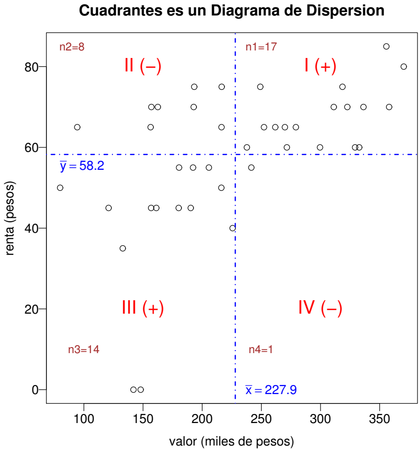
1 - Introducción



Temario

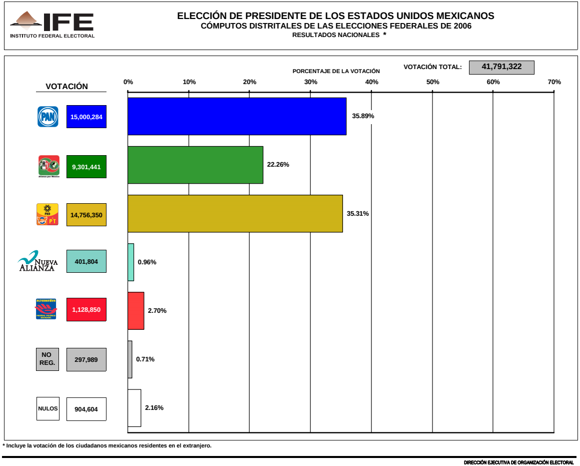
Introducción

- Lo que da lugar a la estadística es el problema de variación del fenómeno estudiado.
- La palabra *estadística* viene del latín *status*. En la antigüedad se refería a la descripción de un estado político. Evoluciona a la descripción de un conjunto de datos cualitativos y cuantitativos.
- El estudio de métodos alternativos de análisis de datos da lugar a la Teoría Estadística.

Ejemplos de problemas estadísticos

- *Contabilidad*
  - Seleccionar muestras representativas con propósito de auditorías.
  - Pronóstico de precios en análisis de costos.
- *Finanzas*
  - Análisis de tendencias de precios. Pronostico de ventas.
  - Balance/descripción de carteras.
- *Administración*
  - Descripción de la plantilla de empleados de la compañía.
  - Programas de mejoramiento de la calidad.
- *Mercadeo*
  - Segmentación del mercado. ¿Quién prefiere qué?
  - Diseño y análisis de encuestas por grupo socioeconómico.
- *Ciencias Políticas*
  - Distribución de diputados por representación proporcional.
  - Análisis de la dirección del voto por partido a distintas iniciativas.
- *Relaciones Internacionales*
  - Entender y analizar las cuentas nacionales por región.
  - Entender y analizar problemas de migración.

Elecciones presidenciales 2006



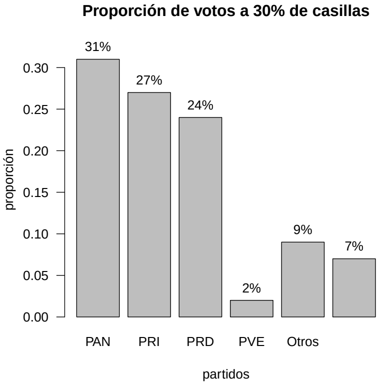
`https://portalanterior.ine.mx/documentos/Estadisticas2006/presidente/pdfs/gra_nal.pdf`
(19 enero 2024)

Ejemplo: Eventos con incertidumbre

a) Encuesta en *salida de casilla*

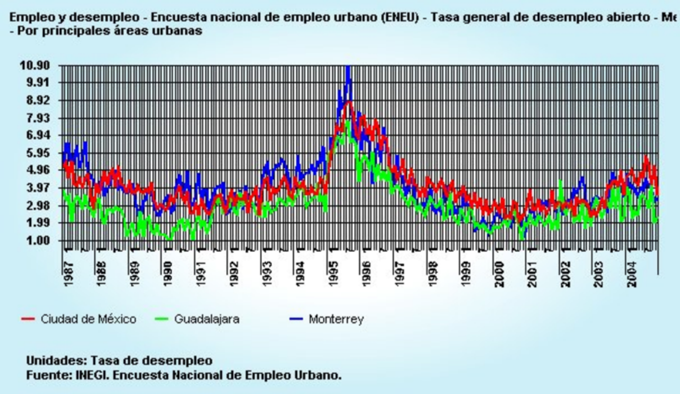
Preguntas:

- Se van 30 % del total de casillas contadas. ¿Gana la elección presidencial el PAN?
- ¿Son los porcentajes de los partidos PRI y el PRD iguales?
- El porcentaje que lleva el PVE es menor 1.5 %. ¿Perderá el registro?



Ejemplo: Eventos con incertidumbre

b) Desempleo urbano 1985-2005



- ¿Hay comportamiento estacional en el empleo en zonas urbanas?
- ¿Cambió el comportamiento después del *"error de diciembre"*?
- ¿Hubo un cambio en el patrón de empleo en Guadalajara durante el gobierno panista (1995–2000)?

Ejemplo: Eventos con incertidumbre

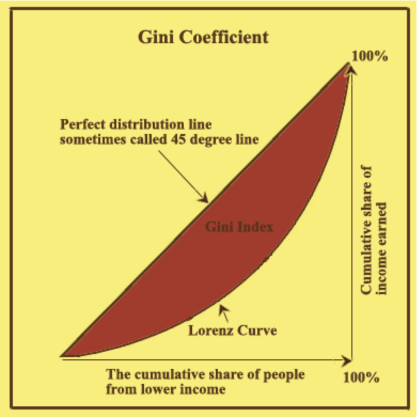
b) Nivel de inventarios insumos-productos

El inventario de la compañía $\mathcal{C}$, entre insumos (100 artículos) y productos (10 productos) tiene \$200M. Los artículos están clasificados en 4 tipos: A, B, C y D, con un costo promedio de \$100, \$1000, \$10,000 y \$50,000. Nuestros productos, distribuidos en la misma proporción (10 % de cada producto), tienen un costo unitario de \$1000, ..., \$100,000.

La empresa va a ser adquirida por el consorcio XYZ y se desea verificar el nivel del inventario reportado en libros. ¿Qué volumen del inventario (insumos y productos) verificaría si se desea una estimación con un error no mayor del 5 % del monto total del inventario?

Ejemplo: Eventos con incertidumbre

d) Distribución de la riqueza: Índice Gini



Preguntas:

- ¿De qué tamaño debe ser la muestra para determinar el índice?
- ¿Cuál es la precisión del índice?
- Hipótesis H_0 :

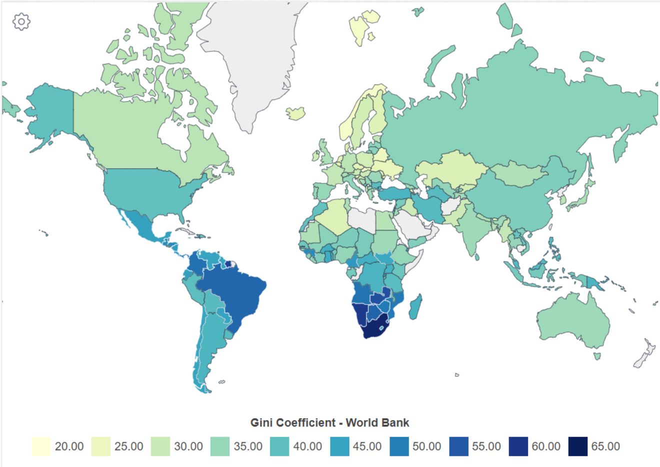
$$IG_{\text{Chile}} < IG_{\text{México}}$$

¿Es correcta?

https://www.laits.utexas.edu/lawdem/unit03/reading2/Gini_definition.html

Ejemplo: Eventos con incertidumbre

e) Distribución mundial de la riqueza



https://worldpopulationreview.com/country-rankings/gini-coefficient-by-country

Incertidumbre

En todos los ejemplos anteriores hay cierta *incertidumbre* involucrada. Incertidumbre debida a la falta de *información* que formalmente medimos en términos de *probabilidad*.

De igual forma, la probabilidad nos sirve para medir el grado de *creencia* de que un *evento*, cuyo resultado es incierto, *ocurra* ó *no ocurra*.

Incertidumbre y Estadística

$$\text{Variación} \longleftrightarrow \text{Incertidumbre} \longleftrightarrow \text{Información}$$

- Consecuencia de la complejidad del problema.
- No podemos anticipar con precisión el resultado.

El estudio científico de fenómenos bajo incertidumbre o variación se basa en la *estadística*. Esto permite la toma de decisiones de manera objetiva.

La *estadística* provee de herramientas, muchas de ellas matemáticas, para el estudio de fenómenos sujetos a incertidumbre.

Objetivo de la estadística:

- Descripción (resumen) de una población cuyos elementos muestran variación.
- Inferir propiedades de la población a partir de la información de un subconjunto o muestra de la población.

Inferencia estadística

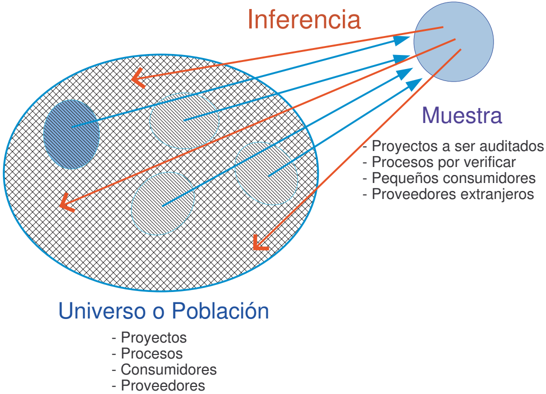
Procesos de Conocimiento

General

Deducción ↓ ↑ Inducción (inferencia)

Particular

Población y Muestra



Definiciones básicas

- *Datos:* Mediciones, observaciones documentadas tomadas de un fenómeno o experimento. Mediciones de características observadas.
- *Unidad Experimental (u.e.):* Elemento, objeto, persona sujeta la tratamiento bajo estudio.
- *Variable respuesta:* Característica observada en las unidades experimentales (sujetos) que pueden ser registradas y/o cuantificadas, no necesariamente numéricamente.
- *Población estadística:* Totalidad de los posibles valores de una variable respuesta sobre la población bajo estudio.
- *Parámetro:* Característica de la población expresada numéricamente.
- *Muestra:* Subconjunto de la población.
- *Estadístico:* También llamado *estadígrafo*, es una característica numérica de la muestra.

Elementos de un problema estadístico

- Definir los objetivos del estudio en términos de parámetros de interés.
- Determinar la población de interés.
- En su caso, determinar el proceso de muestreo. ¿Cómo se levanta la muestra?
- Describir la población de interés. Analizar la muestra.
- Estimación de los parámetros y la calidad de los mismos.
- Resumen de resultados.
- ¡Uso!

Ejemplo de un problema estadístico

El inventario de la compañía $\mathcal{K}$, entre insumos (100 artículos) y productos (10 productos) es de \$200M. Los artículos están clasificados en 4 tipos: A, B, C y D y tienen un costo promedio de \$100, \$1000, \$10,000 y \$50,000. Los productos están distribuidos en la misma proporción (10 % de cada producto), y tienen un costo unitario de \$1000,. . . ,\$100,000.

La empresa va a ser adquirida por el consorcio *XYZ* y se desea verificar el nivel del inventario reportado en libros. ¿Qué volumen del inventario (insumos y productos) verificaría si se desea una estimación con un error no mayor del 5 % del monto total del inventario?

- ¿Cuál es el objetivo del estudio?
- ¿Cuál es la población de interés?
- ¿Tomaría muestras o levantaría un inventario al 100 %?
- ¿Cómo reportaría los resultados?

Clasificación básica de la Estadística

- *Estadística*
  - Descriptiva
    - Presentación de datos
      - Tabular
      - Gráfica
    - Medidas descriptivas
      - Tendencia central
      - Localización
      - Dispersión
  - Inferencial
    - Estimación
      - Puntual
      - Intervalo
    - Prueba de hipótesis
      - Igualdad de medias
      - Igualdad de proporciones
      - Bondad de ajuste

Tipo de Variables

Variables Cualitativas: Cuando la información tomada denotan cualidades o atributos. Pueden clasificarse en un número fijo de clases o categorías *exhaustivas y excluyentes*. Así, los datos quedan clasificados en una y solo una categoría. E. g., considere los empleados de la empresa *ABC*:

Variable	Categorías
Departamento	producción, ventas, contabilidad, ...
Turno	matutino, vespertino, nocturno
Escolaridad	primaria, secundaria, ...
Género	masculino, femenino

Variables Cuantitativas: Variables o respuestas con significado numérico obtenidas por conteo o medición. Si son por conteo, las variables se dicen *discretas*. Si por medición, *continuas*. E. g., considere nuevamente a los empleados de la empresa *ABC*:

Variable	Valores posibles	Tipo
Antigüedad (años)	1,2, ...	discreta
Sueldo mensual ($)	1000–50000	continua
Vacaciones (días)	6, 7, ...	discreta
Peso (kg)	50–120	continua

Escalas de Medición

Dependiendo del tipo de los datos sería el tipo de análisis.

1. *Escala Nominal:* La más básica clasificación de los valores en categorías *(exhaustivas excluyentes)*. No hay relación de orden. Operaciones aritméticas no tienen sentido. E. g., estado civil; zona donde vive; color de auto.
2. *Escala Ordinal:* Del tipo nominal pero las categorías pueden ordenarse de acuerdo al grado de posesión de cierto atributo (*mayor que, menor que*). E. g., nivel escolar: primaria, secundaria, etc.; nivel socioeconómico: bajo, medio y alto; calidad de servicio: bueno, regular y malo. Operaciones aritméticas sin sentido.
3. *Escala de Intervalo:* Además del grado de posesión de cierto atributo es posible medir la intensidad de la posesión. Se acepta (arbitrariamente) una medida como *cero* u origen. Las operaciones de suma y resta son válidas. E. g., las escalas Celsius y Fahrenheit de temperatura.
4. *Escala de razón:* El *cero* indica "ausencia" del atributo. Todas las operaciones aritméticas son válidas. El cociente nos permite la comparación por proporciones (razones). E. g., costo mensual en publicidad; ingreso anual familiar, etc.

