

# Cálculo de Probabilidades II

## Cuaderno de Ejercicios

### Laboratorio

Varios colaboradores

20 de agosto de 2024

Versión 0.43

## Índice

Prefacio	2
1. Vectores Aleatorios	3
2. Variables aleatorias independientes	5
3. Distribuciones condicionales	6
4. Momentos condicionales	7
5. Covarianza y correlación	8
6. Función generadora de momentos	10
7. Repaso	11
8. Distribución multinomial y normal multivariada	12
9. Transformación de variables aleatorias (caso univariado)	13
10. Transformación de variables aleatorias (caso multivariado)	14
11. Sumas y cocientes de variables aleatorias	15
12. Distribución t de Student y distribución F	16
13. Estadísticos de orden	16
14. Convergencia y Teorema Central del Límite	17
15. Repaso final	18

<b>Respuestas</b>	<b>20</b>
1. Introducción . . . . .	20
2. Vectores aleatorios . . . . .	21
3. Distribuciones condicionales . . . . .	22
4. Momentos condicionales . . . . .	23
5. Covarianza y correlación . . . . .	23
6. Función generadora de momentos . . . . .	24
7. Repaso . . . . .	24
8. Distribución multinomial y normal multivariada . . . . .	25
9. Transformación de variables aleatorias (caso univariado) . . . . .	25
10. Transformación de variables aleatorias (caso multivariado) . . . . .	26
11. Sumas y cocientes de variables aleatorias . . . . .	26
12. Distribución t de Student y distribución F . . . . .	27
13. Estadísticos de orden . . . . .	27
14. Convergencia y Teorema Central del Límite . . . . .	28
15. Repaso final . . . . .	28

## Prefacio

Hace tres años se iniciaron las sesiones de ejercicios que llaman *laboratorios* de los cursos de Cálculo de Probabilidades I y II. Los encargados de los laboratorios inicialmente fueron David I. López Romero y L. Jordán Linares Pérez, alternándose los cursos. Cada uno de ellos colectó los ejercicios para sus sesiones. Ahora hemos empezado a recuperar las respuestas de los ejercicios y resolveremos una selección de ellos. Este cuaderno es el resultado de ellos.

Una segunda versión incluye las colaboraciones de Caleb Iván Gopar Morales y José Carlos Cruz Aranda, de la segunda generación de laboratoristas, quienes aportaron más ejercicios e uniformizaron la notación en los ejercicios de laboratorio de Cálculo de Probabilidades II.

La tercera versión que aquí se presenta refleja el cuidadoso trabajo de Fernando Pérez Millán y José Manuel Altamirano Zevallos, quienes además aportaron el resultado de los problemas.

Laboratorista	semestre	año
L. Jordán Linares Pérez	otoño	2021
L. Jordán Linares Pérez	primavera	2022
David I. López Romero	otoño	2022
Caleb I. Gopar Morales	primaver	2022
Caleb I. Gopar Morales	otoño	2022
J. Carlos Cruz Aranda	primavera	2023
Fernando Pérez Millán	otoño	2023
José Manuel Altamirano Zevallos	primavera	2024

Si nos equivocamos en algunos resultados agradeceremos que nos lo indique para corregirlos. La siguiente actualización del cuaderno se hará en enero del 2025.

Cualquier error que identifique, comentario y/o sugerencia serán bienvenido. Diríjalo a Ernesto Barrios <ebarrios at itam.mx>.

Ciudad de México, 29 de julio de 2024

## 1. Vectores Aleatorios

1. Una urna tiene 2 bolas: una marcada con el número "0" y otra marcada con el número "1". Se sacan dos bolas con reemplazo. Sea  $X$  la v.a. que denote el valor máximo entre los números de las bolas extraídas y sea  $Y$  el valor mínimo.
  - a) Obtenga la función masa de probabilidad (*f.m.p.*) conjunta.
  - b) Obtenga las *f.m.p.*'s marginales de  $X$  e  $Y$ .
2. Considera el experimento de lanzar dos tetraedros (poliedro regular de 4 caras) con caras etiquetadas del 1 al 4. Sea  $X$  el número de la cara hacia abajo del primer tetraedro y sea  $Y$  el número más grande de las caras hacia abajo. Encuentra la función de distribución de  $(X, Y)$ .
3. Se sabe que en un cesto con 5 mangos dos de ellos están podridos. Un valiente changuito probará cada mango, uno a la vez, hasta encontrar los dos podridos. Sea  $N_1$  el número de mangos que el changuito probará hasta encontrar el primer mango podrido, y  $N_2$  el número de mangos adicionales que probará hasta identificar la segunda fruta podrida. Encuentre la *f.m.p* conjunta de  $N_1$  y  $N_2$ .
4. Considera el experimento de lanzar 4 veces una moneda. Sea  $X$  el número de soles en los primeros 3 lanzamientos y sea  $Y$  el número de águilas en los últimos 3 lanzamientos. Encuentra la función de distribución de  $(X, Y)$ .
5. Se extraen dos pelotitas de una bolsa que contiene: dos pelotitas rosas, una amarilla y dos verdes. Considerando un tipo de muestreo sin reemplazo, define una variable aleatoria  $X_1$  que determine si el resultado de la primera extracción es rosa o no lo es. Similarmente, define una variable  $X_2$  para determinar si la segunda extracción es rosa o no lo es.
  - a) Describe la función de distribución conjunta de  $(X_1, X_2)$ .
  - b) Determina la distribuciones marginales de  $X_1$  y de  $X_2$ .
6. Considere vector aleatorio  $(X, Y)$  con *f.m.p.*

$$f(x, y) = \frac{4xy}{n^2(n+1)^2}, \quad x, y, = 1, 2, \dots, n$$

- a) Verificar que  $f$  es *f.m.p. propia*.
- b) Calcular:
  - 1)  $\mathbb{P}(X = 1)$ ,
  - 2)  $\mathbb{P}(X = Y)$ ,
  - 3)  $\mathbb{P}(X + Y = n + 1)$ .
7. Sean  $X, Y$  variables aleatorias discretas con función de masa de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{n(n+1)} & x \leq y, x, y \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} .$$

- a) Verifique que la *f.m.p.* conjunta sea propia.
- b) Encuentre las funciones de masa de probabilidad  $f_X$  y  $f_Y$ .

8. Considere el vector aleatorio  $(X, Y)$  con función de masa de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda} p^x (1-p)^{y-x}}{x!(y-x)!} \mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(x) \mathbb{1}_{\{x,x+1,\dots\}}(y)$$

- En un plano cartesiano describa gráficamente el soporte de la distribución conjunta.
- Encuentre las funciones de masa de probabilidad  $f_X$  y  $f_Y$ .
- Determine  $\mathbb{P}(X = Y)$ .

9. Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x + cy^2 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- Halle el valor de la constante  $c$ .
- Calcule  $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{2})$ .
- Encuentre las funciones de densidad marginales  $f_X$  y  $f_Y$ .

10. Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- Calcule  $\mathbb{P}(X < Y)$ .
- Obtenga las *f.d.p.*'s  $f_X, f_Y$ .

11. Considere el vector aleatorio  $(X, Y)$  con *f.d.p.* conjunta dada por

$$f(x, y) = (\alpha - 1)x^{\alpha-2}e^{-y}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha > 1, 0 \leq x \leq y$$

- Encuentre el valor de  $\alpha$ .
- Calcule las *f.d.p.*'s marginales de  $X$  y  $Y$ .

12. La *f.d.p.* conjunta de  $X$  y  $Y$  está dada por

$$f(x, y) = \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}) \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \mathbb{1}_{(0,2)}(y).$$

- Verifique que  $f$  sea un función de densidad propia.
- Encuentre la función de densidad marginal de  $X$ .
- Calcule  $\mathbb{P}(X > Y)$

13. Considere el vector aleatorio  $(X, Y)$  con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = kxe^{-y} \mathbb{1}_{(0 < x < y)}(x, y).$$

- Describa gráficamente el soporte de la distribución.
- Encuentre el valor de  $k$  para que la función sea función de densidad conjunta.
- Encuentre las funciones de densidad marginales.

14. Considere el vector aleatorio  $(X, Y)$  con función de probabilidad acumulada conjunta dada por

$$F_{XY}(x, y) = (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta y})(1 - e^{-x})(1 - e^{-y})$$

Con  $x, y \geq 0$ , para  $\alpha = 1/2$  y  $\beta = 1/3$ , determine la probabilidad de los siguientes eventos:

- a)  $A = \{X \leq 1, Y \leq 2\}$ .  
 b)  $B = \{X \geq 2, Y > 1\}$ .
15. Considere las variables aleatorias continuas  $X$  y  $Y$  con la función de densidad conjunta  $f$  dada por

$$f(x, y) = \frac{g(x)g(y)}{G(x)} \mathbb{1}_{\{-\infty < y < x < \infty\}}(x, y)$$

donde  $G(u)$  es la función de distribución tal que  $g(u) = \frac{dG(u)}{du}$ . Muestre que las *f.d.p.*'s de  $X$  y  $Y$  son respectivamente  $f_X(x) = g(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$  y  $f_Y(y) = -g(y) \log G(y) \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$ . Verifique que  $f_Y$  sea una *f.d.p.* legítima.

