{\binom{n}{m}}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots,m\}}(x)$
b) $f_E(x) = \sum_{k=1}^m \dfrac{\binom{n-m-k}{x}\binom{m+k}{m-x}}{\binom{n}{m}} \cdot \dfrac{\binom{n-m}{k}\binom{m}{m-k}}{\binom{n}{m}}\mathbb{I}_{\{1,2,\ldots,m\}}(x)$
c) $\mathbb{P}(D = d \mid E = e) = \dfrac{\binom{n-m-d}{e}\binom{m+d}{m-e}\binom{n-m}{d}\binom{m}{m-d}}{\sum_{k=1}^m \binom{n-m-k}{e}\binom{m+k}{m-e}\binom{n-m}{k}\binom{m}{m-k}}$

7:5. *a*) $\mathbb{E}[S_5] = 15$
$\mathrm{Var}(S_5) = 60$

b) $S_5 \sim \mathrm{BinNeg}(p = 1/4, r = 5)$

c) $\mathbb{E}[S_K] = 15$
$\mathrm{Var}(S_K) = 105$

7:6. $\mathrm{Var}(W) = 7$

7:7. $\mathbb{E}[S_N] = 36.7$
$\mathrm{Var}(S_N) = 377.7$

7:8. $\mathbb{E}[S_5] = 20$
$\mathrm{Var}(S_5) = 60$

8. Distribución multinomial y normal multivariada

8:1. $P = \frac{24}{625} = 0.384$

8:2. *a*) $\mathbb{P}\left(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4\right) \approx 0.0028515$

b) $\mathbb{P}\left(X_1^2 < 5\right) \approx 0.211003$

c) $\mathbb{P}\left(X_0 + X_1 = 6\right) \approx 0.20508$

d) $\mathbb{P}\left(X_2 < 2 \mid X_1 = 5, X_0 = 3\right) = \frac{7}{16} = 0.4375$

8:3. *a*) $p \approx 0.079106$

b) $\mathrm{Corr}\left(X_1, X_4\right) \approx -0.14286$

8:4. $\mathbb{P}\left(Y_2 > 4 \mid Y_1 = 2\right) \approx 1 - \Phi(0.19781)$

8:5. $\mathbb{P}(Y > 5) = 1 - \Phi(0.\overline{3})$

8:6. $b = 0$

8:7. *a*) $Y_1 \sim N(-2, 28)$

b) $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 & -5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}\right)$

c) $\mathbb{E}\left[X_1 X_2\right] = 0$

d) $(Z \mid X_2 = 1) \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}\right)$

8:8. —

9. Transformación de variables aleatorias (caso univariado)

9:1. $Y_1 + n_2 - Y_2 \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, 0.2)$

9:2. *a*) $f_W(w) = \frac{1}{16}\mathbb{I}_{\{-3,3\}}(w) + \frac{2}{16}\mathbb{I}_{\{-2,2\}}(w) + \frac{3}{16}\mathbb{I}_{\{-1,1\}}(w) + \frac{4}{16}\mathbb{I}_{\{0\}}(w)$

b) $f_Y(y) = (q^2 + p^2)\mathbb{I}_{\{1\}}(y) + 2pq\mathbb{I}_{\{0\}}(y)$

9:3. —

9:4. *a*) $f_Y(y) = \frac{2}{b+a}\mathbb{I}_{(0,a)}(y) + \frac{1}{b+a}\mathbb{I}_{(a,b)}(y)$

b) Se mantiene igual la f.d.p f_Y

9:5. $Y \sim geo = \left(1 - e^{-\lambda}\right)$

9:6. $f_Y(y) = \frac{3}{8}\left[\frac{(1-\sqrt{1-y})^2}{2\sqrt{1-y}} + (2-y)^2\right]\mathbb{I}_{[0,1)}(y)$

9:7. $Y \sim Unif[0,1]$

9:8. $F_Y(y) = F_X(y)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$

9:9. $f_Y(y) = f_X(y)$

9:10. $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)$

10. Transformación de variables aleatorias

10:1. $f_{Y|X}(y) = Xe^{-Xy}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$
$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{1}{X}$

10:2. *a)* $f_N(n) = \binom{n+\alpha-1}{n}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n \mathbf{1}_{\{0,1,\ldots\}}(n)$. Esto es, marginalmente $N \sim \mathrm{NegBin}(\alpha,\, p)$ con $p = \frac{1}{1+\beta}$ (soporte $n = 0, 1, 2, \ldots$).
b) $\mathbb{E}[N] = \alpha\beta, \qquad \mathrm{Var}(N) = \alpha\beta(1+\beta)$.

10:3. —

10:4. $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{4}$.