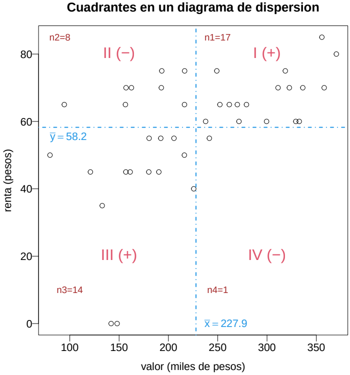
nominal $\supset$ ordinal $\supset$ intervalo $\supset$ razón

Escalas de Medición

Ejemplos:

Variable	Valores	Tipo	Escala de Medición
Afiliación política:	PRI, PAN, ...	cualitativo	nominal
Días en calendario:	gregoriano, maya, ...	cuantitativo	intervalo
Tipo de automóvil:	deportivo, de lujo, ...	cualitativa	nominal
Clasificación de película:	niños, adultos, ...	cualitativa	ordinal
Estatura (cm)	150 – 220	cuantitativo	razón
Nivel de tonos bajos	-7 – $+7$	cuantitativo	intervalo
Consumo eléctrico (kw/hr.)	–	cuantitativo	razón
Habilidad en Karate:	cinta amarilla, verde, ...	cualitativa	ordinal

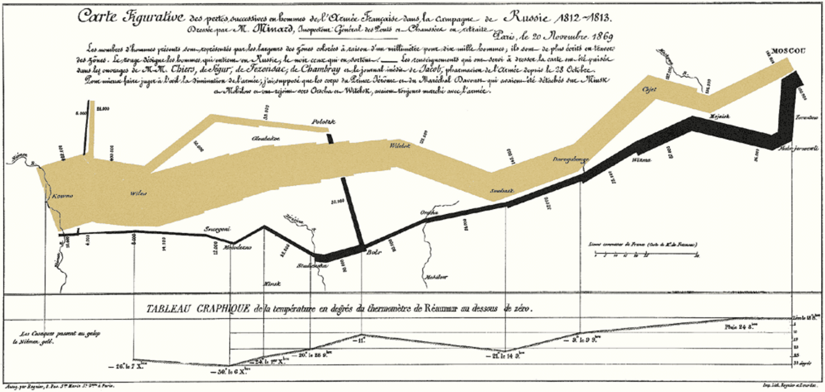
2 - Análisis Exploratorio de Datos



Temario

1. Tipos de datos, clasificación y escalas de medición.
2. Datos cualitativos y distribuciones de frecuencias.
3. Datos cuantitativos y distribuciones de frecuencia.
4. Curvas de distribuciones de frecuencias (formas características).
5. Medidas de centralidad en datos no agrupados (media, mediana, moda).
6. Medidas de centralidad en datos agrupados (media, mediana, moda ponderadas).
7. Medidas de dispersión – datos no agrupados (varianza, desviación media, rango).
8. Medidas de dispersión – datos agrupados (varianza, desviación media, rango ponderadas).
9. Cuantiles para datos agrupados y no agrupados.
10. Exploración de asociaciones entre datos (cualitativos y/o cuantitativos).

Marcha de Napoleón a Moscú



"This map by Charles Joseph Minard portrays the losses suffered by Napoleon's army in the Russian campaign of 1812."

`https://www.edwardtufte.com/tufte/minard` (13 de septiembre de 2024)

Ejemplo: Encuesta de televisión por cable[1]

Una empresa de televisión por cable encargó a un bufete un estudio de mercado para conocer el perfil de los clientes potenciales de una zona residencial formada por dos colonias. Las colonias constan de 12 y 25 manzanas con un total de 236 y 605 hogares, respectivamente. Mediante muestreo probabilístico (no discutido aquí) se seleccionó una muestra de ocho manzanas y cinco hogares por manzana. En cada hogar seleccionado se recabaron varias respuestas de las que presentamos solamente algunas de éstas.

	Variable	Descripción
1	Colonia	Colonia a la que pertenece el hogar de la zona residencial
2	Manzana	Número de manzana a la que pertenece el hogar
3	Adultos	Número de adultos por hogar
4	Niños	Número de niños menores de 12 años por hogar
5	Teles	Número de televisores por hogar
6	Tipo	Tipo de televisor que posee: B&N, color, ambos
7	TVtot	Suma del número de horas frente al televisor en la semana de todos los miembros de la familia
8	Renta	Cantidad máxima de renta que el jefe del hogar estaría dispuesto a pagar al mes por servicio de TV por cable (múltiplos de $5)
9	Valor	Valor catastral del hogar (m$). La respuesta se usa para dar idea aproximada del ingreso familiar

[1] Aguirre et al. (2003).

Ejemplo: Encuesta de televisión por cable

Datos de la encuesta de televisión por cable

obs	colonia	manzana	adultos	ninos	teles	renta	tvtot	tipo	valor
1	2	20	3	2	2	50	68	B	79928
2	2	25	3	3	1	65	82	B	94415
3	2	20	1	2	1	45	40	A	120896
4	2	8	2	2	2	35	56	A	132867
5	2	25	1	2	0	0	0	N	141901
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
36	1	2	2	0	2	60	20	A	332699
37	1	2	3	0	3	70	28	C	336290
38	1	9	3	0	5	85	28	C	355641
39	1	9	2	0	3	70	20	C	357972
40	1	4	3	0	4	80	28	C	370325

Descripción tabular

Tabla de Frecuencias para la variable *tipo* (tipo de televisión)

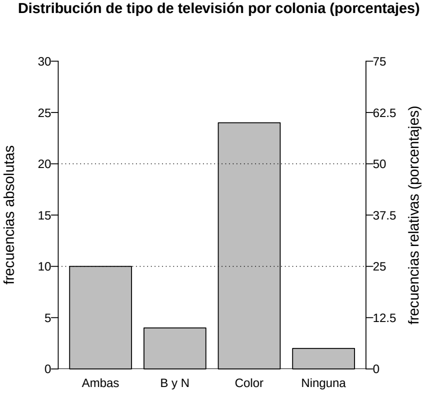
Una *tabla de frecuencias* nos muestra la frecuencia (absoluta o relativa) observada de cada una de las categorías de la variable.

	total			Colonia 1			Colonia 2		
tipo	f_i	p_i	%	f_i	p_i	%	f_i	p_i	%
Ambos	10	0.25	25.0	2	0.133	13.3	8	0.320	32.0
Blanco y Negro	4	0.10	10.0	1	0.067	6.7	3	0.120	12.0
Color	24	0.60	60.0	12	0.800	80.0	12	0.480	48.0
Ninguno	2	0.05	5.0	0	0.000	0.0	2	0.080	8.0
Total (N)	40	1.00	100.0	15	1.000	100.0	25	1.000	100.0

Donde f_i son las frecuencias absolutas, $p_i = f_i/N$ las frecuencias relativas y % las frecuencias relativas expresadas en porcentajes.

Variables cualitativas - Descripción gráfica

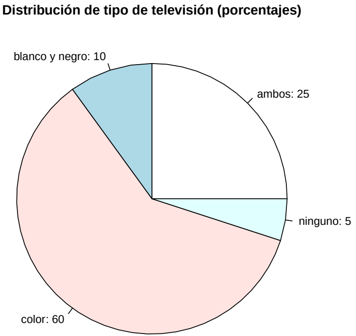
a) Diagrama de Barras



- Las alturas de las barras corresponden a las frecuencias absolutas o relativas.
- Hay una barra por cada una de las categorías.

Variables Cualitativas - Descripción Gráfica

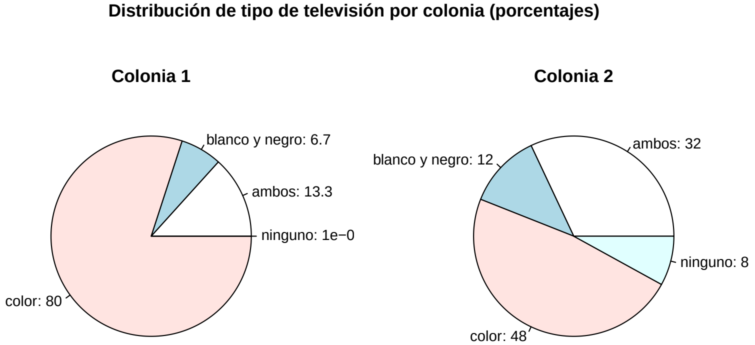
b) Diagrama Circular o de Pastel



Los 360^o se dividen proporcionalmente de acuerdo a la frecuencia relativa p_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Nota: Los diagramas de barras son preferibles sobre los de pastel. El ojo humano es bueno para juzgar medidas lineales pero malo en juzgar áreas relativas. Vea por ejemplo, la sección *Note* en:
`http://stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/graphics/html/pie.html`

Variables Cualitativas - Descripción Gráfica



- La presentación de gráficas de resultados para *distintos grupos* facilita el análisis.

Variables Cuantitativas - Descripción frecuencias

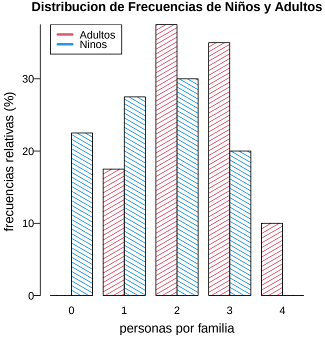
Distribución de frecuencias para variables discretas

Similar al diagrama de barras para variables cualitativas. Las categorías son los valores discretos.

Distribución de frecuencias para las variables *adultos* y *niños*

(Encuesta de TV por cable)

	adultos		niños	
valores	f_i	p_i	f_i	p_i
0	0	0.000	9	0.225
1	7	0.175	11	0.275
2	15	0.375	12	0.300
3	14	0.350	8	0.200
4	4	0.100	0	0.000
total	40	1.000	40	1.000



Variables Cuantitativas - Descripción frecuencias

Diagrama de Puntos

Renta dispuesta a pagar por servicio de TV por cable

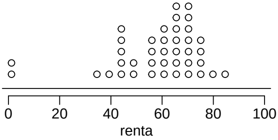


Diagrama de Puntos

Construcción:

- Eje horizontal representa el valor de las observaciones.
- Un punto (*bolita*) por cada observación. Para valores similares se coloca punto sobre punto.
- Fáciles de construir e interpretar cuando se tienen menos de 25 (50) datos y no hay tanta repetición de valores.

- *Observaciones Atípicas* (*"outliers"*). Valores sustancialmente grandes o pequeños respecto al resto de los datos.
- *Huecos*. Espacios grandes entre grupo de puntos.
- *Perfil de la distribución*. Valores más frecuentes.

Variables Cuantitativas - Diagrama de tallo y hojas

Diagrama de tallo y hojas

Construcción:

- Determinar el valor máximo y mínimo de las observaciones.
- Determinar una regla para separar los dígitos de cada observación en 2 partes (*tallos* y *hojas*). La regla se aplica a todos los datos.
- Para cada dato (observación) incluir una hoja en el tallo que corresponda.
- Una vez concluidos todos los datos se ordenan las hojas.

Tallos y hojas para la variable *TVtot*

```
 min=0, max=86
tallo | hojas                         tallo | hojas
 0  |  0  0                            0  |  0  0
 1  |  6  4  6                         1  |  4  6
 2  |  8  2  7  4  0  0  8  8  0  8    2  |  0  0  0  2  4  7  8  8  8
 3  |  0  4  8  1  5  5  2             3  |  0  1  2  4  5  5  8
 4  |  0  2  0  2                      4  |  0  0  2  2
 5  |  6  4  2  4                      5  |  2  4  4  6
 6  |  8  2  0  9                      6  |  0  2  8  9
 7  |  4  6  0                         7  |  0  4  6
 8  |  2  2  4  6  4                   8  |  2  2  4  4  6
 NO ORDENADO                             ORDENADO
```

Variables Cuantitativas - Diagrama de tallo y hojas

En ocasiones hay muchas hojas por tallo. En esos casos se pueden abrir los tallos para mayor detalle. Por ejemplo, el diagrama de tallo y hojas expandido para la variable *TVtot*.

```
0 | 0 0
|
1 | 4
| 6
2 | 0 0 0 2 4
| 7 8 8 8
3 | 0 1 2 4
| 5 5 8
4 | 0 0 2 2
|
5 | 2 4 4
| 6
6 | 0 2
| 8 9
7 | 0 4
| 6
8 | 2 2 4 4
| 6
```

Variables Cuantitativas - Frecuencias para variables continuas

Distribución de frecuencias para variables continuas

En el caso de las variables continuas, puede suceder que no se repitan datos. Se construyen entonces intervalos para clasificar observaciones y se determinan las frecuencias de clase.

1. Determine máx, mín y rango $= \text{máx} - \text{mín} =$ amplitud. E. g., Variable *valor* en la encuesta de TV por cable.

   $$\text{máx} = 370325;\ \text{mín} = 79928;\ \text{rango} = \text{máx} - \text{mín} = 379325 - 79928 = 290379$$

2. Decidir cuántos intervalos de clase (k) usar, así como el ancho (c) de cada clase. (Recomendado $5 \leq k \leq 20$.) Elija el ancho del intervalo de modo que $k * c \geq$ rango (amplitud).

   Tomamos $k = 6, c = 50,000$.

Variables Cuantitativas - Frecuencias para variables continuas

Distribución de frecuencias para variables continuas

3. Elegir el valor inicial para el primer intervalo de clase. Este debe ser menor que el mínimo observado (mín).

   Tomamos 75, luego los intervalos de clase quedan:

clase	intervalos de clase	marca de clase	f_i	p_i (%)
1	(75, 125]	100	3	8
2	(125, 175]	150	8	20
3	(175, 225]	200	10	25
4	(225, 275]	250	8	20
5	(275, 325]	300	5	13
6	(325, 375]	350	6	15
			40	100

Los datos agrupados pierden valores o magnitudes. Resulta conveniente definir el punto medio del intervalo como *representante o marca de clase* (m_i).

$$m_1 = \frac{75 + 125}{2} = 100, \quad m_2 = \frac{125 + 175}{2} = 150, \quad \ldots$$

Variables Cuantitativas - Frecuencias para variables continuas

Distribución de frecuencias para variables continuas

Otra característica de interés en datos cuantitativos es la *frecuencia acumulada*, absoluta (F_i), o relativa (P_i). Se obtiene sumando las frecuencias de todas las categorías menores incluyendo la clase en curso:

$$F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i, \quad P_k = \sum_{i=1}^{k} p_i$$

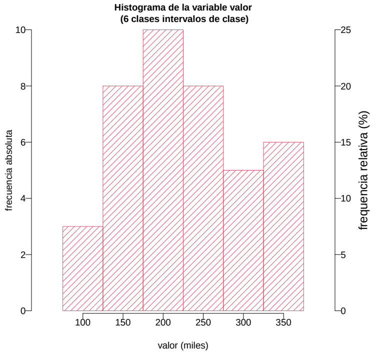
Tabla de frecuencias de la variable *valor*

intervalo	intervalos de clase	marca de clase	Por intervalo		Acumulada	
			absoluta	relativa	Absoluta	Relativa
i	I_i	m_i	f_i	p_i	F_i	P_i
1	(75, 125]	100	3	.08	3	.08
2	(125, 175]	150	8	.20	11	.28
3	(175, 225]	200	10	.25	21	.53
4	(225, 275]	250	8	.20	29	.73
5	(275, 325]	300	5	.13	34	.85
6	(325, 375]	350	6	.15	40	1.00

Por ejemplo, se puede ver que el 28 % de los hogares tienen valores catastrales menores a 175,000.