## 2. Variables aleatorias independientes

- Lema de factorización.** Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de densidad de probabilidades conjunta  $f$ . Demostrar que  $X$  es independiente de  $Y$  si y solamente si  $\exists g, h$  funciones *t.q.*  $f(x, y) = h(x)g(y)$ .
- En una jaula hay un ratón y dos pollitos. La probabilidad de que cada uno de los animales salga de la jaula en la próxima hora es de 0.3. Esperamos una hora y observamos lo que queda en la jaula.
  - ¿Cómo se distribuye la variable aleatoria  $\xi$  que cuenta el número de animales que quedan en la jaula?
  - Si  $\eta$  es el número total de patas de los animales que hay en la jaula, encuentre la distribución conjunta de  $(\xi, \eta)$ . ¿Son  $\xi$  y  $\eta$  independientes?
- Sean  $X, Y, Z$  variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ . Calcule  $\mathbb{P}(X \geq YZ)$ .
- Encuentre la probabilidad de que el polinomio  $Ax^2 + Bx + 1$  tenga al menos una raíz real. Donde  $A, B$  son variables aleatorias independientes que siguen una distribución  $\text{Unif}(0, 1)$ .
- Sean  $\theta > 0$  y  $\mu > 0$ , fijas y  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con medias  $1/\theta$  y  $1/\mu$  respectivamente. En estudios experimentales es común el caso de *observaciones censuradas*. Luego, en lugar de observar  $X$  e  $Y$  se registran

$$Z = \min\{X, Y\} \quad \text{y} \quad W = \begin{cases} 1 & \text{si } Z = X \\ 0 & \text{si } Z = Y \end{cases}$$

- a) Determine la función de distribución conjunta de  $(Z, W)$ .

- b) Muestre que las variables aleatorias  $Z$  y  $W$  son independientes.
6. Considere el círculo  $C$  de radio  $r_0$  centrado en el origen
- $$f(x, y) = k\mathbb{I}_C(x, y)$$
- a) Determina  $k$  para que sea una función de densidad conjunta.  
 b) Encuentre la f.d.p marginal de  $Y$ .  
 c) ¿Son  $X$  y  $Y$  variables aleatorias independientes?
7. Sean  $X$  y  $Y$  dos variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con medias  $\mu_X = 1$  y  $\mu_Y = 2$ , respectivamente. Calcule  $\mathbb{P}(X < Y)$ .
8. Los precios de apertura por acción  $Y_1$  y  $Y_2$ , de dos acciones similares son variables aleatorias i.i.d. con función de densidad de probabilidad común  $f$  dada por

$$f(y) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y-4)}\mathbb{I}_{(4, \infty)}(y)$$

En una mañana determinada, un inversionista comprará acciones de la emisión menos costosa. Determine:

- (a) la función de densidad de probabilidad de la acción que comprará el inversionista;  
 (b) el costo esperado por acción que pagará el inversionista.
9. Una estudiante sale de su casa entre las 7:00 a.m. y las 7:40 a.m. para dirigirse al Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). El tiempo de transporte que le toma llegar al ITAM varía entre 30 y 40 minutos. Suponiendo que la hora de salida de la estudiante,  $X$ , y el tiempo de viaje,  $Y$ , se distribuyen uniforme e independientemente, determine la probabilidad  $p$  de que la estudiante llegue a la escuela antes de las 8:00 a.m.

### 3. Distribuciones condicionales

1. Las concentraciones de monóxido de carbono ( $X$ ) y de bióxido de carbono ( $Y$ ) en las emisiones de un coche elegido al azar en la Ciudad de México, siguen una distribución conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = 2e^{-x-y}\mathbb{I}_{\{0 \leq y < x < \infty\}}(x, y)$$

- (a) Para que un coche pase la verificación se necesita que  $2X + Y \leq 9$ . Calcule la probabilidad de que un coche elegido al azar pase la verificación.  
 (b) Supón que al medir la cantidad de bióxido de carbono se observa una concentración de  $Y = 2$ . ¿Cuál es la probabilidad de que la concentración de monóxido de carbono ( $X$ ) sea mayor que 4?  
 (c) ¿Cuál es la probabilidad de que un coche que ha pasado la verificación emita una concentración de monóxido de carbono ( $X$ ) mayor que 3?
2. De un grupo de 9 estudiantes internacionales: 4 mexicanos, 2 españoles y 3 franceses, se eligen tres estudiantes para otorgarles una beca. Sea  $X$  el número de estudiantes mexicanos elegidos, y  $Y$  el número de estudiantes españoles elegidos.
- (a) Construya la distribución conjunta (tabla de probabilidades) de  $X$  y  $Y$ .  
 (b) Sea  $Z$  el número de estudiantes franceses elegidos. Obtenga  $f(x|z = 2)$ .

- (c) Si se sabe que exactamente un estudiante francés recibirá beca, calcule el número esperado de estudiantes españoles que recibirán beca.
- Sean  $X_1, X_2$  v.a.i.i.d. que siguen una distribución  $\text{Geom}(p)$  con soporte  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Muestre que  $Y = X_1 + X_2 \sim \text{BinNeg}(2, p)$ . Determine la distribución de  $(X_i | Y = y)$ .
  - Sea  $Y$  una v.a. que sigue una distribución exponencial con parámetro de tasa  $\theta$ . A su vez se deja a  $\theta$  variar como la v.a.  $\Theta$  que sigue una distribución Gamma con parámetros  $\alpha$  y  $\lambda$  (tasa). Encuentre la función de densidad marginal de  $Y$  y la densidad condicional de  $\Theta$  dado  $Y = y$ .
  - El número total de defectos  $X$  en un chip sigue una distribución de Poisson parámetro  $\alpha$ . Suponga que cada defecto tiene una probabilidad  $0 < p < 1$  de caer en una región específica  $R$ , y que la localización es independiente del número de defectos. Verifica que la f.m.p. de  $N$ , el número de defectos en  $R$ , sigue una distribución Poisson con media  $\alpha p$ .
  - El número de tormentas que ocurren en la Ciudad México en un año sigue una distribución binomial con  $n = 5$  y  $p = 0.6$ . Dado que  $m$  tormentas ocurren en la Ciudad de México en un año, el número de tormentas que afectan a la ciudad de Querétaro en el mismo año es  $m$  con probabilidad  $1/2$ ,  $m + 1$  probabilidad  $1/3$  y  $m + 2$  con probabilidad  $1/6$ . Calcule el número esperado de tormentas que ocurren en la Ciudad de México en un año dado que en Querétaro se registraron 5 tormentas.
  - Sea  $X$  la variable aleatoria que toma los valores de  $\pm 1$  y con probabilidad  $1/3$  toma el valor 1. Sea  $Z$  una variable aleatoria que sigue una distribución Normal estándar e independiente de  $X$ . Defina  $Y = Z + X$ . Encuentre  $\mathbb{P}(X = 1 | Y > 0)$ .
  - Una máquina acuñadora de monedas produce monedas para las cuales la probabilidad de que caiga “sol” es una variable aleatoria  $P$  con función de densidad dada por  $f_P(p) = pe^p \mathbb{I}_{(0,1]}(p)$ . Suponga que lanza una moneda y cae “sol”, determine la correspondiente función de densidad condicional de  $P$  y evalúela en  $P = 1/2$ , exprésela con al menos 4 decimales.

#### 4. Momentos condicionales

- Sea  $Y$  una v.a. tal que su segundo momento es finito. Se define la varianza condicionada de  $Y$  dada la v.a.  $X$  como la variable aleatoria:

$$\text{Var}(Y|X) := \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|X])^2 | X]$$

Demuestre:  $\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))$

- Considere el vector aleatorio continuo  $(X, Y)$  con función de densidad de probabilidades conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} k, & \text{si } 0 < x^2 < y < 1, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Determinar el valor máximo de  $\text{Var}(Y|X = x)$  para  $-1 \leq x \leq 1$ .

- Sean  $X$  y  $Y$  v.a.'s con densidad conjunta  $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$  para  $x, y \geq 0$ . Calcule la densidad condicional y la esperanza condicional de  $Y$  dada  $X$ .



4. Se tiran dos dados honestos y la suma de las caras se denota por  $N$ . Luego se tira  $N$  veces una moneda cargada al águila con  $p = 0.55$  y se denota por  $Y$  el número de águilas obtenidas. Determine  $\mathbb{E}[Y]$  y  $\text{Var}(Y)$ .
5. De acuerdo con estadísticas de una compañía aseguradora, el 60 % de los conductores se clasifican como buenos conductores y el resto como malos conductores. Se sabe que, para buenos conductores, el monto promedio de reclamación en dólares es de 1,400 con varianza 40,000. Para los malos conductores, el monto medio de reclamación en dólares es de 2,000 con varianza de 250,000. Calcular la varianza del monto de un siniestro seleccionado aleatoriamente
6. Sea  $(X_i, i \in \mathbb{N})$  una sucesión de v.a.i.i.d con f.d.p común dada por

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(x).$$

Sea  $N$  una v.a independiente de las  $X_i$ 's y con distribución uniforme en  $\{1, 2, 3\}$ . Considere la suma aleatoria

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

Encuentre su media y su varianza.

7. Carla juega un total de  $N$  juegos de ajedrez en toda su vida. Suponga que  $N$  se distribuye geoméricamente con parámetro  $r$ , fijo. Suponga además que la probabilidad de ganar cada juego es  $p$  independientemente de los demás. Sea  $T$  el número de total de partidas que ganó Carla en su vida.
- Calcule la media y la varianza de  $T$ .
  - Confirme la media de  $T$  mediante el cálculo de su función generadora de momentos.
8. El número de personas que retira efectivo de cierto cajero automático entre las 10 y las 11 de la mañana se modela mediante una distribución binomial negativa con una media de 9.7 personas con una desviación estándar de 3.9. Además se ha visto que la cantidad de efectivo que saca una persona es razonablemente modelado mediante una distribución normal centrada en \$1750 y un rango intercuartílico de \$600. Si se supone independencia entre el número de personas que retira efectivo y la cantidad de efectivo que cada una saca, determine la cantidad media de efectivo que se retira entre las 10 y las 11 de la mañana así como su desviación estándar.