10:5. *a)* $\frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$
b) $g(X) = Z = x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

10:6. —

10:7. $U \sim \mathrm{Exp}(1)$

10:8. $f_{\frac{X_1}{X_2}}(u) = \frac{\mathbb{I}_{(0,1)}(u) + \frac{1}{u^2}\mathbb{I}_{[1,\infty)}(u)}{2}$

10:9. *a)* $f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 ue^{-\lambda}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(u)\mathbb{I}_{(0,1)}(v)$
b) $U \sim \mathrm{Gamma}(2,\lambda)$
$V \sim \mathrm{Unif}(0,1) \equiv \mathrm{Beta}(1,1)$
c) $U \perp V$

10:10. $f_X(x) = \mathbb{I}_{\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: -x_2 < x_1 < 2 - x_2 \wedge x_2 < x_1 < 2 + x_2\}}(x)$
$p = \frac{1}{4}$

11. Sumas y cocientes de variables aleatorias

11:1. *a)* $X \sim \mathrm{Gamma}(2,\lambda)$
$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda}$
b) $f_W(w) = \frac{1}{w^2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)$
c) —

11:2. —

11:3. —

11:4. —

12. Distribución t de Student y distribución F y repaso

12:1. *a*) —
b) —

12:2. *a*) —
b) —

12:3. —

12:4. —

12:5. —

12:6. —

12:7. —

13. Estadísticos de orden

13:1. —

13:2. $f_R(r) = \frac{(n-1)(n)}{(2\theta)^n}(2\theta - r)r^{n-2}\mathbb{I}_{(0,2\theta)}(r)$

13:3. $n = 35$ (o bien $n \geq 34.091$)

13:4. *a*) $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = 6\,(1 - y_2)\,\mathbb{I}_{\{0<y_1<y_2<1\}}(y_1, y_2)$
b) $f_{Y_3|(Y_1=y_1,Y_2=y_2)}(y_3) = \frac{1}{1-y_2}\mathbb{I}_{(y_2,1)}\,(y_3)$ t.q. $0 < y_1 < y_2 < 0$

13:5. $Hint$. Exprese la $f.d.p.$ como producto de funciones marginales

13:6. *a*) —
b) —

13:7. —

13:8. —

14. Convergencia y Teorema Central del Límite

14:1. $p_n = [1 - \frac{e^{-x}}{n}]^n$
$\lim_{n\to\infty} p_n = e^{-e^{-x}}$

14:2. *a*) $\mathbb{E}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))] = 0$
b) $\mathrm{Var}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))] = F(x)(1 - F(x))$
c) $Hint$. aplicar Ley Débil de los Grandes Números

14:3. $Hint$. Expresar al variable X en términos de $\chi^2_{(1)}$'s

14:4. $Hint$. Expresar a p en términos de λ y n

14:5. *a*) —
b) —

14:6. $Pr \approx 0.8888$ (La respuesta es sensible al procedimiento por ser discreta)

14:7. $Pr \approx 0.3085$

14:8. *a*) $Pr \approx 0.0162$
b) $Pr \approx 0.2546$

15. Repaso final

15:1. *a)* $n \geq 2,000$

b) $n \gtrsim 384.16$

c) Chebyshev es una cota general no mejorable, pero particularmente puede no ser óptima.

15:2. *a)* $\mathbb{P}(2X > 1,\ 2Y < 1) = \frac{3}{8}$

b) $F(x,y) = \begin{cases} 0 & c.o.c \\ x^4 & 0 < x < 1 \wedge x < y \\ 2y^2x^2 - y^4 & 0 < y < x < 1 \\ 2y^2 - y^4 & x > 1 \wedge 0 < y < 1 \\ 1 & x > 1 \wedge y > 1 \end{cases}$

15:3. *a)* —

b) —

c) $\mathbb{E}[X] = 15$
$\mathbb{E}[Y] = 5$

15:4. *a)* $f(x,y) == \frac{2}{y^4}\mathbb{I}_{(1,\infty)}(y)\mathbb{I}_{(0,y)}(x)$

b) $f_X(x) = \frac{2}{3}\left(\mathbb{I}_{(0,1)}(x) + \frac{1}{x^3}\mathbb{I}_{(1,\infty)}(x)\right)$

c) $f_{Y|X}(y) = \frac{3}{y^4} \cdot \frac{\mathbb{I}_{(1,0)}(y)\mathbb{I}_{(0,y)}(x)}{\mathbb{I}_{(0,1)}(x)+\frac{1}{x^3}\mathbb{I}_{(1,x)}(x)} =$

d) –

15:5. *a)* $f_{Z,W}(z,w) = \frac{ze^{-z/\beta}}{\beta^2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(z)\frac{1}{(w+1)^2}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)$

b) $Z \perp W$
$f_{ZW}(z,w) = f_Z(z)f_W(w)$

15:6. $c \approx 0.923$

15:7. *a)* $c = (a+1)(a+2)$

b) —

c) $f_X(x) = (a+1)(a+2)x^a(1-x)\mathbb{I}_{(0,1)}(x)$

d) f no se puede escribir como producto de funciones marginales, entonces X y Y no son independientes

15:8. $m_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-1}}{6} + \frac{3(1-2t)^{-2}}{6} + \frac{2(1-2t)^{-3}}{6}$
$m_Y(1/4) = \frac{11}{3}$