Variables Cuantitativas - Frecuencias para variables continuas - Histogramas

Histogramas

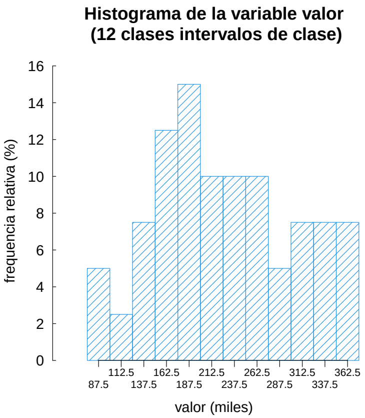


- Similar a los diagramas de barras para variables cualitativas. Las clases o categorías están formadas por los intervalos de clase.
- En un histograma las *"barras"* son adyacentes. Esto es por la *continuidad* de la variable graficada.

Variables Cuantitativas - Frecuencias para variables continuas - Histogramas

Distribución de frecuencias para variables continuas - *Histogramas*

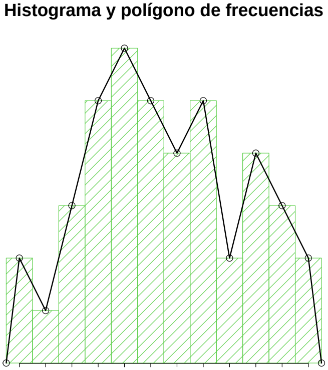
- Si deseamos más detalle aumentamos el número de clases k.
- Si cambiamos el ancho de la clase (c) cambiarán las frecuencias.



Variables Cuantitativas - Histogramas y polígono de frecuencias

Relación entre histogramas y curvas poblacionales

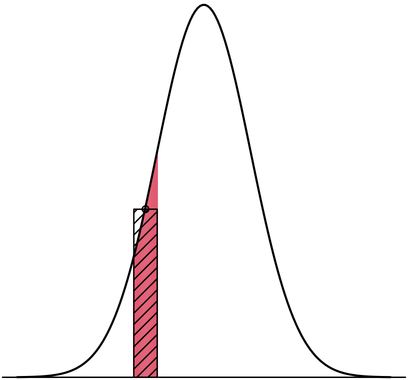
- Esperamos que la distribución de frecuencias nos sugiera un perfil similar al de la población.
- El perfil del histograma nos provee de una caracterización de la *variabilidad* y *distribución* de los valores de la población estadística.



Variables Cuantitativas - Curvas poblacionales

Curvas poblacionales

- Las frecuencias quedan por áreas bajo la curva.
- A la representación gráfica de las frecuencias poblacionales se les denomina *curva de distribución* de la frecuencia poblacional.
- Puede adquirir las siguientes formas:
  - Simétrica
  - Sesgada
  - Bimodal

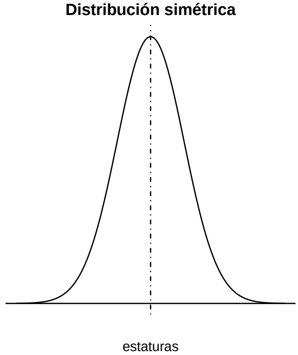


Variables Cuantitativas - Curvas poblacionales

Distribución simétrica

El modelo matemático de la distribución de frecuencias poblacional de una variable continua se puede visualizar como la versión *suavizada* de un histograma de *toda* la población.

- Se caracteriza por la existencia de un valor central alrededor del cual se distribuyen los valores probables de manera *simétrica*.
- E. g., la distribución de las estaturas de las estudiantes mujeres del ITAM.



Variables Cuantitativas - Curvas poblacionales

Distribución sesgada

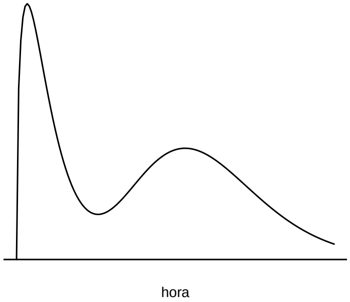
- Se caracteriza porque una de las extremidades (colas) está más extendida que la otra. La dirección del *sesgo* corresponde a la extremidad de mayor extensión.
- E. g., La distribución del ingreso es sesgada a la derecha. La tasa de retiros o jubilaciones es sesgada a la izquierda.

Variables Cuantitativas - Curvas poblacionales

Distribución bimodal

- Se caracteriza por tener dos cimas (*modas*) o *"jorobas"* separadas indicando la combinación de dos grupos con diferentes distribuciones.
- Por ejemplo, la distribución en el día del número de personas demandando un servicio. Las modas corresponderían poco después de abrir la oficina en la mañana y tarde.

Bimodal



Demanda de servicios

Variables Cuantitativas - Curvas poblacionales

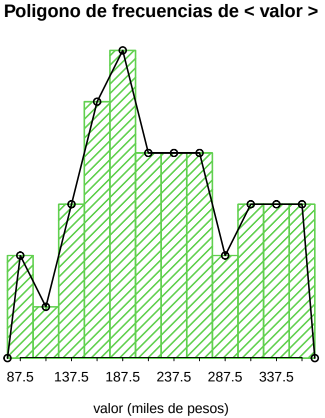
Polígono de frecuencias

Construcción:

- Se unen los puntos medios de la parte superior de las barras del histograma y se cierran los extremos con el eje horizontal.

Por ejemplo,

- La gráfica muestra la el histograma y polígono de frecuencias de la variable *valor* en la encuesta para el estudio de TV por cable. Nótese la posible *bimodalidad* de la muestra.

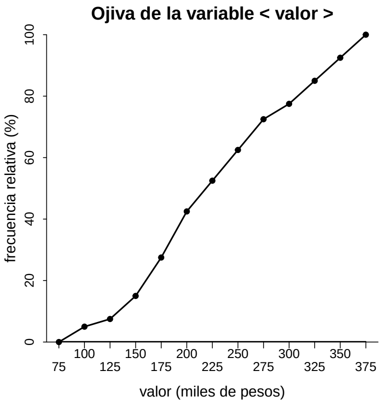


Curvas poblacionales - Ojiva

Ojiva

Construcción:

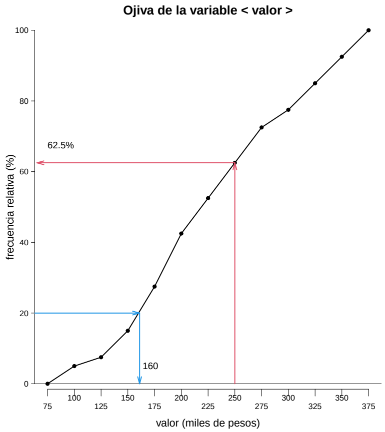
- La *ojiva* es la curva que resulta de graficar las frecuencias relativas acumuladas contra el límite superior de los intervalos de clase.



Variables Cuantitativas - Curvas poblacionales

Ojiva

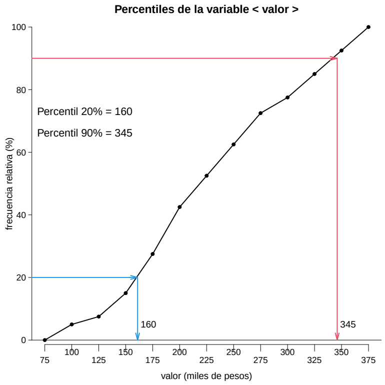
- Si deseamos obtener el porcentaje de casas cuyo valor catastral es menor de $250,000, localizamos en el eje horizontal el valor y lo subimos a que corte la ojiva y leemos el valor en el eje vertical.
- Si deseamos saber (estimar) cuál es el valor catastral del primer 20 % de la población, trazamos una recta horizontal a la altura de 20 % hasta cortar la ojiva, después proyectamos verticalmente y leemos la cantidad en el eje vertical.



Curvas poblacionales - Percentiles

Percentiles

- Los *percentiles* dan información acerca de cómo se distribuyen los valores de la variable en estudio.
- Si p está entre 0 % y 100 % el *p-ésimo percentil* es el valor de la abscisa (eje horizontal) tal que al menos $100p$ % tienen un valor menor o igual a él.
- En el ejemplo de TV por cable, el percentil del 20 % es aproximadamente \$160,000 y el 90-percentil es de \$345,000. Luego, solamente 10 % de casas tiene un valor catastral mayor a \$345,000.



Distribución de Frecuencias

Agrupación de variables

La agrupación de variables consiste en formar una variable cualitativa o categórica combinando los valores de otra variable.

• De esta manera se puede convertir una variable categórica en otra pero con menos clases. E. g., tipo de televisión en la encuesta de TV por cable.

tipo	p_i	televisión	$p_i{}'$
Ninguna	0.05	sin	0.15
Blanco y negro	0.10		
Color	0.60	con	0.85
Ambos	0.25		

Distribución de Frecuencias

Agrupación de variables

• De igual forma se pueden agrupar variables cuantitativas en categóricas. En este caso se definen las categorías en términos del valor de la variable en estudio. Por ejemplo, para la variable *valor* (en miles de pesos) definimos las clases *bajo* ($<$ 200), *medio* (200 $\leq$ valor $\leq$ 300), y *alto* ($>$ 300).

clase	intervalo	f_i	p_i	F_i	P_i
bajo	(75,200)	17	.425	17	0.425
medio	[200,300]	14	.350	31	0.775
alto	(300,400)	9	.225	40	1.000

Medidas descriptivas

Además de la descripción gráfica de la variación de los valores de una muestra o de la población total, existen algunos *números* que ayudan a mostrar aspectos relevantes de la distribución de frecuencias.

Estas pueden describir alrededor de qué valor los datos se distribuyen, así como conocer qué tanto varían los datos alrededor de estos valores.

A estos valores se les denomina *medidas de tendencia central* y *medidas de variabilidad*, respectivamente. En conjunto se les conoce como *medidas descriptivas*.

Medidas de tendencia central

Las medidas de tendencia central son valores numéricos que intentan, en cierto sentido, localizar la parte central de la distribución de frecuencias.

Mediana

Es el percentil del 50 %. Es el valor que ocupa la posición central de los datos después que han sido ordenados de manera ascendente. Luego, 50 % de los datos es menor o igual que la mediana, y el otro 50 % es mayor o igual que la mediana.

Denotamos M a la mediana de la distribución de valores poblacionales y m a la mediana de la distribución de una muestra.

La mediana es una medida de tendencia central útil en casos de distribuciones sesgadas.

Cálculo:

- Uso de la ojiva de la distribución. Recuerde que la mediana es el percentil del 50 %.
- Uso del diagrama de tallos y hojas *ordenado*. Localice el valor central. Si el numero de hojas n es impar la mediana corresponde al valor en la posición $(n+1)/2$.

  Si el numero de hojas n es par, la mediana será el promedio de los valores centrales (en las posiciones $n/2$ y $(n+2)/2$).

Ejemplo

Ejemplo

Una empresa fabricante de productos cosméticos y de limpieza maneja ventas de alrededor de 400 productos distintos a través de once centros de acopio en toda la república. Dado el gran volumen de producto que se maneja es importante que haya un buen control de inventarios, ya que si se tienen mucho inventario ocioso significa dinero que no se está empleando en producir, mientras que un inventario escaso significa tener una demanda no satisfecha.

La empresa contrató los servicios de un bufete y recibió la siguiente expresión para el control de inventarios:

nivel de reabastecimiento = 1.3 * 5 días en tránsito * venta máxima

donde *días en tránsito* significa el número de días que tarda en llegar un pedido al centro de acopio, y el factor 1.3, el bufete lo llamó el factor de *"paranoia"*.

Ejemplo (cont.)

Ventas diarias de suavizante para ropa. Número de cajas vendidas. Centro de acopio Guadalajara.

semana 1	semana 2	semana 3	semana 4	semana 5	semana 6	semana 7
0	2838	413	5592	0	465	2199
515	590	47	673	80	703	
746	331	340	561	159	462	
1237	450	265	548	183	175	
879	570	1083	216	113	422	

La tabla presenta la venta en cajas de un suavizante para ropa en el centro de acopio de Guadalajara. La planta manufacturera está en México, por lo que los días de tránsito son 3. Aplicando la expresión anterior se obtiene que para Guadalajara el nivel de reabastecimiento es de 21,808. Claramente, ésta es una recomendación exagerada de inventario. La empresa decidió hacer un estudio estadístico. Para comenzar se analizaron los pedidos diarios de los últimos meses. La tabla presenta las ventas del último mes y medio ya que las conclusiones son similares.

Ejemplo (cont.)

```
 NO ORDENADO                        ORDENADO
 0 | 00, 47, 00, 80                 0 | 00, 00, 47, 80
 1 | 59, 83, 13, 75                 1 | 13, 59, 75, 83
 2 | 65, 16                         2 | 16, 65
 3 | 31, 40                         3 | 31, 40
 4 | 50, 13, 65, 62, 22             4 | 13, 22, 50, 62, 65
 5 | 15, 90, 70, 61, 48             5 | 15, 48, 61, 70, 90
 6 | 73                             6 | 73
 7 | 46, 03                         7 | 03, 46
 8 | 79                             8 | 79
 9 |                                9 |
10 | 83                            10 | 83
11 |                               11 |
12 | 37                            12 | 37

21 | 19                            21 | 19

28 | 38                            28 | 38

55 | 92                            55 | 92
```

El número de datos es 31, luego la mediana corresponde al dato $(31 + 1)/2 = 16$, es decir, $m = 462$.
Es claro que resulta cuestionable un inventario de cerca de 20,000 cajas cuando el 50 % de las ventas es menor que 462 cajas.

Medidas de tendencia central - Media

Media

De las medidas de tendencia central la *media* es la más común. Ésta es el promedio aritmético de los datos. Conceptualmente, el promedio de todas las mediciones de la población estadística es la *media poblacional* y se denota por μ (letra griega llamada *"mu"*).

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

donde N es el total de la población. La *media muestral* se denota por $\bar{x}$ y está dada por el promedio de los valores de la muestra. Esto es,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

donde n es el tamaño de la muestra.

En el ejemplo anterior, $\bar{x} = 734.68$. La media y la mediana están alejadas pues la distribución muestral es sesgada a la derecha. En este caso la media *no* es un buen indicador de la tendencia central.

La media es una buena medida de tendencia central cuando la muestra no es muy sesgada y no hay valores atípicos.