## 5. Covarianza y correlación

1. Sea  $(X, Y)$  v.a. tal que  $\mathbb{E}[XY] < \infty$ . Demostrar:

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X | Y]]$$

2. Sea  $X$  la proporción de personas económicamente activas cuyo ingreso es inferior a un salario mínimo (SM), y sea  $Y$  la proporción de personas cuyo ingreso es superior a 6 SM. La función de densidad conjunta entre  $X$  y  $Y$  está dada por

$$f(x, y) = 162xy \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2/3\}}(x) \mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq x/2\}}(y).$$

Además, se sabe que la función de densidad marginal de  $X$  es

$$f_X(x) = \frac{81}{4}x^3 \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq 2/3\}}(x),$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{8}{15}, \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{8}{27}, \quad \mathbb{E}[Y] = \frac{8}{45}, \quad \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{27}.$$

- Obtenga la función de densidad marginal de  $Y$ .
- Obtenga la proporción esperada de personas económicamente activas cuyo ingreso es superior a 6 SM, si se conoce la proporción de personas económicamente activas cuyo ingreso es inferior a un SM.
- Calcule el coeficiente de correlación entre las variables  $X$  y  $Y$  e interprete su valor.
- Las personas que tienen un ingreso inferior a un SM no pagan impuestos. Se propone que aquellos que tienen un ingreso inferior a 6 SM tampoco lo hagan. ¿Cuál será el valor esperado y varianza de la proporción de personas con un ingreso entre 1 y 6 SM?

3. Considere el vector aleatorio  $(X, Y)$  con función de densidad propia conjunta dada por

$$f(x, y) = \frac{2}{x} e^{-2x} \mathbb{I}_{\{0 \leq y \leq x < \infty\}}(x, y).$$

Determine  $\text{Cov}(X, Y)$ .

- Sean  $X, Y$  v.a.'s. Se define  $\varepsilon = Y - \mathbb{E}(Y|X)$ . Determine  $\text{Cov}(X, \varepsilon)$ .
- Suponga una urna con tres bolas numeradas 1,2,3. Dos bolas son seleccionadas de la urna sin reemplazo. Sea  $X$  el número de la primera bola extraída y  $Y$  el número de la segunda bola extraída. Determine  $\text{Cov}(X, Y)$  y  $\rho_{XY}$ .
- Sean  $X, Y$  v.a.'s., se definen  $U = a + bX$  y  $V = c + dY$ , con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Muestra que  $|\rho_{XY}| = |\rho_{UV}|$ .
- Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con media y varianza común  $\mu_X$  y  $\sigma_X^2$  respectivamente. Sea  $n > 3$  y  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ,
  - Demuestre que  $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
  - Calcule la  $\text{Var}(X_3 - \bar{X})$ .
  - Determine  $\text{Cov}(\bar{X}, X_3 - \bar{X})$ .
  - Determine  $\text{Cov}(X_3, X_3 - \bar{X})$ .
  - Calcule  $\text{Cov}(X_1 - \bar{X}, X_3 - \bar{X})$ .
- Considere la siguiente información de dos variables aleatorias

$$\mathbb{E}[X] = 5, \quad \mathbb{E}[X^2] = 27.4,$$

$$\mathbb{E}[Y] = 7, \quad \mathbb{E}[Y^2] = 51.4,$$

$$\text{Var}(X + Y) = 8.$$

Calcula la  $\text{Cov}(X + Y, X + 1.2Y)$ .

## 6. Función generadora de momentos

1. Sean  $X$  y  $Y$  variables aleatorias con función generadora de momentos conjunta  $m_{XY}(t, s)$ . Considere  $\psi_{XY}(t) = \ln(m_{XY}(t, s))$ . Demuestre:

- (a)  $\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, 0) = \mathbb{E}[X]$ ,  
 (b)  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(0, 0) = \text{Var}(X)$ ,  
 (c)  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial s}(0, 0) = \text{Cov}(X, Y)$ .

2. Considere un vector aleatorio  $(X_1, X_2)$  con función generadora de momentos conjunta dada por

$$m(t_1, t_2) = \exp \left\{ -t_2 + \frac{1}{2}t_1^2 - t_1 t_2 + t_2^2 \right\}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Calcule  $\mathbb{E}[X_i]$ ,  $\text{Var}(X_i)$  y  $\text{Corr}(X_1, X_2)$ .

3. Sean  $Y_i \sim \text{Geom}(p)$   $i=1, 2, \dots, r$  v.a.i.i.d, entonces  $Y_1 + \dots + Y_r \sim \text{BinNeg}(r, p)$ .  
 4. Sea  $X_1, X_2, \dots$ , una sucesión de v.a.i.i.d.'s con función generadora de momentos  $m_X$  y  $N$  una variable entera positiva, independiente de los  $X_i$ 's, con función masa de probabilidad  $f_N$ . Determine la f.g.m.  $m_Y(t)$ , donde

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i.$$

Si las  $X_i$  siguen la distribución exponencial de media  $\theta = 2$  y  $N$  tiene la f.m.p. dada por la tabla

$n$	1	2	3
$p$	1/6	3/6	2/6

Evalúe  $m_Y(1/4)$ .

5. El número de mensajes que llegan al servidor en un intervalo de tiempo  $t$  (medido en horas) sigue una distribución Poisson con media  $\lambda t$ , para alguna  $\lambda > 0$ , fijo. El número de mensajes en intervalos de tiempo disjuntos son independientes. Sean  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  el número de mensajes recibidos entre 9am y mediodía, del mediodía a las 6pm y de 6pm a medianoche, respectivamente. Responda los siguientes reactivos:
- a) Determine la función masa de probabilidad conjunta del vector aleatorio  $(X, Y, Z)$ .  
 b) Si se sabe que el número total de mensajes  $T$  entre 9am y medianoche fue de  $t$ , determine la función masa de probabilidad conjunta de  $(X, Y, Z)$ .  
 c) Calcule  $\mathbb{P}(X = 3, Y = 20, Z = 13 | T = 36)$  y exprese la con al menos 4 decimales.
6. Sean  $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , v.a.i.i.d. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2.$$

7. Sean  $X_1$  y  $X_2$  v.a.i.i.d. exponencialmente con valor esperado  $\theta$ . Sean  $\delta > 0$  y  $\mu \in \mathbb{R}$ . Obtenga la función generadora de momentos  $m(t)$  de la v.a.  $W$  dada por

$$W = \delta(X_1 - X_2) + \mu$$

indicando su dominio de convergencia, esto es, para qué valores de  $t$  está definida  $m$ .

## 7. Repaso

1. Los precios ( $X$ ) y cantidades ( $Y$ ) de las ventas diarias al por mayor de cerveza, en un mercado regional de la zona norte de México, están determinados por la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} x e^{-xy} \mathbb{I}_{[2,4]}(x) \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Donde los precios son medidos en pesos y las cantidades en 100,000 unidades de litros (por ejemplo,  $y = 2$  significa que 200,000 litros fueron vendidos y  $x = 1$  significa que se vendió el litro a un peso).

- Encuentre  $f_{Y|X}(y|x)$ .
  - ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de cerveza vendida exceda 50,000 litros si el precio es de 2 pesos? ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad de cerveza vendida exceda 50,000 litros si el precio es de 4 pesos?
  - Encuentre  $\mathbb{E}(Y|X = 2)$
  - Sea  $Z = XY$  la variable aleatoria que denota las ventas totales diarias en pesos durante el verano. ¿Cuál es la probabilidad de que las ventas diarias totales excedan \$3,000,000 pesos?
2. Una persona participa en un concurso de dos etapas. En la primera etapa se tiran 2 dardos, la probabilidad de que acierte en el centro es de 0.3. El número de veces que acertó en el centro es el número de pelotas que va a extraer de una caja, sin reemplazo. La caja tiene dos pelotas marcadas con el número 1, dos con el número 2 y una con el número 3. Sea  $X$ : el número de veces que acierta en el centro, y  $Y$ : la suma de los números en las bolas extraídas.
- Encuentra la *f.m.p.* conjunta de  $X$  y  $Y$ .
  - Encuentra la covarianza y el coeficiente de correlación.
  - Encuentra la función de densidad de  $Y$ , dado que solo se acertó una vez el tiro al blanco.
  - Si la ganancia es  $G = 1000Y$ , encuentra la esperanza y varianza de la ganancia.
3. Sea  $(X, Y, Z)$  un vector aleatorio que representa un punto aleatorio dentro de una esfera de radio  $r$ .

- Encuentre la función de densidad conjunta del vector  $(X, Y, Z)$ .
- Encuentre la función de densidad marginal de  $(X, Y)$

*Hint.* La *f.m.p.* conjunta debe ser una constante por ser isotrópica (la probabilidad es igual en cualquier dirección).