Medidas de tendencia central - Media

Cálculo de la media usando la distribución de frecuencia - Datos agrupados

El cálculo de la media a partir de una tabla de frecuencias es aproximado pues no se cuenta con el detalles de los datos. En este caso,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot m_i$$

donde f_i y m_i son la frecuencia absoluta y la marca de clase del i-'esimo intervalo de la distribución de frecuencias. Luego,

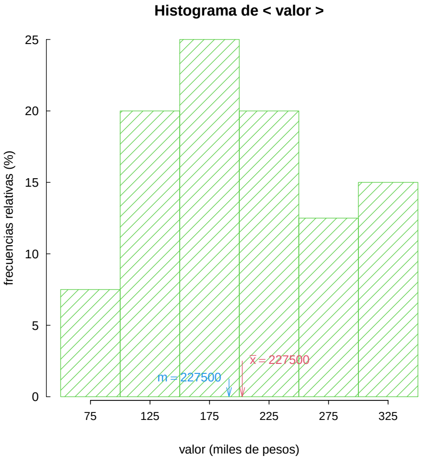
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i m_i}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} p_i m_i$$

Por ejemplo, en el estudio de TV por cable, la media de la variable *valor* está dado por:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= 0.075(100000) + 0.200(150000) + \cdots + 0.150(350000) \\ &= 227500 \end{aligned}$$

El promedio aritmético de las observaciones es realmente 227966, bastante cercano al calculado de la tabla de frecuencias. En este caso la mediana de la muestra es $m = 216393$, cercano también a $\bar{v}$, pues la distribución de *valor* no es muy sesgada.

Medidas de tendencia central



Medidas de posición

Moda

Para un conjunto de datos discretos la *moda* se define como aquel valor que ocurre con mayor frecuencia. Si el valor es único, decimos que la distribución de frecuencias es *unimodal*. Para ver si hay mas de una moda, es conveniente observar la gráfica de barras de la distribución de frecuencias y buscar cimas (picos). Los valores debajo de las cimas serán los candidatos a modas.

En el caso de variables continuas, a partir de los polígonos de frecuencias, aquellos picos o cimas aparentes corresponderán a valores de posibles modas.

Medidas de posición

Percentiles o medidas de posición

Los *percentiles* o medidas de posición son otras medidas descriptivas de gran utilidad.

Recuerde que la *mediana* corresponde al percentil del 50 %, esto es, aquel valor que divide los datos en dos partes iguales (50 % cada una).

Los *cuartiles* son los valores que dividen al conjunto de datos ordenados en cuatro partes. Es decir, aquellos valores que tienen 25 %, 50 % y 75 % de los valores de la distribución de frecuencias por debajo de ellos.

Medidas de posición

Cuartil inferior o primer cuartil

Tiene por debajo a 25 % de los valores de la distribución de frecuencias. El *primer cuartil poblacional* se denota por Q_1 mientras que el *primer cuartil muestral* por q_1.

En datos ordenados el primer cuartil se localiza en

$$l(q_1) = \frac{l(m) + 1}{2}$$

donde $l(m)$ corresponde a la localización de la mediana. Si el resultado es un número fraccionario entonces el primer cuartil será el promedio de los valores adyacentes. En el ejemplo, $l(m) = 16$, luego

$$l(q_1) = (16 + 1)/2 = 8.5$$

y del diagrama de tallos y hojas,

$$q_1 = (183 + 216)/2 = 199.5$$

Medidas de posición

Cuartil superior o tercer cuartil

Tiene por debajo a 75 % de los valores de la distribución de frecuencias. El *tercer cuartil poblacional* se denota por Q_3 mientras que el *tercer cuartil muestral* por q_3.

En datos ordenados de *mayor a menor*, el tercer cuartil se localiza en

$$l(q_3) = \frac{l(m) + 1}{2}$$

donde $l(m)$ corresponde a la *localización* de la mediana. Si el resultado es un número fraccionario entonces el tercer cuartil será el promedio de los valores adyacentes.

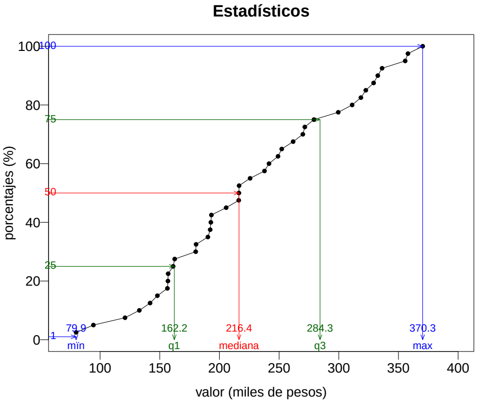
En el ejemplo, $l(m) = 16$, del diagrama de tallos y hojas,

$$q_3 = (673 + 703)/2 = 688$$

Medidas de posición

Para la variable *valor*, se tiene:

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
79.93	162.19	216.39	227.97	284.26	370.32



Medidas de posición

Percentiles

El *p-ésimo percentil* es aquel valor que deja $100p\,\%$ de los datos ordenados (de menor a mayor) por debajo.

Cálculo del p-ésimo percentil:

- Ordenar los datos de manera ascendente.
- Calcular el índice
$$i = \frac{p}{100}\, n$$
donde p es el percentil de interés y n es el tamaño de muestra.
    - Si i no es entero, se redondea. El valor inmediato mayor de i indica la posición del p-ésimo percentil.
    - Si i es entero, el p-ésimo percentil es el promedio de los valores de los datos en los lugares i e $i+1$.

Deciles

Los *deciles* son los percentiles del $10\,\%$, $20\,\%$, $\ldots$, $90\,\%$.

Medidas de posición

Percentiles

Valores observados (en miles de pesos) de la variable *valor* en la encuesta:

```
79.928  94.415 120.896 132.867 141.901 147.997 156.410 156.841 157.041 161.222
162.509 180.124 180.437 190.314 192.265 192.816 193.279 205.656 216.190 216.321
216.465 225.694 237.752 241.531 249.098 252.221 261.763 269.898 271.556 279.163
299.558 311.195 318.551 322.652 329.198 332.699 336.290 355.641 357.972 370.325
122.0745
```

Para calcular el *primer decil*, es decir, el percentil del 10 %:

$$i = \frac{10}{100} 40 = 4.0$$

Luego,

$$p_{10} = (132.867 + 141.901)2 = 137.384$$

Similarmente, para el cuarto decil (40 %):

$$i = \frac{40}{100} 40 = 16.0$$

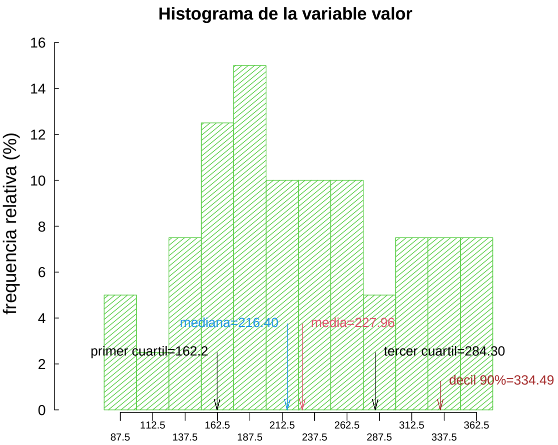
$$p_{40} = (192.816 + 193.279)/2 = 193.0475$$

Deciles para la variable *valor*
en miles de pesos

porcentaje (%)	i	decil
10	4.0	137.3840
20	8.0	156.9410
30	12.0	180.2805
40	16.0	193.0475
50	20.0	216.3930
60	24.0	245.3145
70	28.0	270.7270
80	32.0	314.8730
90	36.0	334.4950

Medidas de localización y de posición

Media, mediana y cuartiles



Medidas de dispersión

Las medidas de tendencia central nos sirven para saber alrededor de qué valores se distribuyen las observaciones pero no qué tanto estos datos varían.

Las *medidas de dispersión* nos dicen que tanto varían los datos. Estas medidas serán pequeñas si no hay mucha diferencia entre las observaciones y serán grandes en caso contrario.

Amplitud o Rango (R)

Amplitud o Rango (R). Mide la distancia entre el mayor (máx) y el menor (mín) de los datos (x's).

$$R = \text{amplitud} = x_{\text{máx}} - x_{\text{mín}}$$

Por ejemplo, en el caso de la variable *valor*:

$$R = 370.30 - 79.93 = 290.47$$

Amplitud Intercuartílica (A.I.) o Rango Intercuartiles (R.I.). También se basa en la distancia entre cuartiles. Es la diferencia entre el *cuartil superior* (q_3) y el *cuartil inferior* (q_1). Por ejemplo, para la variable *valor*

$$\text{A. I.} = q_3 - q_1 = 284.30 - 162.20 = 122.1$$

Medidas de dispersión

Varianza

La suma de desviaciones de la media muestral (promedio aritmético $\bar{x}$) es cero. Esto es, $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$. Luego, aunque los datos varíen mucho, la suma de desviaciones es nula. Para evitar la cancelación de valores mayores de la media con los valores menores, se suman las desviaciones al cuadrado.

De manera similar como lo hicimos con la media poblacional μ, se define la *varianza poblacional* como el valor medio de las desviaciones al cuadrado. Esto es,

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

La *varianza muestral* se define como la suma de desviaciones respecto a la media $\bar{x}$ al cuadrado y se denota por s^2:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

En la práctica, la varianza muestral se calcula aprovechando la igualdad:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

Medidas de dispersión

De la misma manera que esperamos que media muestral $\bar{x}$ esté cercana de la poblacional μ, también esperamos que la varianza muestral s^2 esté cerca de σ^2.

Note que la varianza se expresa en las unidades originales al cuadrado. Entonces, la raíz cuadrada de la varianza está en las unidades originales y se conoce como la *desviación estándar*: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, y $s = \sqrt{s^2}$.

característica	poblacional	muestral
media	μ	$\bar{x}$
mediana	M	m
varianza	σ^2	s^2
desviación estándar	σ	s

Nota: Tanto la varianza como la desviación estándar son medidas *no resistentes o robustas*, en el sentido de que son sensibles a datos extremos.

Medidas de dispersión - datos agrupados

Cálculo de la varianza usando la distribución de frecuencias – datos agrupados

El cálculo de la varianza en una distribución de frecuencias es similar a como se hizo con la media. Las marcas de clase m_i ($1 \leq i \leq k$) son representantes de las observaciones en el correspondiente intervalo de clase.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} f_i (m_i - \bar{x})^2$$

donde f_i es la frecuencia absoluta correspondiente al i-ésimo intervalo de clase. Alternativamente, s^2 también se puede calcular como

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i m_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$$

Por ejemplo, para la variable *valor*, $\bar{x} = 227,500$

$$s^2 = \frac{1}{40-1}\left[(79,928 - 227,500)^2 + \cdots + (370,325 - 227,500)^2\right] = 5,973.786,750$$

o bien, utilizando la distribución de frecuencias con 6 intervalos de clase,

$$s^2 = \frac{1}{40-1}\left[3(100,000)^2 + 8(150,000)^2 + \cdots + 6(350,000)^2 - 40(227,500)^2\right] = 5,762.820,513$$

Por lo que la desviación estándar estaría dada por $s = \sqrt{5,762.820,513} = 75,913.24$

Medidas de dispersión - coeficiente de variación

Coeficiente de variación

El coeficiente de variación mide la dispersión relativa de un conjunto de valores al dividir la desviación estándar entre la media.

El *coeficiente de variación poblacional* (C.V.) y el *coeficiente de variación muestral* (c.v.) están dados respectivamente por:

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\mu}, \qquad \text{c.v.} = \frac{s}{\bar{x}}$$

Nota: El coeficiente de variación permite expresar la desviación estándar como proporción de la media y es independiente de las unidades. Esto permite comparar la variabilidad de dos conjuntos de datos de distinta naturaleza.

Medidas de dispersión - coeficiente de variación

Coeficiente de variación

Estadísticos Descriptivos

	renta	valor
Min.	0.00	79.93
1st Qu.	50.00	162.20
Median	62.50	216.40
Mean	58.25	228.00
3rd Qu.	70.00	284.30
Max.	85.00	370.30
var	316.09	5973.79
sdev	17.78	77.29
cv	0.31	0.34

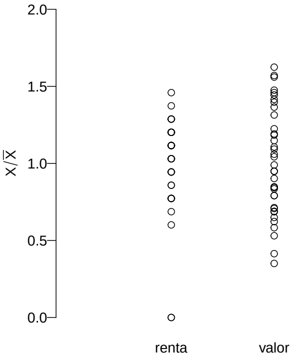
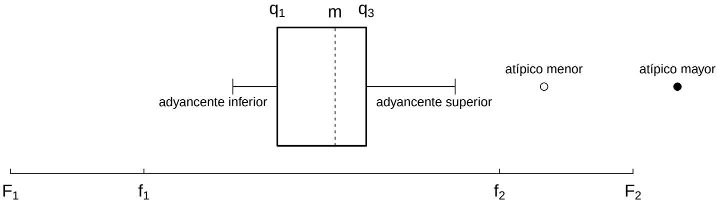


Diagrama de caja y brazos

Los *diagramas de cajas y brazos* se emplean para analizar y presentar las características más importantes de un conjunto de observaciones como son localización, dispersión, simetría y observaciones atípicas (*outliers*). Además resultan útiles en la comparación de dos o más conjunto de datos.



$$fes = 1.5 * \text{A.I.}$$

barreras interiores:	$f_1 = q_1 - fes$	$f_2 = q_3 + fes$
barreras exteriores:	$F_1 = f_1 - fes$	$F_2 = f_2 + fes$

adyacente inferior:	observación más pequeña superior a f_1 y menor a q_1
adyacente superior:	observación más grande e inferior a f_2 y mayor a q_3
atípicos menores:	aquellos datos entre f y F
atípicos mayores:	aquellos datos más allá de F

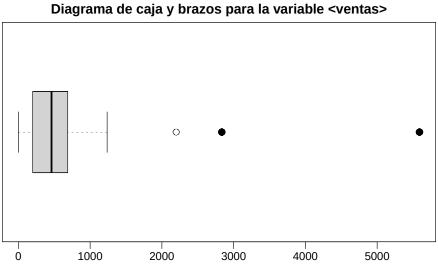
Ejemplo venta de suavizantes

$$q_1 = 199.5, \quad q_3 = 688.0, \quad \text{A.I.} = 688.0 - 199.5 = 488.5$$

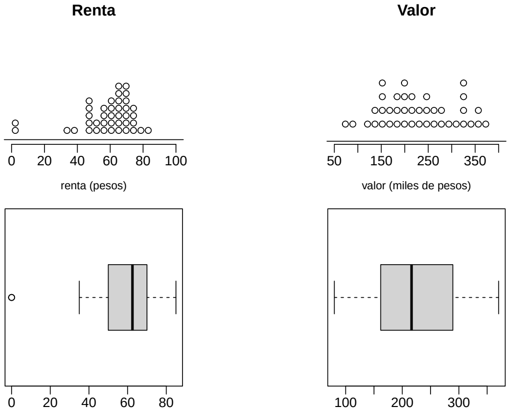
$$fes = 1.5(488.5) = 732.75$$

$$f_1 = 199.5 - 732.75 = -533.25 \qquad f_2 = 688 + 732.75 = 1420.75$$

$$F_1 = -533.25 - 732.75 = -1266.0 \qquad F_2 = 1420.75 + 723.75 = 2153.50$$



Ejemplo de televisión por cable



Problema de comparación

Problema de comparación

Entre los temas más importantes de la Estadística están los *problemas de comparación* y los *problemas de asociación*.