4. Se tiene una colección de  $n$  problemas de los cuales  $m$  de ellos se usaron en el examen final del *periodo de mayo*. Para el *periodo de diciembre* se seleccionaron al azar  $m$  problemas y para el *periodo de enero* nuevamente se han elegido al azar  $m$  problemas. Sea  $D$  la variable aleatoria que denota el número de problemas en diciembre que no fueron usados en el periodo de mayo y  $E$  que denota el número de problemas del periodo de enero no usados anteriormente. Suponga que  $n \geq 3m$ .

Responda los siguientes incisos. La respuesta debe quedar expresada en términos de los parámetros  $n$  y  $m$ .

- (a) Determine  $f_D$ , la función masa de probabilidad marginal de  $D$ .
- (b) Determine  $f_E$ , la función masa de probabilidad marginal de  $E$ .
- (c) Si sabe que  $e$  de los problemas seleccionados para enero no fueron utilizados anteriormente, determine la probabilidad de que  $d$  de los  $m$  problemas de diciembre no hayan sido usados en el periodo de mayo.

## 8. Distribución multinomial y normal multivariada

1. Considere que un dado honesto se lanza siete veces de manera independiente. Calcule la probabilidad  $p$  de que cada una de las caras haya salido en una ocasión si se sabe que la cara 1 salió dos veces exactamente.
2. Tres monedas honestas se lanzan 10 veces. Sea  $X_i$  el número de veces que se obtuvieron  $i$  águilas,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Note que  $X_0 + X_1 + X_2 + X_3 = 10$ . Calcule las siguientes probabilidades.
  - a)  $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4)$
  - b)  $\mathbb{P}(X_1^2 < 5)$
  - c)  $\mathbb{P}(X_0 + X_1 = 6)$
  - d)  $\mathbb{P}(X_2 < 2 | X_1 = 5, X_0 = 3)$
3. Se hacen cuatro observaciones independientes en un intervalo que sigue una *f.d.p.* dada por  $f(r) = (1 - |r|)\mathbb{I}_{(-1,1)}(r)$ . Suponga que el intervalo se divide en 4 subintervalos de la misma longitud.
  - (a) Determine la probabilidad  $p$  de que una de las observaciones caiga en el subintervalo del extremo izquierdo; otra en el siguiente subintervalo; dos más en el siguiente; y que no haya observaciones en el subintervalo del extremo derecho.
  - (b) Suponga ahora 20 observaciones independientes. Sea  $X_i$  el número de observaciones en el  $i$ -ésimo subintervalo ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Determine la correlación entre  $X_1$  y  $X_4$
4. Sean  $X_1, X_2$  y  $X_3$  variables aleatorias independientes, tales que  $X_1$  y  $X_3$  se distribuyen  $N(1, 1)$  y  $X_2$  se distribuye  $N(0, 1)$ . Defina  $Y_1 = X_1 + 2X_2$  y  $Y_2 = X_2 + 3X_3$ . Determine  $\mathbb{P}(Y_2 > 4 | Y_1 = 2)$ . Expresé el resultado en términos de la función de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar.
5. Considere  $(X, Y)$  un vector aleatorio normal bivariado tal que  $\mu_X = 2, \sigma_X^2 = 4, \mathbb{E}[Y|X = x] = 2 + x$ , y  $\text{var}(Y|X = x) = 5$ . Calcule  $\mathbb{P}(Y > 5)$ .
6. Sea  $X^T = (X_1, X_2, X_3)^T$  un vector aleatorio tal que  $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$ , con

$$\mu = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine todos los posibles valores  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tales que las variables aleatorias  $X_2$  y  $Y = aX_1 + bX_2 + cX_3$  sean independientes.

7. Sea  $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$ , donde

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- (a) Encuentre la distribución de  $Y_1 = 3X_1 + X_2 - X_3$ .
- (b) Encuentre la distribución conjunta de  $Y_1$ , y  $Y_2 = X_2 + X_3$ .
- (c) Encuentre  $\mathbb{E}[X_1 X_2]$
- (d) Sea  $Z = (X_1, X_3)^T$  y  $X_2 = 1$  Encuentre la distribución condicional de  $Z$  dado  $X_2 = 1$
8. Si  $(X, Y)$  tiene f.d.p normal bivariada

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right\}$$

Demuestre que  $\text{corr}(X^2, Y^2) = \rho^2$ .

## 9. Transformación de variables aleatorias (caso univariado)

1. Demuestre el siguiente teorema:

Sea  $X$  v.a. continua con f.p.a.  $F_X$ , f.d.p.  $f_X$  y soporte  $S_X$ . Supongamos:

i)  $Y = g(X)$  es inyectiva de  $S_X$  a  $S_Y$

ii)  $X = g^{-1}(Y)$  es derivable respecto a  $y$ , continua y no cero  $\forall y \in S_Y$ .

$\therefore Y$  tiene f.d.p.  $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y) \right| \mathbb{I}_{S_Y}(y)$

2. Sea  $X \sim \text{Unif}(-a, b)$ . t.q.  $0 < a < b$

a) Obtenga la función de densidad de  $Y = |X|$ .

b) Si el soporte de la v.a.  $X$  cambia a  $(-b, a)$ , ¿cuál es la f.d.p. de  $Y$ ?

3. Sea  $X$  una v.a. con función de distribución (f.p.a.) dada por

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \lambda > 0$$

Sea  $Y$  la v.a. definida en términos de  $X$  como  $Y = m$ , si  $m \leq X < m + 1$ , donde  $m$  es un entero no negativo. Esta función se conoce como *piso o suelo*, y se denota con  $Y = \lfloor X \rfloor$ . ¿Cómo se distribuye  $Y$ ?

4. Sea  $X$  una v.a. continua con función de densidad

$$f(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2 \mathbb{I}_{[-1,1]}(x).$$

Defina la siguiente v.a.

$$Y = \begin{cases} 1 - X^2, & \text{si } X \leq 0, \\ 1 - X, & \text{si } X > 0. \end{cases}$$

y encuentre su f.d.p.

5. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad  $f_X(x) = |x| \mathbb{I}_{[-1,1]}(x)$ . Encuentre la correspondiente función de densidad de  $Y = X^2$ .
6. Considere la variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F_X(x)$ . Defina la variable aleatoria  $Y = \max\{0, X\}$ . Encuentre la función de distribución  $F_Y(y)$  en términos de  $F_X(x)$ .
7. Si  $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathbb{I}_{(-\infty, +\infty)}$ , encuentre la distribución de  $Y = 1/X$ .
8. Sea  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Encuentre la f. d. p. de  $Y = e^X$ . La densidad se conoce como función de densidad lognormal.

## 10. Transformación de variables aleatorias (caso multivariado)

1. Sea  $a$  una constante. Demuestre que la diferencia de dos variables aleatorias independientes, ambas con distribución uniforme en el intervalo  $(a - 1/2, a + 1/2)$  tiene función de densidad:

$$f(u) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{si } -1 < u < 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

2. Considere  $(X, Y)$  un vector aleatorio con f.d.p conjunta dada por

$$f_{XY}(x, y) = ye^{-y(x+1)}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(y).$$

Encuentre la función de densidad de  $U = XY$ .

3. Sea  $X = (X_1, X_2)$  un v.a. con f.d.p. conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 x_2^2} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x_1) \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x_2).$$

Encuentre la f.d.p. de  $X_1/X_2$ .

4. Suponga que  $X_1$  y  $X_2$  son variables aleatorias independientes con densidad exponencial, esto es,  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ . Sean  $U = X_1 + X_2$  y  $V = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$

- (a) Encuentre la función de densidad conjunta de  $U$  y  $V$  e indica claramente su soporte.
- (b) Obtenga las densidades marginales de  $U$  y  $V$ .
- (c) ¿ $U$  y  $V$  son independientes?
5. Un punto es generado aleatoriamente en el plano polar, mediante el siguiente esquema: se escoge un radio  $R$ , el cual se sabe que  $R^2$  tiene una distribución  $\chi_{(2)}^2$ , de manera independiente se escoge un ángulo  $\Theta \sim U(0, 2\pi)$ . Encuentre la función de densidad conjunta de  $(X, Y)$  si  $X = R\cos(\Theta)$  y  $Y = R\sin(\Theta)$ .
6. Considere  $U_1$  y  $U_2$  v.a.i.i.d uniformemente en el intervalo  $(0,1)$ . Sean  $X_1 = U_1 + U_2$  y  $X_2 = U_1 - U_2$ . Determine la función de densidad de probabilidad conjunta del vector aleatorio  $X = (X_1, X_2)$  indicando en su justificación claramente el soporte  $S_X$  de la distribución. Calcule la probabilidad  $p = P(X \in C)$  donde  $C$  es la región determinada por los puntos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ .
7. Demostrar que la parte fraccional de la suma finita de Vaid's  $Unif(0, 1)$  también es  $Unif(0, 1)$ .

8. Considere

$$f_{XY|Z}(x, y|z) = [z + (1 - z)(x + y)]\mathbb{I}_{(0,1)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(y),$$

para  $0 \leq z \leq 2$ , y  $f_Z(z) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{(0,2)}(z)$ .

- a) Encuentre  $\mathbb{E}[X + Y]$ .
- b) ¿Son  $X$  y  $Y$  independientes? Verifíquelo.
- c) ¿Son  $X$  y  $Z$  independientes? Verifíquelo.
- d) Encuentre la f.d.p. conjunta de  $X$  y  $X + Y$ .
- e) Determine la distribución de  $\max\{X, Y\}|Z = z$ .
- f) Determine la distribución de  $(X + Y)|Z = z$ .

## 11. Sumas y cocientes de variables aleatorias

- Sean  $X$  y  $Y$  v.a.'s continuas. Encuentre la *f.d.p.* de  $Z = X + Y$
- Sean  $X$  y  $Y$  v.a.'s continuas no ceros. Encuentre la *f.d.p.* de  $Z = Y/X$
- Sean  $X$  y  $Y$  v.a.'s continuas no ceros. Encuentre la *f.d.p.* de  $Z = XY$
- Considere el vector aleatorio  $X = (X_1, X_2, X_3)$  de componentes independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente con media  $\mu = 1/\lambda (> 0)$ . Defina ahora  $Y_1 = X_1$ ,  $Y_2 = X_1 + X_2$  y  $Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$ .
  - Encuentre la función de densidad de probabilidad conjunta  $f$  del vector aleatorio  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ . Indique claramente el soporte de la distribución.
  - A partir del inciso anterior encuentre  $f_2$ , la función marginal de  $Y_2$ .
  - Encuentre  $f_4$ , la función de densidad de  $Y_4 = X_3 - X_2$ .
- Sean  $X_i$  con  $i = 1, 2$  v.a independientes con  $X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \lambda)$ . Encuentre la *f.d.p.*  $Y = \frac{X_1}{(X_1 + X_2)}$ .

- Sean  $X_1, \dots, X_n$  v.a.i.i.d.'s con distribución común uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ . Demuestre que

$$2 \log \left( \frac{1}{\prod_{i=1}^n X_i} \right) \sim \chi_{2n}^2.$$

- Sean  $X$  y  $Y$  v.a.i.i.d.  $\text{Unif}(a, b)$ . Encuentre la *f.d.p.* de  $|X - Y|$ .
- Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de densidad de probabilidades conjunta dada por:

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{\{0 < y < x < \infty\}}(x, y).$$

- Encuentre la función de densidad marginal de  $X$  y calcule su valor esperado.
  - Determine la función de densidad del cociente  $W = X/Y$  y muestre que es una densidad propia.
  - Muestre que  $\mathbb{E}[W]$  no existe.
- Una marca de cosméticos ha diseñado un nuevo tratamiento que consta del uso de dos productos en distintas fases, ambos con tiempo de vida máximo de un año. La fase 1 del producto sólo puede ser empleada si la fase 2 está disponible y en buen estado. Sea así  $(X_1, X_2)$  un vector aleatorio en donde  $X_i$  modela el tiempo de vida del producto asociado a la  $j$ -ésima fase del tratamiento para  $j = 1, 2$ . Considere la función de densidad dada por

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = 8x_1 x_2 \mathbb{I}_{[0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1]}(x_1, x_2)$$

Sean  $U = \frac{X_1}{X_2}$  y  $V = X_2$ , donde  $U$  y  $V$  denotan la proporción de duración de tiempo que se usa el producto correspondiente a la primera fase y el tiempo de vida asociado a la fase 2 del tratamiento, respectivamente.

- Encuentre la función de densidad de  $U$  e indique claramente su soporte.
- Encuentre la mediana de  $U|V = v$  si  $v = 1/2$ .



## 12. Distribución $t$ de Student y distribución $F$

1. Sea  $Y$  una variable aleatoria distribuida  $Gamma(\alpha, \lambda)$ . Muestre que si  $r > -\alpha$ , entonces

$$\mathbb{E}[Y^r] = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\lambda^r}.$$

2.  $T$  v.a. sigue una distribución  $t$  (de Student) con  $k$  grados de libertad *sii*  $T = \frac{Z}{\sqrt{X/k}}$  t.q.  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $X \sim \chi_{(k)}^2$  y  $Z \perp X$ . Encuentre la f.d.p. de  $T$ .

3. Sea  $T$  un variable aleatoria que sigue una distribución  $t$  con  $v$  grados de libertad. Muestre que

- a)  $\mathbb{E}[T] = 0$  si  $v > 1$ ;  
 b)  $\text{Var}(T) = \frac{v}{v-2}$  si  $v > 2$ .

4. Sea  $T \sim t_n$ . Demuestre

- a)  $n = 1 \Rightarrow T \sim \text{Cauchy}(0, 1)$   
 b)  $n \sim \infty \Rightarrow T \sim N(0, 1)$

5.  $F$  v.a. sigue una distribución  $F$  con  $n$  y  $m$  grados de libertad *sii*  $F = \frac{X/n}{Y/m}$  t.q.  $X \sim \chi_{(n)}^2$ ,  $Y \sim \chi_{(m)}^2$  y  $X \perp Y$ . Encuentre la f.d.p. de  $F$ .

6. Si la variable aleatoria  $W$  sigue la distribución  $F$  con  $n$  y  $m$  grados de libertad. Muestre que

- a)  $\mathbb{E}[W] = \frac{m}{m-2}$  si  $m > 2$   
 b)  $\text{Var}(W) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$  si  $m > 4$

7. Sea  $W \sim F_{m,n}$ ,  $0 < p < 1$  y denote  $F(p; m, n)$  al  $p$ -ésimo percentil de la distribución de  $W$ . Esto es,  $p = \mathbb{P}(W \leq F(p; m, n))$ . Muestre entonces que:

$$F(p; m, n) = \frac{1}{F(1-p; n, m)}.$$

8. Muestre que si  $X \sim F_{m,n}$  entonces,

$$Y = \frac{\frac{m}{n}X}{1 + \frac{m}{n}X} \sim \text{Beta}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

## 13. Estadísticos de orden

1. Considere  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de una población distribuida uniformemente en el intervalo  $(0, \theta)$ . Considere los estimadores  $\tilde{\theta}$  y  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  dados por:

$$\tilde{\theta} = 2\bar{X}, \quad \hat{\theta} = \frac{n+1}{n}X_{(n)},$$

donde  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  es la media muestral y  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$  el  $n$ -ésimo estadístico de orden. Muestre que ambos son estimadores insesgados de  $\theta$ . Es decir,:

$$\mathbb{E}[\tilde{\theta}] = \theta \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta$$

2. Sea  $U = (U_1, \dots, U_n)$  una muestra aleatoria de  $U \sim Unif(\mu - \theta, \mu + \theta)$ . Encuentre la f.d.p del rango muestral  $R(U) = U_{(n)} - U_{(1)}$ .
3. Sean  $U_1, \dots, U_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ . Encuentre la mínima  $n$  tal que

$$\mathbb{P}\left(\min_i \{U_i\} \geq 0.01 \cap \max_j \{U_j\} \leq 0.99\right) \leq 0.5$$

4. Sean  $U_1, U_2$  y  $U_3$  variables aleatorias independientes distribuidas uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$ . Sean  $Y_1, Y_2, Y_3$  los correspondientes estadísticos de orden ( $Y_i = U_{(i)}$ ).
  - a) Encuentre la f.d.p. marginal de  $(Y_1, Y_2)$  especificando su soporte.
  - b) Encuentre la f.d.p. condicional de  $Y_3$  dado que  $Y_1 = y_1$  y  $Y_2 = y_2$ , indicando claramente su soporte.
5. Considere  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria de tamaño  $n$  de una distribución con f.d.p dada por

$$f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1} \mathbb{I}(0, 1)(x)$$

para alguna  $\alpha > 0$ . Sean  $Y_1, \dots, Y_n$  los correspondientes estadísticos de orden de las  $X$ 's. Muestre que  $Y_i/Y_{i+1}$ , para  $i = 1, \dots, n-1$  y  $Y_n$  son *v. a.*'s independientes.

6. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente con media  $\lambda_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ .
  - a) Demuestre que la variable  $\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  tiene disitribución  $\text{Exp}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ ,
  - b) Muestre que  $\mathbb{P}(X_k = \min\{X_1, \dots, X_n\}) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ .
7. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una densidad

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}(0, \theta)(x)$$

Muestre que  $X_{(1)}/X_{(n)}$  y  $X_{(n)}$  son independientes.

8. Sean  $X$  y  $Y$  absolutamente continuas e independientes. Defina  $V = \max\{X, Y\}$ . Demuestre que  $f_V(v) = F_X(v)f_Y(v) + f_X(v)F_Y(v)$ .

## 14. Convergencia y Teorema Central del Límite

1. Sean  $X_1, X_2, \dots$  *v.a.i.i.d* distribuidas exponencialmente con media 1. Sea  $X_{(n)}$  el máximo de las primeras  $n$  variables. Para  $x > 0$  fijo, encuentre  $p_n = \mathbb{P}(X_{(n)} - \ln(n) \leq x)$  y determine el límite de  $p_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .
2. Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ ,  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$  y función de probabilidad acumulada  $F$ . Para  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$  se define

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(-\infty, x]}(X_i).$$

Suponga  $n \in \mathbb{N}$  y  $x \in \mathbb{R}$  fijos. Resolver los siguientes incisos:

- a) Encuentre  $\mathbb{E}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))]$ .