El *problema de comparación* consiste en contrastar las distribuciones de frecuencia entre dos o mas subpoblaciones (grupos) basándose en los datos de muestras.

Por ejemplo, estudiando el problema del tabaquismo, definimos la variable cualitativa *habito del fumar* con las siguientes clases: *nunca ha fumado*, *dejó de fumar* y *fuma actualmente*. Deseamos comparar los grupos (subpoblaciones) *hombres* y *mujeres*.

Problema de comparación

Subpoblaciones

Una manera de generar subpoblaciones es usando una variable *cualitativa nominal* para definirlas, e. g., *género*. Si la variable cualitativa empleada para la definición es *ordinal* entonces el problema puede verse como uno de *asociación*.

Otro ejemplo, de la industria manufacturera, sería comparar la dureza del acero entre proveedores nacionales y extranjeros. En este caso, la variable de interés es la *dureza* y las subpoblaciones serían LSA, USSTEEL, ACERIE-FRANÇAISE.

En ambos ejemplos se requiere responder las siguientes preguntas:

- ¿Hay alguna diferencia en las distribuciones poblacionales?
- ¿Cuál es la naturaleza de esas diferencias?
- ¿Qué tan grande son esas diferencias?

Nótese que si bien las preguntas son planteadas en términos de las distribuciones de frecuencia poblacionales, en la práctica éstas se responden en base a *muestras* de dichas poblaciones.

Emplearemos elementos de la *Estadística Descriptiva* para responder estas preguntas. Para un análisis confirmatorio más formal necesitamos de la *Estadística Inferencial*.

Problema de comparación

Variable Cualitativa

Cuando la variable es *cualitativa* es posible la comparación de distribuciones de frecuencia entre subpoblaciones empleando arreglos tabulares bidimensionales, llamados *tablas de contingencia* o *tabulación cruzada*.

La tabla muestra frecuencias absolutas por grupo y subpoblación. Por ejemplo,

Tabla de contingencia, encuesta estudiantil (frecuencias absolutas)

	Hábito de Fumar			
Género	Nunca ha fumado	Dejó de fumar	Fuma actualmente	Total
Masculino	154	25	185	364
Femenino	127	11	38	176
Total	281	36	223	540

Se puede ver en la tabla anterior que entre los hombres el grupo más numeroso es el de aquellos que fuman actualmente, siendo pocos los ex-fumadores. Esta distribución es distinta a la de las mujeres donde la mayoría de las encuestadas nunca han fumado. Este análisis puede hacerse más fácilmente si en la tabla presentamos frecuencias relativas.

Problema de comparación

Variable Cualitativa

Dividiendo las celdas de la tabla anterior entre el total de la muestra (540):

Tabla de contingencia, encuesta estudiantil (frecuencias relativas %).

	Hábito de Fumar			
Género	Nunca ha fumado	Dejó de fumar	Fuma actualmente	Total
Masculino	28.5	4.6	34.3	67.4
Femenino	23.5	2.1	7.0	32.6
Frecuencias	52.0	6.7	41.3	100.0

De la tabla se puede ver que los hombres que fuman son el grupo más frecuente mientras que los casos de las mujeres han dejado de fumar son los menos frecuentes. Las *frecuencias marginales* (están en los márgenes de la tabla) nos muestran la frecuencia del atributo en la población en general

Problema de comparación

Variable Cualitativa

Tabla de contingencia, encuesta estudiantil

Frecuencias relativas (%) condicionales por sexo.

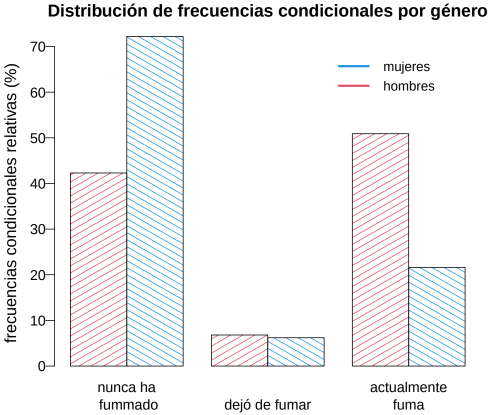
	Hábito de Fumar			
Sexo	Nunca ha fumado	Dejó de fumar	Fuma actualmente	Total
Masculino	42.3	6.8	50.9	100.0
Femenino	72.2	6.2	21.6	100.0
Frecuencias	52.0	6.7	41.3	100.0

De la tabla anterior se puede ver que aproximadamente 72 % de la población femenina nunca ha fumado; que la proporción de los que han dejado de fumar es más o menos la misma entre hombres y mujeres; y finalmente que más de la mitad de los estudiantes varones fuman actualmente.

Cuando hay muchas categorías presentes, una manera rápida de comparación es contrastar las frecuencias condicionales contra las frecuencias marginales correspondientes.

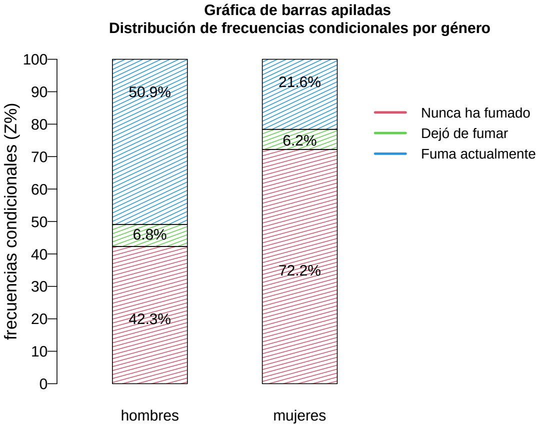
Problema de comparación

Variable Cualitativa



Problema de comparación

Variable Cualitativa



Problema de comparación

Variable cuantitativa discreta

En este caso la comparación puede hacerse de la misma forma que se hizo con las variables cualitativas. Por ejemplo, en la encuesta de TV por cable:

Número de televisores por casa.

Colonia 1		Colonia 1	
Manzana	Televisores	Manzana	Televisores
9	4,3,4,3,5	14	0,1,1,4
2	3,3,2,4,3	22	1,3,4,3,2
4	2,3,3,3,2	8	2,2,2,3,1
		20	2,3,3,1,3
		25	2,0,3,1,1

Problema de comparación

Variable cuantitativa discreta

Comparación de la distribución del numero de televisores por casa por entre colonias.

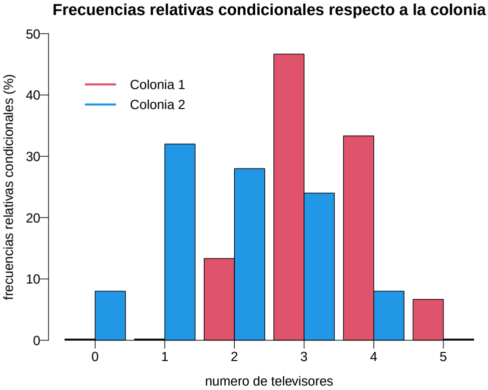
Tabulación cruzada	Número de televisores por casa						
	0	1	2	3	4	5	
Colonia 1	0	0	2	7	5	1	15
Colonia 2	2	8	7	6	2	0	25
Total	2	8	9	13	7	1	40

Frecuencias relativas condicionales	Número de televisores por casa (%)						
Colonia	0	1	2	3	4	5	
1	0	0	20	53	20	7	100
2	8	32	24	28	8	0	100

Al igual que con las variables cualitativas la información puede presentarse de manera gráfica.

Problema de comparación

Variable cuantitativa discreta



Problema de comparación

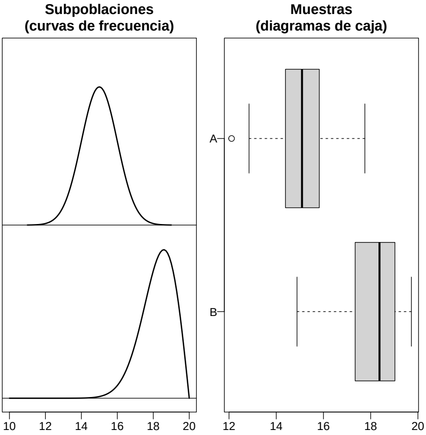
Variable cuantitativa continua

En este caso estamos interesados en comparar tanto la tendencia central como la dispersión de las poblaciones.

El lado derecho muestra los diagramas de caja de muestras tomadas de las poblaciones correspondientes.

Las conclusiones obtenidas de las muestras se aplican también a las poblaciones:

- La población A es simétrica alrededor de 15 y a las izquierda de la población B.
- La población B es sesgada a la izquierda con mediana (centro) cerca poco mayor que 18.



Problema de comparación - Ejemplo

Ejemplo: Productores de acero

Los datos de la tabla provienen de ensayos de dureza de lámina de acero de tres proveedores de una empresa que produce manufacturas troqueladas. Una *característica de calidad* importante es la dureza de la materia prima. Los datos corresponden al primer semestres y las unidades son kg/cm^2.

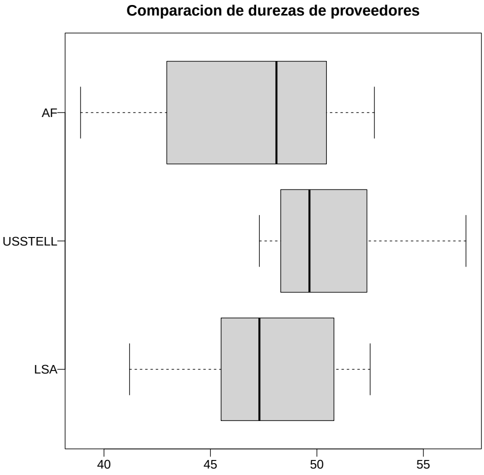
LSA		USSTELL		ACERIE FRANÇAISE	
52.4	47.9	54.4	48.8	48.8	42.7
50.8	50.1	50.2	47.9	49.8	52.7
45.5	52.2	49.4	47.5	43.2	51.6
44.4	41.2	57.0	49.2	45.7	51.2
45.2	51.9	55.5	49.0	48.1	39.8
46.2	50.8	54.9	47.6	48.9	39.1
46.2	45.4	49.9	47.9	49.1	51.1
46.2	47.9	48.7	51.7	46.7	41.1
52.5		53.0	47.3	38.9	51.3
46.7		50.9	50.7	43.2	

Problema de comparación - Ejemplo

Ejemplo: Productores de acero

Del diagrama de caja se sigue lo siguiente:

- El productor USSTEEL provee de lámina de mayor dureza y más consistentemente (menor variabilidad/dispersión) que LSA y ACERIE-FRANÇAISE.
- La producción de USSTEEL parece estar sesgada a la derecha mientras que las otras dos compañías parecen más bien sesgadas a las izquierda.



Problema de asociación

Problema de asociación

En ocasiones es importante conocer si una variable influye en el comportamiento (modo de variación) de otra variable. Por ejemplo, una cadena de establecimientos comerciales desea saber si el tamaño del establecimiento influye en el volumen de ventas.

Otro ejemplo sería aquel al estudiar el sector agrícola y qué tanto influye los insumos de trabajo o capital en la producción del ramo.

Ambos casos pueden caracterizarse como un *problema de asociación* en el cual nos interesa conocer si el incremento o decremento de una variable, X, tiene efecto o influye en otra variable, digamos Y. Note que por la naturaleza del problema, las variables consideradas X y Y, deben ser al menos de escala ordinal.

Problema de asociación

Ambas variables son ordinales

Una manera de analizar el problema de asociación cuando ambas variables son ordinales es mediante el uso de *tablas de contingencia* y los correspondientes diagramas de barras.

Por ejemplo, consideremos una encuesta sobre el *horario de verano*, en el cual interesa relacionar la posición respecto al cambio de horario (Y) con el nivel socio-económico del encuestado (X). Los valores (*niveles*) de Y son: *desacuerdo*, *indiferente* y *de acuerdo*, mientras que los de X: *bajo*, *medio* y *alto*.

Tabla de contingencia (frecuencias absolutas)

		Posición respecto al horario de verano			
		Desacuerdo	Indiferente	Acuerdo	Total
Nivel socio-económico	Bajo	98	201	111	410
	Medio	134	91	60	285
	Alto	12	21	25	58
	Total	**244**	**313**	**196**	**753**

Problema de asociación

Ambas variables son ordinales

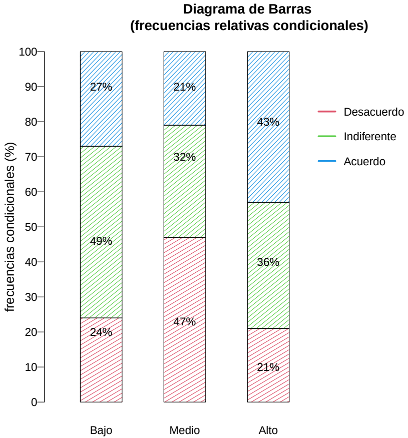
Tabla de contingencia (frecuencias relativas condicionales)

		Posición respecto al horario de verano (%)			
		Desacuerdo	Indiferente	Acuerdo	Total
Nivel socio-económico	Bajo	24	49	27	100
	Medio	47	32	21	100
	Alto	21	36	43	100

Problema de asociación

Ejemplo: Encuesta sobre Horario de Verano

		Posición respecto al horario de verano (%)			
		Desacuerdo	Indiferente	Acuerdo	Total
Nivel socio-económico	Bajo	24	49	27	100
	Medio	47	32	21	100
	Alto	21	36	43	100



Problema de asociación

Una Variable ordinal la otra cuantitativa

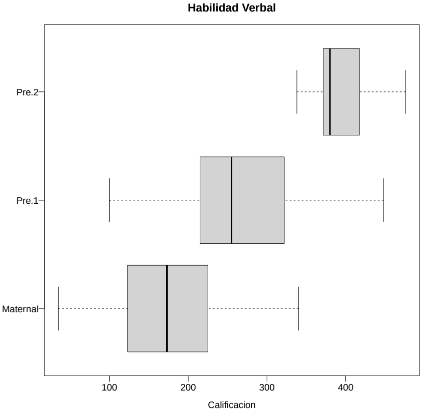
En este caso es posible visualizar ambos, *localización* (tendencia central) y la *variación* (dispersión) de la variable cuantitativa de acuerdo a los distintos niveles de la variable ordinal.

Por ejemplo, la siguiente tabla corresponde a una prueba de habilidad verbal para una muestra de un jardín de niños. La variable Y es la evaluación de desarrollo de la habilidad verbal, y la variable X, es el grado escolar del niño.

Problema de asociación

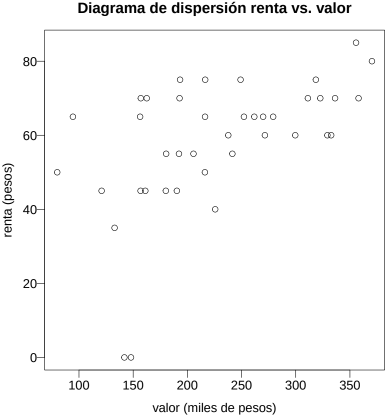
Ejemplo: Habilidad verbal en preescolar

Grado Escolar		
Maternal	Pre-escolar 1	Pre-escolar 2
68	255	425
35	202	370
145	317	380
173	327	476
190	247	410
225	100	358
340	448	338
123	412	373
228	228	377
NA	192	467
NA	297	388



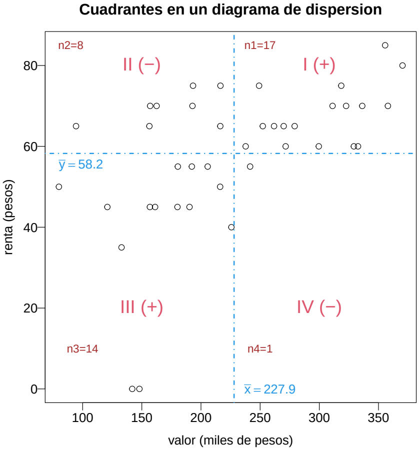
Problema de asociación

Ejemplo: Encuesta de TV por cable



Problema de asociación

Ejemplo: Encuesta de TV por cable



Note que para el primer y tercer cuadrante,

$$n_1 + n_3 = 17 + 14 = 21$$

mientras que para el segundo y cuarto cuadrante

$$n_2 + n_4 = 8 + 1 = 9$$

Problema de asociación

Ambas variables cuantitativas

Además del análisis gráfico es interesante tener una medida de la asociación (lineal) entre las dos variables.

Covarianza de dos variables cuantitativas X y Y:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Note que las unidades de la *covarianza* son el producto de las unidades originales. Si cambia de escala una o ambas variables el valor de la covarianza cambiará. Para expresar la asociación lineal entre X y Y, independiente de las escalas se utiliza el *coeficiente de correlación*.

Correlación de dos variables cuantitativas X y Y:

$$\operatorname{corr}(X, Y) = r = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_X \cdot S_Y}$$

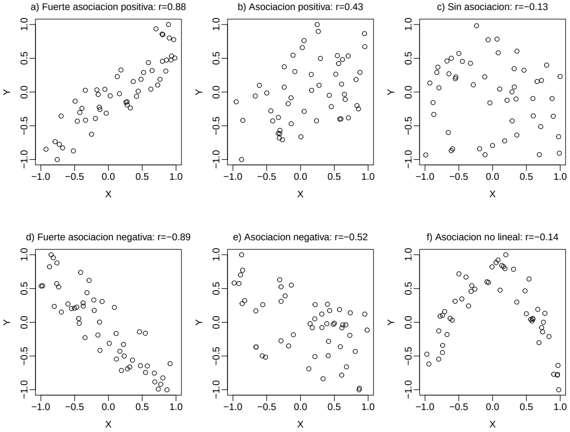
donde $S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$, y $S_Y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$ son las desviaciones estándar de X y Y respectivamente.

Problema de asociación

Nota:

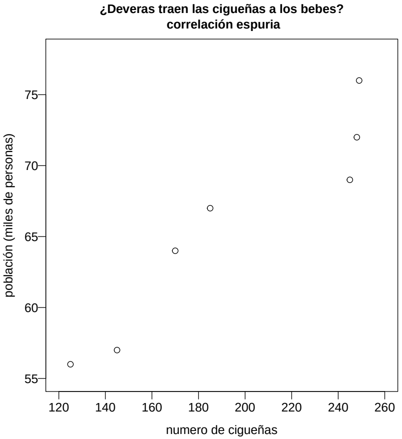
- Existen las correspondientes definiciones poblacionales:
  Covarianza
  $$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)$$
  Coeficiente de Correlación
  $$\text{corr}(X, Y) = \rho = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}}$$
- El coeficiente de correlación no tiene unidades (adimensional).
- El coeficiente de correlación (poblacional o muestral) es siempre mayor o igual que -1 y menor o igual que $+1$. Esto es,
  $$-1 \leq \rho \leq +1, \quad -1 \leq r \leq +1$$

Coeficiente de correlación

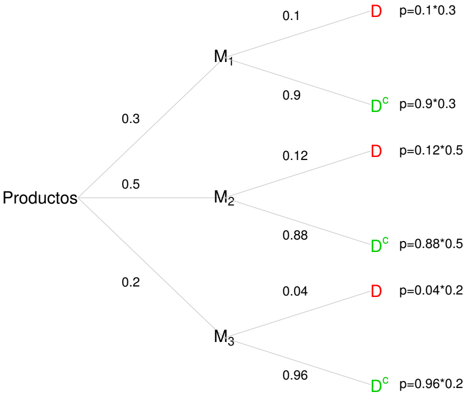


Coeficiente de correlación

- El valor de $|r|$ será más cercano a 1 conforme la nube de datos se acerque más a un linea recta. Por lo mismo, r es conocido también como *coeficiente de correlación lineal*.
- Correlación no implica *causalidad*. Véase la gráfica de la derecha. Datos de la población anual de una población inglesa (1930–1936) y el número de avistamientos de cigüeñas al año.
- El tipo de correlación mostrado entre población y cigüeñas se conoce como *correlación espuria*.
- Puede haber correlación de variables pero no necesariamente lineal. Véase por ejemplo, el diagrama de dispersión, panel f) de la lámina anterior.



3 - Probabilidad



Temario

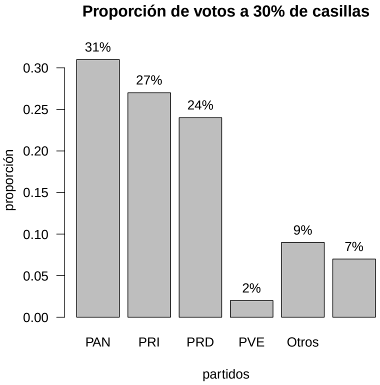
1. Ejemplos de situaciones con incertidumbre
2. Incertidumbre, aleatoriedad y probabilidad
3. Enfoques de la probabilidad (objetivo, frecuentista y subjetivo)
4. Teoría de conjuntos
5. Axiomas de probabilidad
6. Probabilidad condicional e independencia. Regla del Producto
7. Ley de Probabilidades Totales y Teorema de Bayes
8. Técnicas de conteo

Ejemplo: Eventos con incertidumbre

a) Encuesta en *salida de casilla*

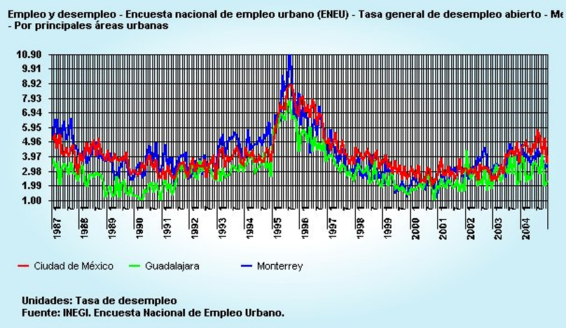
Preguntas:

- Se van 30 % del total de casillas contadas. ¿Gana la elección presidencial el PAN?
- ¿Son los porcentajes de los partidos PRI y el PRD iguales?
- El porcentaje que lleva el PVE es menor 1.5 %. ¿Perderá el registro?



Ejemplo: Eventos con incertidumbre

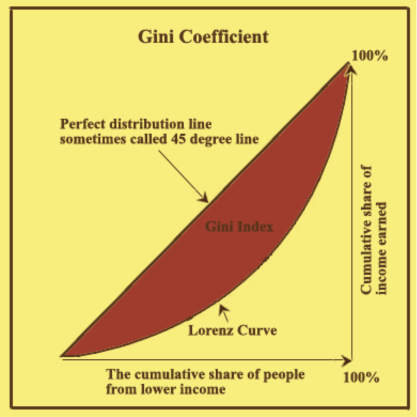
b) Desempleo urbano 1985-2005



- ¿Hay comportamiento estacional en el empleo en zonas urbanas?
- ¿Cambió el comportamiento después del *"error de diciembre"*?
- ¿Hubo un cambio en el patrón de empleo en Guadalajara durante el gobierno panista (1995–2000)?

Ejemplo: Eventos con incertidumbre

d) Distribución de la riqueza: Índice Gini



Preguntas:

- ¿De qué tamaño debe ser la muestra para determinar el índice?
- ¿Cuál es la precisión del índice?
- Hipótesis H_0 :

$$IG_{\text{Chile}} < IG_{\text{México}}$$

¿Es correcta?

https://www.laits.utexas.edu/lawdem/unit03/reading2/Gini_definition.html

Incertidumbre

En todos los ejemplos anteriores hay cierta incertidumbre involucrada. Incertidumbre debida a la falta de *información* que formalmente medimos en términos de *probabilidad*.

De igual forma, la probabilidad nos sirve para medir la creencia de que un *evento*, cuyo resultado es incierto. ¿Ocurrirá o no?

Experimentos y fenómenos aleatorios, espacios muestrales y eventos

En Estadística es importante reconocer el proceso de obtención de los datos, ya sea bajo observación o por experimentación.

Experimento: Es el proceso mediante el cual se obtiene una observación o dato. Los experimentos de mayor interés en la Estadística son aquellos donde los resultados no pueden anticiparse.

Experimento o fenómeno aleatorio: Es aquel cuyos resultados no pueden predecirse antes de su realización y por lo tanto están sujetos al azar.

Espacio muestral (S): Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento o fenómeno aleatorio.

Evento: Es un subconjunto del espacio muestra S. Se dice que un evento ha *ocurrido* o *sucedido*, si al observar un fenómeno aleatorio o realizar un experimento aleatorio, alguno de los elementos del evento ocurre.

Ejemplo

1. Se lanzan al aire 3 monedas y nos fijamos en lo que cae cada una de ellas. Por cada moneda, el resultado puede ser: águila$= a$, o *sol*$= s$. Luego, el espacio muestral (total de salidas posibles) es

$$S = \{aaa, aas, \ldots, sss\}$$

En este ejemplo, el espacio muestral S tiene 8 posibles salidas. Por ejemplo, el evento

$$A_3 = \{\text{“todas la monedas águila ”}\} = \{aaa\}$$

Note que $A_3 \subset S$.
De igual forma, el evento $S_3 = \{\text{“todos fueron soles”}\} = \{sss\} \subset S$,

Note que el evento, $E = \{\text{“Al menos un águila”}\} = S_3^C \subset S$ y está dado por:

$$E = \{aaa, aas, asa, saa, ass, sas, ssa\}$$

Ejemplo

2. Se lanza un dado y se registra el número que sale. El espacio muestral es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Sean los eventos $E_1 = \{\text{“número impar”}\}$; $E_2 = \{\text{“múltiplo de 3”}\}$; $E_3 = \{\text{“número mayor que 4”}\}$. Estos eventos son

$$E_1 = \{1, 3, 5\};\; E_2 = \{3, 6\};\; E_3 = \{5, 6\}$$

El evento E_1 ocurre si se observa el número 1, 3 ó 5; E_2 si sale 3 ó 6; y E_3 ocurre si salen los números 5 ó 6.
Note que en todos los casos $E_i \subset S$, para $i = 1, 2, 3$.

Ejemplo

3. Se lanzan dos dados, uno rojo y el otro azul, y se registra el número obtenido en cada dado. En este caso el espacio muestral S tiene 36 elementos de la forma (r_i, a_j), donde $i, j = 1, \ldots, 6$.

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5), & (1,6) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5), & (2,6) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5), & (3,6) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5), & (4,6) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & (5,6) \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}$$

Así, se pueden definir los eventos:

- $E_1 = \{\text{“La suma de puntos es 7”}\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
- $E_2 = \{\text{“El dado rojo es mayor que el azul”}\} =$

$$\{r_i > a_j\} = \left\{ \begin{array}{lllll} (2,1), & & & & \\ (3,1), & (3,2) & & & \\ (4,1), & (4,2), & (4,3) & & \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4) & \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5) \end{array} \right\}$$

- $E_3 = \{\text{“El dado azul es mayor o igual a 5”}\} = \{(r_i,5),(r_i,6),\ i = 1,\ldots,6\}$

Ejemplo

4. Se lanzan dos dados y se registra el número obtenido por cada dado. En este caso el espacio muestral es:

$$S = \left\{ \begin{array}{llllll} (1,1), & & & & & \\ (2,1), & (2,2), & & & & \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & & & \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & & \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5), & \\ (6,1), & (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,6) \end{array} \right\}$$

En este caso no registramos que dado es cuál. Luego, la salida $(1,2)$ es la misma que la $(2,1)$. El espacio muestral S tiene 21 elementos o salidas distintas.

Sean los eventos

- $A = \{$"La suma de puntos es 7"$\} = \{(6,1),(5,2),(4,3)\}$.
- $B = \{$"Ambos puntos son mayores que 4"$\} = \{(5,5),(6,5),(6,6)\}$.
- $C = \{$"Ambos puntos son iguales"$\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.

Note que en cualquiera de los experimentos aleatorios, *una y solo una* de las salidas posibles ocurre.

Definición clásica

Sea S un espacio muestral finito y $A \subset S$ un evento de S, se define la probabilidad del evento A por

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Número de elementos (salidas) del evento } A}{\text{Número de elementos (salidas posibles) de } S}$$

- Note que en este caso no hay necesidad de observar/experimentar para calcular la probabilidad del evento A.
- En el caso de la *definición clásica de probabilidad*, se supone que cada una de las salidas tiene la misma posibilidad de salir.
- En palabras, la probabilidad de un evento se calcula como *el cociente del número de casos favorables entre el número total de casos posibles*.
- Note que el número de casos favorables no puede ser menor que cero ni mayor que el número total de casos posibles, luego $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, para cualquier evento $A \subset S$.
- La definición clásica de probabilidad es útil en juegos de azar y en muestreo aleatorio pero menos práctica, por ejemplo, en problemas financieros donde las posibles salidas rara vez son *equiprobables*.

Definición clásica

Ejemplo: Lanzamiento de tres monedas honestas.