- b) Determine  $\text{var}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))]$ .
- c) Muestre que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\{F_n(x)\}$  converge en probabilidad a  $F(x)$ .
3. Demuestre que si  $X \sim F_{(n_1, n_2)}$ , entonces la distribución límite de  $n_1 X$  conforme  $n_2 \rightarrow \infty$  es  $\chi_{(n_1)}^2$ .
4. Usando funciones generadores de momentos muestre que la sucesión de distribuciones binomiales con parámetros  $n$  y  $p_n$ , tal que  $np_n \rightarrow \lambda$  mientras que  $n \rightarrow \infty$ , converge en distribución a la distribución Poisson parámetro  $\lambda$ .
5. Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que siguen una distribución  $\text{Unif}(a, b)$ . Muestre que
- a)  $\min\{X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} a$ .
- b)  $\max\{X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} b$ .
6. Un jugador de basquetbol sabe que en promedio él puede anotar el 60% de sus tiros libres. ¿Cuál es la probabilidad de que en 25 intentos el anote mas de la mitad? Suponga que el número  $S_n$  de anotaciones de  $n$  tiros se distribuye binomial con parámetros  $n$  y  $p = 0.6$ .
7. Una persona tiene 100 bombillas cuyo tiempo de vida se distribuye exponencialmente y de manera independiente con media 5 horas. Si las bombillas son usadas una por una, reemplazando inmediatamente una bombilla cada que otra falla, aproxime la probabilidad de que al menos una bombilla siga funcionando después de 525 horas.
8. Las calificaciones de los exámenes de cierto profesor tienen media 74 y desviación estándar 14. Si el profesor va a entregar dos exámenes, uno a un grupo con 25 alumnos y otro a una con 64.
- a) Aproxime la probabilidad de que el promedio de las calificaciones del grupo de 25 sea mayor a 80.
- b) Aproxime la probabilidad de que el promedio de las calificaciones del grupo grande sea mayor que las del grupo chico por más de 2.2 puntos.

## 15. Repaso final

1. Considere la variable aleatoria  $X$  con distribución determinada por su función de densidad de probabilidad  $f_X$ . Se sabe que  $X$  tiene al menos su segundo momento finito. De hecho,  $\text{Var}(X) = \sigma_X^2 < \infty$  es conocida.

Suponga que  $X$  modela el nivel de acidez de cierto líquido y se desea *estimar* (aproximar) su nivel medio  $\mu_X = \mathbb{E}[X]$  desconocida. Para esto, se toma una **muestra aleatoria**  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , *v.a.i.i.d.* con  $X_i \sim f_X$ , y se determina la **media muestral**  $X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . La Ley de los Grandes Números asegura que  $X_n \xrightarrow{P} \mu_X$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Si se desea aproximar  $\mu_X$  de manera que se satisfaga que

$$\mathbb{P}(|X_n - \mu_X| \leq k\sigma_X) \geq 1 - \alpha$$

Determine el valor mínimo de  $n$  de manera que se satisfaga la desigualdad anterior para  $k = 1/10$  y  $\alpha = 0.05$ , utilizando

- a) La Desigualdad de Chebyshev.
- b) El Teorema Central del Límite.
- c) ¿Cómo explicaría la gran diferencia entre resultados?

2. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = 8xy \mathbb{1}_{\{0 < y < x < 1\}}(x, y)$$

- a) Calcule  $\mathbb{P}(2X > 1, 2Y < 1)$ .
- b) Determine la función de distribución conjunta  $F_{XY}(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

3. Muestre los siguientes resultados:

- a)  $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(X, E[Y|X])$ .
- b)  $X$  y  $(Y - E[Y|X])$  tienen correlación 0.
- c) Si  $E[X|Y] = 18 - \frac{3}{5}Y$  y  $E[Y|X] = 10 - \frac{1}{3}X$ , determine  $E[X]$  y  $E[Y]$ .

4. Considere una variable aleatoria  $Y$  con función de densidad dada por

$$f_Y(y) = \frac{2}{y^3} \mathbb{1}_{(1, \infty)}(y)$$

También considere una variable aleatoria  $X$  tal que  $(X|Y = y) \sim \text{Unif}(0, y)$

- a) Encuentre la función de densidad conjunta  $f_{X,Y}(x, y)$  indicando claramente el soporte de la distribución.
- b) Encuentre la función de densidad marginal de  $X$ .
- c) Encuentre la función de densidad condicional de  $Y$  dado  $X = x$ , indicando claramente el soporte de la distribución.
- d) Demuestre que

$$\mathbb{E}[Y|X = x] = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } x \in (0, 1) \\ \frac{3}{2}x & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

5. Suponga que  $X$  y  $Y$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente con media  $\beta$ . Defina  $Z = X + Y$  y  $W = X/Y$ .

- a) Determine la función de densidad conjunta de  $Z$  y  $W$ .
- b) ¿Son las variables aleatorias  $Z$  y  $W$  independientes? Justifique su respuesta.

6. Considere  $\mathbf{X}$  un vector aleatorio que sigue una distribución normal multivariada  $\mathbf{X} \sim N_5(\mu, \Sigma)$ , con vector de medias  $\mu$  y matriz de covarianzas  $\Sigma$  dadas por

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}; \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine el valor de la constante  $c$  de manera que

$$\mathbb{P}(X_3 > c | X_4 = 2, X_2 = 1) = 0.10$$

• Sean  $Z \sim N(0, 1)$  y  $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ . Se tiene entonces que

$$\Phi(1/3) = 0.631, \quad \Phi(1/2) = 0.691, \quad \Phi(1) = 0.841, \quad \Phi(2) = 0.977, \quad \Phi(3) = 0.999$$

$$\Phi(1.282) = 0.900, \quad \Phi(1.645) = 0.950, \quad \Phi(1.960) = 0.975 \quad \Phi(2.326) = 0.990$$

## Respuestas

### 1. Introducción

1:1. a) La función masa de probabilidad conjunta está dada por:

$X \setminus Y$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	1/4	0
$X = 1$	2/4	1/4

$$b) f_X(x) = \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{0\}}(x) + \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{1\}}(x),$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{4}\mathbf{1}_{\{0\}}(y) + \frac{1}{4}\mathbf{1}_{\{1\}}(y)$$

1:2. La función de distribución de  $(X, Y)$  está dada por:

$X \setminus Y$	$Y < 1$	$Y \leq 1$	$Y \leq 2$	$Y \leq 3$	$Y \geq 4$
$X < 1$	0	0	0	0	0
$X \leq 1$	0	1/16	2/16	3/16	4/16
$X \leq 2$	0	1/16	4/16	6/16	8/16
$X \leq 3$	0	1/16	4/16	9/16	12/16
$X \geq 4$	0	1/16	4/16	9/16	1

1:3. La función masa de probabilidad conjunta está dada por:

$N_1 \setminus N_2$	$N_2 = 1$	$N_2 = 2$	$N_2 = 3$	$N_2 = 4$
$N_1 = 1$	1/10	1/10	1/10	1/10
$N_1 = 2$	1/10	1/10	1/10	0
$N_1 = 3$	1/10	1/10	0	0
$N_1 = 4$	1/10	0	0	0

1:4. La función de distribución de  $(X, Y)$  está dada por:

$X \setminus Y$	$Y < 0$	$Y \leq 0$	$Y \leq 1$	$Y \leq 2$	$Y \geq 3$
$X < 0$	0	0	0	0	0
$X \leq 0$	0	0	0	1/16	2/16
$X \leq 1$	0	0	2/16	6/16	8/16
$X \leq 2$	0	1/16	6/16	12/16	14/16
$X \geq 3$	0	2/16	8/16	14/16	1

1:5. a) La función de distribución conjunta está dada por:

$X_1 \setminus X_2$	$X_2 < 0$	$X_2 \leq 0$	$X_2 \geq 1$
$X_1 < 0$	0	0	0
$X_1 \leq 0$	0	6/20	12/20
$X_1 \geq 1$	0	12/20	1

$$b) F_{X_j}(x_j) = \frac{12}{20}\mathbf{1}_{[0,1)}(x_j) + \mathbf{1}_{[1,\infty)}(x_j) \text{ para } j = 1, 2.$$

- 1:6. a) —  
 b) 1)  $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{n(n+1)}$ .  
 2)  $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{2}{3} \frac{2n+1}{n(n+1)}$ .  
 3)  $\mathbb{P}(X + Y = n + 1) = \frac{2n+4}{3n(n+1)}$ .

- 1:7. a) —  
 b)  $f_X(x) = \frac{2(n-x+1)}{n(n+1)} \mathbf{1}_{\{1,2,\dots,n\}}(x)$ ,  
 $f_Y(y) = \frac{2y}{n(n+1)} \mathbf{1}_{\{1,2,\dots,n\}}(y)$

- 1:8. a) —  
 b)  $X \sim \text{Po}(p\lambda)$  y  $Y \sim \text{Po}(\lambda)$   
 c)  $e^{-\lambda(1-p)}$

- 1:9. a)  $c = \frac{3}{2}$   
 b)  $p = \frac{3}{32}$   
 c)  $f_X(x) = x + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ ,  
 $f_Y(y) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2) \mathbf{1}_{(0,1)}(y)$

- 1:10. a)  $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2}$ .  
 b)  $f_X(x) = 12x(1-x)^2 \mathbf{1}_{[0,1]}(x) = f_Y(x)$

- 1:11. a)  $\alpha = 2$ .  
 b)  $f_X(x) = e^{-x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ ,  
 $f_Y(y) = ye^{-y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$

- 1:12. a) —  
 b)  $f_X(x) = \frac{6}{7}(2x^2 + x) \mathbf{1}_{(0,1)}(x)$   
 c)  $\mathbb{P}(X > Y) = \frac{15}{56}$ .

- 1:13. a) —  
 b)  $k = 1$   
 c)  $f_X(x) = xe^{-x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ ,  
 $f_Y(y) = \frac{1}{2}y^2 e^{-y} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)$ .