Se tiene que $S = \{aaa, aas, \ldots, sss\}$ y $n(S) = 8$. Entonces,

$$\mathbb{P}(\text{“Todas águilas”}) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{n(\{aaa\})}{n(\{aaa, aas, \ldots, sss\})} = \frac{n(A_3)}{n(S)} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\mathbb{P}(\text{“Todas soles”}) = \mathbb{P}(S_3) = \frac{n(\{sss\})}{n(\{aaa, aas, \ldots, sss\})} = \frac{n(S_3)}{n(S)} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\mathbb{P}(\text{“Al menos un águila”}) = \mathbb{P}(E) = \frac{n(\{aaa, \ldots, saa\})}{n(\{aaa, aas, \ldots, sss\})} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{7}{8} = 0.875$$

Definición clásica

Ejemplo: Lanzamiento de un dado honesto

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego $n(S) = 6$.

$$\mathbb{P}(\text{“Números impares”}) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$\mathbb{P}(\text{“Múltiplos de 3”}) = \mathbb{P}(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333$$

$$\mathbb{P}(\text{“Números mayores que 4”}) = \mathbb{P}(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{2}{6} = 0.333$$

Definición clásica

Ejemplo: Lanzamiento de un par de dados honestos

$S = \{(r_i, a_j),\ i, j = 1, \ldots, 6\}$. Luego $n(S) = 36$.

$$\mathbb{P}(\text{“Suma de puntos es 7”}) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{36} = 0.167$$

$$\mathbb{P}(\text{“El dado rojo es mayor que el dado azul”}) = \mathbb{P}(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{15}{36} = 0.417$$

$$\mathbb{P}(\text{“El dado azul es mayor que 5”}) = \mathbb{P}(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{12}{36} = 0.333$$

Definición clásica

Ejemplo: Par de dados, solo ciertas salidas

$S = \{(x_i, y_j) : x_i \geq y_j,\ i, j = 1, \ldots, 6\}$. Luego $n(S) = 21$.

$$\mathbb{P}(\text{“Suma de puntos es 7”}) = \mathbb{P}(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{21} = 0.143$$

$$\mathbb{P}(\text{“Ambos puntos son mayores que 4”}) = \mathbb{P}(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{21} = 0.143$$

$$\mathbb{P}(\text{“ambos puntos son iguales”}) = \mathbb{P}(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{6}{21} = 0.286$$

Definición como frecuencia relativa

Algunos fenómenos aleatorios presentan cierta *regularidad estadística*. Esto es, cierta estabilidad en la frecuencia relativa en la ocurrencia de eventos.

Ejemplo: Moneda honesta

Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda honesta “muchas veces”. Al repetir el experimento, digamos un millón de veces, se puede detectar una regularidad estadística que permite darnos la idea de saber de la probabilidad de obtener un águila.

Número de lanzamientos	Número de Águilas	Porcentaje de águilas
10	4	40.00
100	54	54.00
1,000	490	49.00
10,000	4911	49.11
100,000	49,779	49.78
1.000,000	499,812	49.81

Definición como frecuencia relativa

Bajo el *enfoque frecuentista o empírico*, si un experimento se repite n veces y un evento A ocurre $n(A)$ veces, el límite de la fracción $n(A)/n$, cuando n es muy grande es la probabilidad del evento A y se denota $\mathbb{P}(A)$:

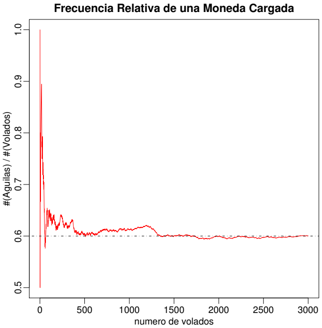
$$\mathbb{P}(A) := \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Definición como frecuencia relativa

Ejemplo. Moneda cargada al águila

n	$n(A)$	$n(A)/n$
10	8	0.8000
100	65	0.6500
1000	612	0.6120
2000	1199	0.5995
3000	1801	0.6003

$$\frac{n(A)}{n} \to \mathbb{P}(A) = 0.6$$



Note que al igual que la definición clásica, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$, para todo evento A, pues $0 \leq n(A) \leq n$.

Definición subjetiva

Las *probabilidades subjetivas* se basan en el grado de credibilidad sobre la ocurrencia o no de un evento. Esta probabilidad refleja el sentimiento que hace que se tenga más o menos confianza sobre la veracidad de una determinada proposición, y que guía a tomar determinada decisión o acción.

La probabilidad subjetiva se asigna a un evento basado en las creencias y/o información disponible y frecuentemente se asignan probabilidades subjetivas cuando los eventos ocurren una sola vez.

Definición subjetiva

Ejemplo. Tasas de interés

Hay incertidumbre en cuanto a si la tasa de interés subirá, bajará ó permanecerá constante para el mes de octubre. Un administrador de empresas decide *signar ciertas probabilidades* a los distintos resultados de las situación de la tasa de interés del mes que entra con base a los informes de Banco de México, fuentes financieras, etc.

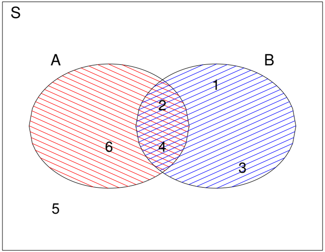
	Baja	Igual	Sube
Probabilidad:	0.6	0.1	0.3

Estas probabilidades son asignadas con base en información que se colecta y en experiencia propia por lo que son *probabilidades subjetivas* que pueden cambiar de individuo a individuo, a diferencia que las definiciones clásica y frecuentista de la probabilidad que son las mismas para todas las personas.

Conjuntos

- *Conjunto.* Colección de varios elementos. Por ejemplo, $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
- *Conjunto universo.* Es el conjunto que contiene a *todos* los elementos. Por ejemplo, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Conjunto Vacio ($\emptyset$).* Es un conjunto sin elementos. Por ejemplo, $\{$“Números pares múltiplos de 7”$\} = \emptyset$.

Diagrama de Venn



Operaciones de conjuntos

- *Inclusión.* A es *subconjunto* de B, $A \subset B$, cuando todos los elementos de A están contenidos en B. (Figura a)

$$A \subset B, \text{ si , } w \in A, \text{ entonces } w \in B$$

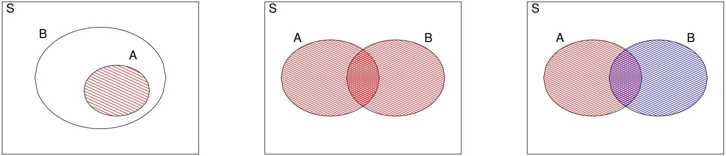
- *Unión.* La *unión* de dos conjuntos A y B, $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos de A y todos los elementos de B. (Figura b)

$$A \cup B = \{w \in S | w \in A \text{ o } \ w \in B\}$$

- *Intersección.* La *intersección* de dos conjuntos A y B, $A \cap B$, es el conjunto formado por los elementos que están en A y que también están en B. (Figura c).

$$A \cap B = \{w \in S | w \in A \text{ y } \ w \in B\}$$

$A \subset B$ $A \cup B$ $A \cap B$



Propiedades de operaciones de conjuntos

- *Conmutativa*
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- *Asociativa*
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- *Distributiva*
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedades de operaciones de conjuntos

- *Complemento*. El complemento del conjunto A, es el conjunto A^C formado por todos los elementos de S que *NO* son elementos de A.

$$A^C = \{w \in S | w \notin A\}$$

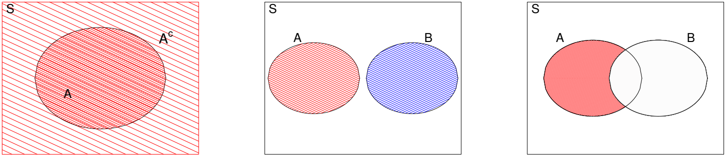
- *Conjuntos mutuamente excluyentes o ajenos*. Dos conjuntos A y B son *mutuamente excluyentes o ajenos* si no tienen *ningún* elemento en común.

$$A \text{ y } B \textit{ excluyentes}, \text{ si y solo si, } \; A \cap B = \emptyset$$

- *Diferencia de dos conjuntos*. La diferencia de dos conjuntos, $A - B$ es el conjunto de todos los elementos de A que *NO* están en B.

$$A - B = \{w \in A | w \notin B\}$$

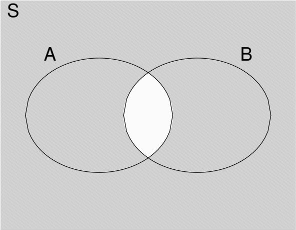
A^C $\qquad A \cap B = \emptyset$ $\qquad A - B$



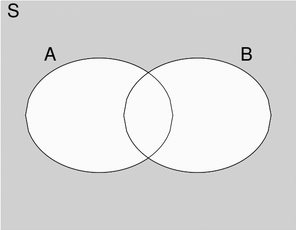
Leyes de De Morgan

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$



$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$



Conjuntos y eventos

Ejemplo:

1. Considere el *conjunto universo* $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y sean los *eventos* $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 3, 5\}$. Determine:
    1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
    2. $A \cap B = \{2, 4\}$.
    3. $C = A^c = \{1, 3, 5\}$.
    4. $A^c \cap B = \{1, 3\}$.
    5. $A \cup B^c = \{6\}$.
    6. Muestre que A y C son *mutuamente excluyentes*. $A \cap C = A \cap A^c = \emptyset$.

Note que por definición de *conjunto complemento* $A \cup A^c = S$.

Conjuntos y eventos

Ejemplo:

2. Sean $A = \{2, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$. Entonces $A \subset B$ y $A \cup B = B$ y $A \cap B = A$.

Recuerde que en general, los subconjuntos del espacio muestra son los *eventos*. La *probabilidad* es una medida de dichos eventos.

Conjuntos y eventos

Ejemplo:

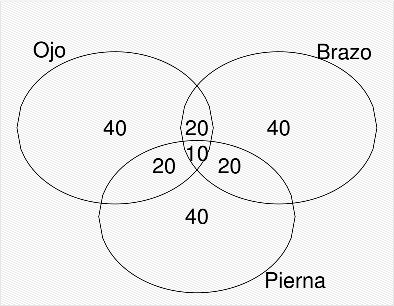
3. Considere el experimento aleatorio de lanzar un dado y registrar el número obtenido. Se definen los siguientes eventos:
    1. $A = \{$ El valor observado es par$\}$.
    2. $B = \{$ El valor observado es menor o igual a 4$\}$.
    3. $C = \{$ El valor observado no es par$\}$.
    4. $D = \{$ El valor observado es par o es un número menor o igual a 4$\}$.
    5. $E = \{$ El valor observado es par y es un número menor o igual a 4$\}$.
    6. $F = \{$ El valor observado es 7$\}$.

Conjuntos y eventos

Ejemplo:

4. En una batalla sangrienta luchaban 270 hombres. 90 de ellos perdieron un ojo; 90 un brazo; y 90 una pierna. 30 perdieron un ojo y un brazo; 30 un brazo y una pierna; 30 una pierna y un ojo; y 10 perdieron un ojo, un brazo y una pierna.

- ¿Cuántos hombres no perdieron nada?
- ¿Cuántos tuvieron exactamente una lesión?, ¿dos?, ¿tres?
- ¿Cuántos tuvieron al menos una lesión?, ¿dos?, ¿tres?
- ¿Cuántos tuvieron no más de una lesión?, ¿dos?, ¿tres?



Axiomas de probabilidad

Dado un espacio muestral S y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos (eventos) de S, cualquier medida de probabilidad $\mathbb{P}$ de un evento $B \in \mathcal{S}$ debe cumplir con las siguientes propiedades:

Axiomas:

1. $0 \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$, para cualquier $B \in \mathcal{F}$.
2. $\mathbb{P}(S) = 1$.
3. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$, eventos *mutuamente excluyentes* ($A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$), entonces
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)$$
4. Si $A_1, \cdots \in \mathcal{F}$, tales que, $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$, entonces
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Corolarios

Corolarios:

1. Sea $A \in \mathcal{F}$, entonces
$$\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$$
donde A^C es el complemento del evento A.

   Demostración: $A \cap A^C = \emptyset$ y $A \cup A^C = S$. Luego,
$$1 \overset{A_{II}}{=} \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cup A^c) \overset{A_{III}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C)$$
De donde, $\mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

2. La probabilidad del *evento imposible* $\emptyset$ es cero.
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$
Demostración: $S^C = \emptyset$,
$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(S^C) \overset{C_1}{=} 1 - \mathbb{P}(S) \overset{A_{II}}{=} 1 - 1 = 0$$

Corolarios

Corolarios:

3. Sean $A, B \in \mathcal{F}$, entonces

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Demostración: Note que $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$. Luego,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^C \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \left[\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)\right] - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\end{aligned}$$

4. Si $B \subset A$, entonces

$$\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A), \text{ y } \mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Demostración:
Si $B \subset A$, entonces A se puede escribir como $A = B \cup (A \cap B^c)$ y $B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$. Luego, $\mathbb{P}(A) \overset{A_{III}}{=} \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$. Entonces, $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B^C) = P(A - B)$.

Probabilidades de eventos

Ejemplos:

1. Una caja contiene tres boletos numerados con las etiquetas 1, 2 y 3. Se considera el experimento aleatorio de extraer dos boletos *con reemplazo*. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea cuatro?
2. Considere el mismo experimento aleatorio anterior pero ahora la extracción de los boletos es *sin reemplazo*. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea cuatro?

Probabilidades de eventos

Ejemplo:

3. Considere el ejemplo de tabaquismo del tema anterior. Suponga en esta ocasión que la mayoría de los estudiantes fue encuestada. El cuadro de frecuencias relativas (%) con la información obtenida es la siguiente:

Hábito	Hombres	Mujeres	Total
N	28.52	23.52	52.02
D	4.63	2.04	6.67
F	34.26	7.04	41.30
Total	67.41	32.60	100.00

Donde, N, D y F denotan los grupos de *"nunca ha fumado"*, *"dejó de fumar"* y *"fuma actualmente"*, respectivamente y las frecuencias están representadas en porcentajes.

Con base a la definición de frecuencia relativa de probabilidad, las frecuencias relativas presentadas en el cuadro se pueden interpretar como probabilidades. Las probabilidades en el cuerpo de la tabla se denominan *probabilidades conjuntas* y las probabilidades en los márgenes del cuadro, *probabilidades marginales*. Las primeras se refieren a probabilidades de intersección de eventos, las segundas a eventos con un solo atributo. Así:

- $P(H \cap N) = 28.53\,\%$; $P(M \cap F) = .0704$; • $P(M) = .3260$; • $P(N) = .5204$

Probabilidades de eventos

Ejemplo:

4. Estudios recientes muestran que en cierta población de México, la probabilidad de que un habitante sea mayor de 40 años o tenga calvicie es de 0.40. La probabilidad de que sea mayor de 40 años es de 0.20, y la probabilidad de tenga calvicie es de 0.30. Calcule la probabilidad de que un individuo:
   - a. Tenga 40 años o menos.
   - b. Sea mayor de 40 años con calvicie.
   - c. Sea mayor de 40 años sin calvicie.
   - d. Tenga 40 años o menos con calvicie.
   - e. Tenga 40 años o menos sin calvicie.

Probabilidades de eventos

Solución:

Sean $A = \{\text{Individuo mayor de 40 años}\}$, $B = \{\text{Individuo con calvicie}\}$. Se tiene que

$$\mathbb{P}(A) = 0.20, \quad \mathbb{P}(B) = 0.30, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = 0.40$$

Entonces:

1. $\mathbb{P}(A^c) \stackrel{C_1}{=} 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - 0.20 = 0.8.$
2. $\mathbb{P}(A \cap B) \stackrel{C_3}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.20 + 0.30 - 0.40 = 0.10.$
3. $\mathbb{P}(A \cap B^c) \stackrel{C_4}{=} \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.20 - 0.10 = 0.10.$
4. $\mathbb{P}(A^c \cap B) \stackrel{C_4}{=} \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.30 - 0.10 = 0.20.$
5. $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) \stackrel{\text{De Morgan}}{=} 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.60.$

Eventos independientes

Si la probabilidad de un evento A no cambia sabiendo de la ocurrencia de un evento B, se dice que A y B son *eventos independientes*. En caso contrario, si la probabilidad del evento A cambia cuando sabemos la ocurrencia del evento B, entonces se dice que A y B son *eventos dependientes*.