- 1:14. a)  $\mathbb{P}(A) = 0.10464$   
 b)  $\mathbb{P}(B) = 0.37218$

1:15. —

## 2. Vectores aleatorios

2:1. —

- 2:2. a)  $\xi \sim \text{Bin}(n = 3, p = 0.7)$   
 b) La distribución conjunta de  $(\xi, \eta)$  esta dada por:

$\eta \setminus \xi$	$\xi < 0$	$\xi \leq 0$	$\xi \leq 1$	$\xi \leq 2$	$\xi \geq 3$
$\eta < 0$	0	0	0	0	0
$\eta \leq 0$	0	0.027	0.027	0.027	0.027
$\eta \leq 2$	0	0.027	0.153	0.153	0.153
$\eta \leq 4$	0	0.027	0.216	0.363	0.363
$\eta \leq 6$	0	0.027	0.216	0.657	0.657
$\eta \geq 8$	0	0.027	0.216	0.657	1

No son independientes.

2:3.  $\mathbb{P}(X \geq YZ) = \frac{3}{4}$ .

2:4.  $p = \frac{1}{12}$ .

2:5. a)  $F_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} 0 & \text{si } z, w < 0 \\ \frac{\mu}{\theta + \mu} [1 - \exp\{-(\theta + \mu)z\}] & \text{si } z \geq 0, w \leq 0 \\ 1 - \exp\{-(\theta + \mu)z\} & \text{si } z \geq 0, w \geq 1 \end{cases}$

b) —

2:6. a)  $k = \frac{1}{\pi r_0^2}$

b)  $f_Y(y) = \frac{2}{\pi r_0^2} (\sqrt{r_0^2 - y^2}) \mathbf{1}_{(-r_0, r_0)}(y)$

c) No son independientes.

2:7.  $\mathbb{P}(X < Y) = \frac{2}{3}$ .

2:8. a)  $F_X(x) = (1 - e^{-\frac{(x-4)}{2}})^2 \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$

b)  $\mathbb{E}[X] = 7$

2:9.  $p = \frac{5}{8}$

### 3. Distribuciones condicionales

3:1. a)  $\mathbb{P}(2X + Y \leq 9) \approx 0.9630$

b)  $\mathbb{P}(X \geq 4 | Y = 2) = e^{-2}$

c)  $\mathbb{P}(X \geq 3 | 2X + Y \leq 9) \approx 0.0624$

3:2. a) La tabla de probabilidades esta dada por:

$Y \setminus X$	0	1	2	3
0	$\frac{\binom{4}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}}$
1	$\frac{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}}$	0
2	$\frac{\binom{4}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{1}}{\binom{9}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{9}{3}}$	0	0

b)  $f_{X|Z=2}(x) = \frac{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2} \mathbb{I}_{\{0\}}(x) + \binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2} \mathbb{I}_{\{1\}}(x)}{\binom{4}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}$

c)  $\mathbb{E}[Y|Z = 1] = \frac{2}{3}$

3:3.  $f_{X_i|Y=y}(x) = \frac{1}{y+1} \mathbb{I}_{0,1,\dots,y}(x)$

3:4.  $f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)(y+\lambda)^{\alpha+1}} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(y)$

$\Theta|Y = y \sim \text{Gamma}(\alpha + 1, y + \lambda)$ .

3:5. —

$$3:6. \mathbb{E}[M|Q = 5] = \frac{495}{127} \approx 3.89764$$

$$3:7. \mathbb{P}(X = 1|Y > 0) \approx 0.72607$$

$$3:8. f_{P|x=1}(p) = \frac{p^2 e^p}{e-2} \mathbb{I}_{(0,1]}(p)$$

$$f_{P|x=1}(2) \approx 0.57384$$

#### 4. Momentos condicionales

4:1. —

4:2.  $\frac{1}{12}$  es el valor máximo que alcanza la  $\text{Var}(Y|X = x)$

$$4:3. f_{Y|X}(y) = X e^{-Xy} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(y)$$

$$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{1}{X}$$

$$4:4. \mathbb{E}(Y) = 3.85$$

$$\text{Var}(Y) = 3.497.$$

4:5. La varianza del monto de un siniestro aleatorio es: 210,400.

$$4:6. \mathbb{E}(S) = \frac{2}{\lambda}$$

$$\text{Var}(S) = \frac{8}{3\lambda^2}$$

$$4:7. a) \mathbb{E}(T) = p \frac{1-r}{r}$$

$$\text{Var}(T) = p(1-p) \left(\frac{1-r}{r}\right) + p^2 \left(\frac{1-r}{r^2}\right)$$

b) Hint: encontrar una relación entre la generadora de momentos de T y la generadora de momentos de N usando Esperanza Iterada.

4:8. La cantidad media retirada es 16,975.  
La desviación estandar de la cantidad retirada es aproximadamente 6,967.981511.

#### 5. Covarianza y correlación

5:1. —

$$5:2. a) f_Y(y) = 18y(2 - 18y^2) \mathbb{I}_{(0,\frac{1}{3})}(y)$$

$$b) \mathbb{E}[Y | X = x] = \frac{x}{3}$$

c)  $\text{Cor}(X, Y) \approx 0.49237$  que representa una relación lineal positiva (media)

$$d) \text{El valor esperado es } \frac{13}{45}$$

$$\text{La varianza es } \frac{43}{2025}$$

$$5:3. \text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{8}$$

$$5:4. \text{Cov}(X, \varepsilon) = 0$$

$$5:5. \text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{3}$$

$$\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$$

5:6. —

5:7. a) —

$$b) \text{Var}(X_3 - \bar{X}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$



- c)  $Cov(\bar{X}, X_3 - \bar{X}) = 0$   
 d)  $Cov(X_3, X_3 - \bar{X}) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$ .  
 e)  $Cov(X_1 - \bar{X}, X_3 - \bar{X}) = -\frac{\sigma^2}{n}$ .

5:8.  $Cov(X + Y, X + 1.2Y) = 8.8$

## 6. Función generadora de momentos

6:1. —

6:2.  $\mathbb{E}[X_1] = 0$  y  $\mathbb{E}[X_2] = -1$   
 $Vav(X_1) = 1$  y  $Var(X_2) = 2$   
 $Corr(X_1, X_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

6:3. —

6:4.  $m_Y(t) = \frac{(1-2t)^{-1}}{6} + \frac{3(1-2t)^{-2}}{6} + \frac{2(1-2t)^{-3}}{6}$   
 $m_Y(1/4) = \frac{11}{3}$

- 6:5. a)  $f(x, y, z) = \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^x}{x!} \cdot \frac{e^{-6\lambda}(6\lambda)^y}{y!} \cdot \frac{e^{-6\lambda}(6\lambda)^z}{z!} \mathbb{I}_{\{x, y, z \in \mathbb{N}_0\}}(x, y, z)$   
 b)  $f_{(X, Y, Z) | T=t}(x, y, z) = \frac{(x+y+z)!}{x!y!z!} \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^y \left(\frac{2}{5}\right)^z \mathbb{I}_{\{t=x+y+z\}}(x, y, z)$   
 c)  $\mathbb{P}(X = 3, Y = 20, Z = 13 | T = 46) \approx 0.0024157$

6:6. —

6:7.  $m_W(t) = e^{\delta t} \left(\frac{1}{\theta - \delta t}\right) \left(\frac{1}{\theta + \delta t}\right) \quad \forall t \text{ t.q. } |t| < \frac{1}{\delta\theta}$

## 7. Repaso

- 7:1. a)  $f_{Y|X}(y) = xe^{-xy} \mathbb{I}(0, \infty)(y)$  t.q.  $x \in (2, 4)$   
 b)  $\mathbb{P}(Y > 0.5 | X = 2) = e^{-1}$   
 $\mathbb{P}(Y > 0.5 | X = 4) = e^{-2}$   
 c)  $\mathbb{E}[Y | X = 2] = \frac{1}{2} = 0.5$   
 d)  $\mathbb{P}(Z > 30) = e^{-30}$

7:2. a)

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5
0	0.49	0	0	0	0	0
1	0	0.168	0.168	0.084	0	0
2	0	0	0.009	0.036	0.027	0.018

- b)  $Cov(X, Y) = 0.7560$   
 $Corr(X, Y) \approx 0.9023$   
 c)  $f_{Y|X=1}(y) = 0.4 \mathbb{I}_{\{1,2\}}(y) + 0.2 \mathbb{I}_{\{3\}}(y)$   
 d)  $\mathbb{E}[G] = 1080.0$   
 $Var(G) \approx 1671600.0$

- 7:3. a)  $f(x, y, z) = \frac{3}{4\pi r^3} \mathbb{I}_{\{x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}}(x, y, z)$   
 b)  $f_{XY}(x, y) = \frac{3\sqrt{r-x^2-y^2}}{2\pi r^2} \mathbb{I}_{\{x^2+y^2 \leq r^2\}}(x, y)$

$$7.4. \quad a) \quad f_D(x) = \frac{\binom{n-m}{x} \binom{m}{m-x}}{\binom{n}{m}} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots,m\}}(x)$$

$$b) \quad f_E(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\binom{n-m-k}{x} \binom{m+k}{m-x}}{\binom{n}{m}} \cdot \frac{\binom{n-m}{k} \binom{m}{m-k}}{\binom{n}{m}} \mathbb{I}_{\{1,2,\dots,m\}}(x)$$

$$c) \quad \mathbb{P}(D = d \mid E = e) = \frac{\binom{n-m-d}{e} \binom{m+d}{m-e} \binom{n-m}{d} \binom{m}{m-d}}{\sum_{k=1}^m \binom{n-m-k}{e} \binom{m+k}{m-e} \binom{n-m}{k} \binom{m}{m-k}}$$

## 8. Distribución multinomial y normal multivariada

8.1.  $P = \frac{24}{625} = 0.384$

8.2. a)  $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4) \approx 0.0028515$

b)  $\mathbb{P}(X_1^2 < 5) \approx 0.211003$

c)  $\mathbb{P}(X_0 + X_1 = 6) \approx 0.20508$

d)  $\mathbb{P}(X_2 < 2 \mid X_1 = 5, X_0 = 3) = \frac{7}{16} = 0.4375$

8.3. a)  $p \approx 0.079106$

b)  $\text{Corr}(X_1, X_4) \approx -0.14286$

8.4.  $\mathbb{P}(Y_2 > 4 \mid Y_1 = 2) \approx 1 - \Phi(0.19781)$

8.5.  $\mathbb{P}(Y > 5) = 1 - \Phi(0.\bar{3})$

8.6.  $b = 0$

8.7. a)  $Y_1 \sim N(-2, 28)$

b)  $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 28 & -5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}\right)$

c)  $\mathbb{E}[X_1 X_2] = 0$

d)  $(Z \mid X_2 = 1) \sim N_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}\right)$

8.8. —

## 9. Transformación de variables aleatorias (caso univariado)

9.1. —

9.2. a)  $f_Y(y) = \frac{2}{b+a} \mathbb{I}_{(0,a)}(y) + \frac{1}{b+a} \mathbb{I}_{(a,b)}(y)$

b) Se mantiene igual la f.d.p  $f_Y$

9.3.  $Y \sim \text{geo} = (1 - e^{-\lambda})$

9.4.  $f_Y(y) = \frac{3}{8} \left[ \frac{(1-\sqrt{1-y})^2}{2\sqrt{1-y}} + (2-y)^2 \right] \mathbb{I}_{[0,1)}(y)$

9:5.  $Y \sim \text{Unif}[0, 1]$

9:6.  $F_Y(y) = F_X(y)\mathbb{I}_{(0, \infty)}(y)$

9:7.  $f_Y(y) = f_X(y)$

9:8.  $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)^2} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)$

## 10. Transformación de variables aleatorias (caso multivariado)

10:1. —

10:2.  $U \sim \text{Exp}(1)$

10:3.  $f_{\frac{X_1}{X_2}}(u) = \frac{\mathbb{I}_{(0,1)}(u) + \frac{1}{u^2}\mathbb{I}_{[1, \infty)}(u)}{2}$

10:4. a)  $f_{U,V}(u, v) = \lambda^2 u e^{-\lambda} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(u) \mathbb{I}_{(0,1)}(v)$

b)  $U \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$

$V \sim \text{Unif}(0, 1) \equiv \text{Beta}(1, 1)$

c)  $U \perp V$

10:5.  $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2}(x, y) = \frac{f_R(r)}{2\pi r}$

10:6.  $f_X(x) = \mathbb{I}_{\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: -x_2 < x_1 < 2-x_2 \wedge x_2 < x_1 < 2+x_2\}}(x)$   
 $p = \frac{1}{4}$

10:7. *Sugerencia:* Usar inducción matemática.

10:8. a)  $\mathbb{E}[X + Y] = 1$

b)  $X \perp Y$

c)  $X$  no es independiente de  $Z$

d)  $f_{X, X+Y}(u, v) = \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \mathbb{I}_{(u, 1+u)}(v)$

e)  $F_W(w) = [(1-z)w^3 + zw^2] \mathbb{I}_{(0,1)}(w) + \mathbb{I}_{(1, \infty)}(w)$

f)  $f_{X+Y|Z}(v) = (z + (1-z)v) [v \mathbb{I}_{(0,1)}(v) + (2-v) \mathbb{I}_{[1,2)}(v)]$

## 11. Sumas y cocientes de variables aleatorias

11:1.  $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, z-x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(z-y, y) dy$

11:2.  $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} |X| f_{XY}(x, zx) dx$

11:3.  $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{x} \right| f_{XY}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{y} \right| f_{XY}\left(\frac{z}{y}, y\right) dy$

11:4. a)  $f_Y(y) = \lambda^3 e^{-\lambda y^3} \mathbb{I}_{\{0 < y_1 < y_2 < y_3 < \infty\}}(y)$

b)  $Y_2 \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$

c)  $f_4(y) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda|y|} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(y)$

11:5.  $Y \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$

11:6. *Hint.* Usar las propiedades de los logaritmos para hacer una transformación univariada, en lugar de hacer la transformación multivariada.

$$11:7. f_{|X-Y|}(u) = 2 \frac{(b-a)-u}{(b-a)^2} \mathbb{I}_{(0,b-a)}(u)$$

$$11:8. a) X \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda}$$

$$b) f_W(w) = \frac{1}{w^2} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)$$

$$c) \text{—}$$

$$11:9. a) f_U(u) = 2u \mathbb{I}_{[0,1]}(u)$$

$$b) \mathbb{E}[U|V = \frac{1}{2}] = \frac{2}{3}$$

## 12. Distribución t de Student y distribución F

12:1. —

$$12:2. f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{(1+\frac{t^2}{k})^{\frac{k+1}{2}}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(t)$$

12:3. *Hint.* Use el ejercicio 1.

$$a) \text{—}$$

$$b) \text{—}$$

12:4. a) —

b) *Hint.* Use la Fórmula de Stirling para la función gamma.

$$12:5. f_F(u) = \frac{\Gamma(\frac{n+m}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{m}{2})} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{nu}{m}+1)^{\frac{n+m}{2}}} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(u)$$

12:6. *Hint.* Use el ejercicio 1.

$$a) \text{—}$$

$$b) \text{—}$$

12:7. *Hint.* Utilice el ejercicio 5 para conocer la distribución de la variable  $\frac{1}{W}$ .

12:8. —

## 13. Estadísticos de orden

13:1. —

$$13:2. f_R(r) = \frac{(n-1)(n)}{(2\theta)^n} (2\theta - r)r^{n-2} \mathbb{I}_{(0,2\theta)}(r)$$

13:3.  $n = 35$  (o bien  $n \geq 34.091$ )

$$13:4. a) f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 6(1 - y_2) \mathbb{I}_{\{0 < y_1 < y_2 < 1\}}(y_1, y_2)$$

$$b) f_{Y_3|(Y_1=y_1, Y_2=y_2)}(y_3) = \frac{1}{1-y_2} \mathbb{I}_{(y_2, 1)}(y_3) \text{ t.q. } 0 < y_1 < y_2 < 0$$

13:5. *Hint.* Expresa la *f.d.p.* como producto de funciones marginales

13:6. a) —

b) —

13:7. —

13:8. —

## 14. Convergencia y Teorema Central del Límite

$$14.1. \quad p_n = \left[1 - \frac{e^{-x}}{n}\right]^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = e^{-e^{-x}}$$

- 14.2. a)  $\mathbb{E}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))] = 0$   
 b)  $\text{Var}[\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))] = F(x)(1 - F(x))$   
 c) *Hint.* aplicar Ley Débil de los Grandes Números

14.3. *Hint.* Expresar al variable X en términos de  $\chi_{(1)}^2$ 's

14.4. *Hint.* Expresar a p en términos de  $\lambda$  y  $n$

- 14.5. a) —  
 b) —

14.6.  $Pr \approx 0.8888$  (La respuesta es sensible al procedimiento por ser discreta)

14.7.  $Pr \approx 0.3085$

- 14.8. a)  $Pr \approx 0.0162$   
 b)  $Pr \approx 0.2546$

## 15. Repaso final

- 15.1. a)  $n \geq 2,000$   
 b)  $n \gtrsim 384.16$   
 c) Chebyshev es una cota general no mejorable, pero particularmente puede no ser óptima.

15.2. a)  $\mathbb{P}(2X > 1, 2Y < 1) = \frac{3}{8}$

$$b) \quad F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{c.o.c} \\ x^4 & 0 < x < 1 \wedge x < y \\ 2y^2x^2 - y^4 & 0 < y < x < 1 \\ 2y^2 - y^4 & x > 1 \wedge 0 < y < 1 \\ 1 & x > 1 \wedge y > 1 \end{cases}$$

- 15.3. a) —  
 b) —  
 c)  $\mathbb{E}[X] = 15$   
 $\mathbb{E}[Y] = 5$

- 15.4. a)  $f(x, y) = \frac{2}{y^4} \mathbb{I}_{(1, \infty)}(y) \mathbb{I}_{(0, y)}(x)$   
 b)  $f_X(x) = \frac{2}{3} (\mathbb{I}_{(0, 1)}(x) + \frac{1}{x^3} \mathbb{I}_{(1, \infty)}(x))$   
 c)  $f_{Y|X}(y) = \frac{3}{y^4} \cdot \frac{\mathbb{I}_{(1, 0)}(y) \mathbb{I}_{(0, y)}(x)}{\mathbb{I}_{(0, 1)}(x) + \frac{1}{x^3} \mathbb{I}_{(1, x)}(x)} =$   
 d) —

- 15.5. a)  $f_{Z, W}(z, w) = \frac{ze^{-z/\beta}}{\beta^2} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(z) \frac{1}{(w+1)^2} \mathbb{I}_{(0, \infty)}(w)$   
 b)  $Z \perp W$   
 $f_{ZW}(z, w) = f_Z(z) f_W(w)$

15.6.  $c \approx 0.923$