Ejemplos:

1. ¿Cuál es la probabilidad de que *se cumplan los programas de venta de subscripciones al servicio de internet por cable?* (Evento A).
   a. ¿Modificaría su probabilidad si *Canal 40 reinicia sus transmisiones?* (Evento B).
   b. ¿Modificaría su probabilidad si *el servicio de ATT y el servicio de Telmex bajan 40 % y 25 %, respectivamente, sus precios de conexión a internet?* (Evento C).

Probabilidad condicional

Ejemplos:

2. Considere el espacio muestral $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$. Nos preguntamos por la probabilidad de que si extraemos un número al azar, éste sea un número múltiplo de 4. Es decir,

$$\mathbb{P}\left(\{\text{Múltiplo de 4}\}\right) = \mathbb{P}(A)$$

   a. Si el número que extrajimos es mayor que 50, ¿modificaría la probabilidad de A?

   $$\mathbb{P}\left(\{\text{Múltiplo de 4 } \underline{\text{dado}} \text{ que el número es mayor que 50}\}\right) = \mathbb{P}(A|B)$$

   b. O bien, si el número que extrajimos es primo, ¿modificaría la probabilidad de A?

   $$\mathbb{P}\left(\{\text{Múltiplo de 4 } \underline{\text{dado}} \text{ que el número es primo}\}\right) = \mathbb{P}(A|C)$$

Eventos independientes y probabilidad condicional

La *probabilidad condicional* de un evento A es la probabilidad de este evento *dada* la ocurrencia de otro evento, digamos B. Al momento de saber de la ocurrencia del evento B, esto puede o no modificar las circunstancias del fenómeno para la ocurrencia del evento A, luego, su probabilidad puede variar.

Probabilidad condicional

Ejemplos:

1. De un paquete de cartas bien mezclado se extraen dos cartas, una a la vez y se colocan boca abajo sobre una mesa.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea *reina de corazones*?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda carta sea una *reina de corazones* si se sabe que la primera es el *siete de tréboles*?

Solución:

a. El interés es en la segunda carta sin importar la primera. Sea $A = \{$ Reina de corazones$\}$. Entonces

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{52}$$

b. Se tiene la información de que la primer carta es $B = \{$Siete de tréboles$\}$, luego, la segunda carta *no* puede ser nuevamente *siete de tréboles*. Entonces,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{51}$$

Probabilidad condicional

2. Dos boletos son extraídos aleatoriamente *con reemplazo* de una caja de cuatro boletos numerados $1, 2, 3, 4$.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que le segundo boleto sea 4?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4 dado que el primero fue 2?

Solución: El espacio muestra es:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{array} \right\}$$

$$A = \{\text{El primer boleto es } 2\} = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B = \{\text{El segundo boleto es } 4\} = \{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4)\}$$

a. $\mathbb{P}(B) = 4/16 = 1/4$

b. $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}\left(\{(2,4)\} \mid \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4)\}\right) = 1/4$

Note que le probabilidad de B fue calculada de manera distinta pero ésta *no* cambió.

Probabilidad condicional

3. Considere el mismo experimento pero ahora la extracción es *sin reemplazo*.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que le segundo boleto sea 4?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que el segundo boleto sea 4 dado que el primero fue 2?

Solución: En esta ocasión el espacio muestra es:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & & (2,3), & (2,4), \\ (3,1), & (3,2), & & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & \end{array} \right\}$$

$$A = \{\text{El primer boleto es 2}\} = \{(2,1),(2,3),(2,4)\}$$

$$B = \{\text{El segundo boleto es 2}\} = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

1. $\mathbb{P}(B) = 3/12 = 1/4$
2. $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}\left(\{(2,4)\} \mid \{(2,1),(2,3),(2,4)\}\right) = 1/3$

Note que en esta ocasión *sí* cambió el valor de la probabilidad del evento B.

Probabilidad condicional

Note: $A|B$ ó $B|A$ *no* son eventos. Lo que ha cambiado el la *medida de probabilidad*. De hecho, *dado* el evento A con $\mathbb{P}(A) > 0$, se puede definir la probabilidad $\mathbb{P}(\cdot|A)$, como

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \quad \text{para todo evento } B \in \mathcal{F}$$

$\mathbb{P}(B|A)$ denota *la probabilidad del evento B dado que el evento A ha ocurrido.*

La *regla de la multiplicación* ayuda a encontrar la probabilidad de que dos eventos ocurran simultáneamente. A saber,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$$

Probabilidad condicional

Ejemplos:

1. Una caja tiene 3 boletos, uno rojo, uno verde y uno azul. Dos boletos son extraídos *sin reemplazo*. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar primero el boleto rojo y luego el verde?

   Solución:
   Sea $A = \{\text{Sacar el boleto rojo}\}$ y $B = \{\text{Sacar el boleto verde}\}$.

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$$

Probabilidad condicional

2. En el ejemplo de los calvos, se desea encontrar:
   a. La probabilidad de seleccionar una persona con calvicie dado que se sabe que es mayor de 40 años.
   b. La probabilidad de seleccionar una persona menor de 40 años dado que se sabe que tiene calvicie.

Solución: Sean $A = \{\text{Individuo mayor de 40 años}\}$, $B = \{\text{individuo con calvicie}\}$. En el problema original, se había encontrado que $\mathbb{P}(A) = 0.20$, $\mathbb{P}(B) = 0.30$ y $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.40$. Entonces,

a.
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.2 + 0.3 - 0.4}{0.2} = 0.50$$

b.
$$\mathbb{P}(A^c|B) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.3 - 0.1}{0.3} = 2/3 = 0.666$$

Note que

$$\mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B)$$
$$\mathbb{P}(A|B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B^c)$$

Independencia de eventos

Dos eventos A y B se dicen *independientes* si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Esto es, la probabilidad del evento A no se ve afectada por la ocurrencia del evento B. Así, aplicando la *regla de la multiplicación*: los eventos A y B son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

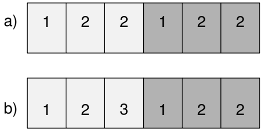
Ejemplos:

1. Considere el experimento de lanzar un dado y considere los eventos $A = \{\text{Número impar}\}$ y $B = \{1, 2\}$. ¿Son los eventos A y B independientes?

   Solución: $\mathbb{P}(A|B) = 1/2$; $\mathbb{P}(A) = 3/6 = 1/2$. Por lo que A y B son eventos independientes.

Independencia de eventos

2. Considere dos urnas a) y b) con 6 boletos cada uno como se muestra en la figura. Note que los boletos están numerados $1, 2, 3$ y son de color blanco o gris.



El experimento consiste en extraer un boleto de manera aleatoria. Se definen los eventos: $A = \{\text{Boleto de color gris}\}$ y $B = \{\text{Boleto número 2}\}$. ¿Para qué urna los eventos A y B son independientes?

Solución: Si A y B son independientes entonces $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Urna A: $\mathbb{P}(A) = 3/6 = 0.5$ y $\mathbb{P}(A|B) = 2/4 = 0.5$. Entonces A y B son *eventos independientes*.
Urna B: $\mathbb{P}(A) = 1/2 = 0.5$ y $\mathbb{P}(A|B) = 2/3$. Entonces, A y B son *eventos dependientes*.

También se podría verificar si $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, o bien si, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Teorema de Probabilidad Total

El resultado sirve para calcular probabilidades de un evento cuando el espacio muestral S es la unión de eventos mutuamente excluyentes.
Suponga que $S = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, donde los M_i's son mutuamente excluyentes y considere el evento $A \in \mathcal{F}$. Luego

$$A = (A \cap M_1) \cup (A \cap M_2) \cup (A \cap M_3)$$

y donde los eventos $(A \cap M_i)$ son eventos mutuamente excluyentes. Entonces,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap M_1) + \mathbb{P}(A \cap M_2) + \mathbb{P}(A \cap M_3)$$

y por la *regla de la multiplicación*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(A|M_2)\mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(A|M_3)\mathbb{P}(M_3)$$

o bien,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A|M_i)\mathbb{P}(M_i)$$

Teorema de Probabilidad Total

Definición : En general, $M_1, M_2, \ldots, M_m$ se dice que es una *partición* del espacio muestral $\mathcal{S}$ si:

i) $S = \bigcup_{i=1}^{m} M_i$; y

ii) Los M_i's son mutuamente excluyentes, $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$.

Teorema de Probabilidad Total (TPT):
Sea $\{M_i\}_{i=1}^{m}$ una partición del espacio muestral $\mathcal{S}$. Entonces, para todo evento $A \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A|M_i)\mathbb{P}(M_i)$$

Teorema de Probabilidad Total

Ejemplo:
Se lanza una moneda cargada $\mathbb{P}(\{\text{águila}\}) = 2/3$. Si sale *águila* se extrae aleatoriamente una canica de una urna con 2 canicas rojas y 3 verdes. Si sale *sol*, se extrae una canica de otra urna con 2 canicas rojas y 2 verdes. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una canica roja?

Solución:
Sean los eventos $A = \{\text{Águila}\}$; $B = \{\text{Sol}\}$; $R = \{\text{Canica roja}\}$; $V = \{\text{Canica verde}\}$. El espacio muestral es $\mathcal{S} = \{(\text{águila,roja}),\ldots,(\text{sol,verde})\}$. Las probabilidades condicionales son (*Vea el diagrama de árbol*):

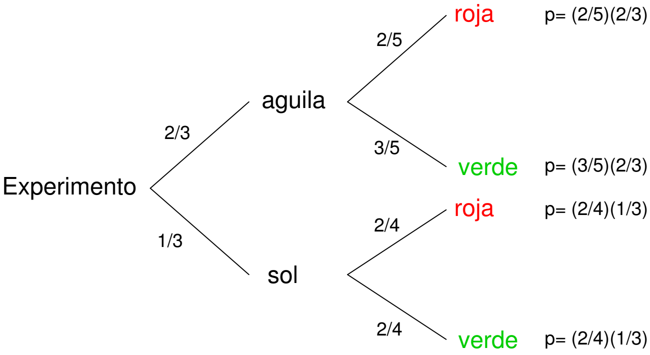
$$\mathbb{P}(R|A) = 2/5;\ \mathbb{P}(R|S) = 2/4;\ \mathbb{P}(V|A) = 3/5;\ \mathbb{P}(V|S) = 2/4$$

Entonces, por el teorema de probabilidad total (TPT)

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R|S)\mathbb{P}(S) = (2/5)\cdot(2/3) + (2/4)\cdot(1/3) = 0.433$$

Teorema de Probabilidad Total

Árbol de Probabilidades:



Teorema de Bayes

Ejemplo:
Cierta compañía elabora objetos con tres tipos de máquinas con diferentes tecnologías. La maquina 1 elabora 30 % de la producción, la máquina 2 el 50 %, y la máquina 3 el 20 %. Se sabe que la maquina 1 tiene la probabilidad de fabricar un objeto defectuoso de 0.1, la máquina 2 de 0.12 y la máquina 3 de 0.04. ¿Cuál es la probabilidad de que un objeto tomado al azar haya sido producido por la máquina 1 si éste es defectuoso?

Solución: Sean los eventos $M_i = \{\text{El artículo fue producido por la máquina } i\}$, $i = 1, 2, 3$ y $D = \{\text{Artículo defectuoso}\}$ Se pregunta por $\mathbb{P}(M_1|D)$.

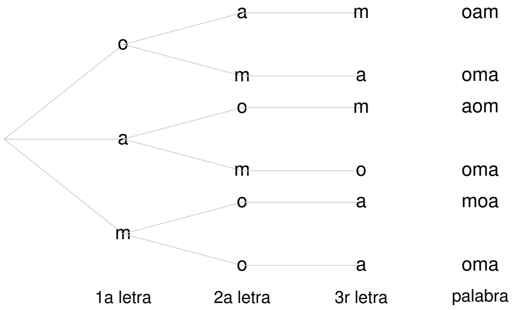
Note que $\mathbb{P}(M_1) = 0.3$; $\mathbb{P}(M_2) = 0.5$; $\mathbb{P}(M_3) = 0.2$ y que $\mathbb{P}(D|M_1) = 0.1$; $\mathbb{P}(D|M_2) = 0.12$; $\mathbb{P}(D|M_3) = 0.04$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_1|D) &= \frac{\mathbb{P}(M_1 \cap D)}{\mathbb{P}(D)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(D|M_1)\mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D|M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(D|M_1)\mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(D|M_1)\mathbb{P}(M_1)} \\
&= \frac{(0.1)\cdot(0.3)}{(0.1)\cdot(0.3) + (0.12)\cdot(0.5) + (0.04)\cdot(0.2)} \\
&= 0.098
\end{aligned}$$

donde se utilizó la *regla de la multiplicación* y el *teorema de probabilidad total*.

Teorema de Bayes

Árbol de probabilidades



Teorema de Bayes

Regla de Bayes

En el ejemplo se utilizó el *Teorema de Bayes* para el cálculo de la probabilidad condicional $\mathbb{P}(M_i|D)$. En general, cuando se tiene una partición $\{M_1, \ldots, M_m\}$ del espacio muestral $\mathcal{S}$, el cálculo de una probabilidad condicional como $\mathbb{P}(M_k|D)$, cuando se tiene información de las probabilidades condicionales $\mathbb{P}(D|M_i)$,

Teorema de Bayes:

$$\mathbb{P}(M_k|D) = \frac{\mathbb{P}(D|M_k)\mathbb{P}(M_k)}{\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(D|M_i)\mathbb{P}(M_i)}$$

Cálculo combinatorio

El *cálculo combinatorio* o *técnicas de conteo* es una colección de reglas para contar eficientemente. Contar correctamente es fundamental para el cálculo de probabilidades de eventos usando la definición clásica de probabilidad. Esto es,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Número de resultados a favor de } A}{\text{Número total de posibles resultados}}$$

Ejemplo:
En una urna se tienen cuatro bolas numeradas $1, 2, 3, 4$. ¿Cuántos números de dos dígitos se pueden formar extrayendo 2 bolas al azar *sin reemplazo*?

Solución: Los números que se pueden formar son: 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.
Note que:

i) Los números 12 y 21 son distintos. Esto es, *el orden es importante*.

ii) $11, 22, 33, 44$ no aparecen pues la extracción es *sin reemplazo*.

Permutaciones

Las *permutaciones* u ordenaciones *sin repetición* permiten calcular el número de arreglos ordenados de tamaño r que se pueden formar de n posibles objetos distintos *sin repetición*:

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \equiv \; {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Donde, $n!$ (*n factorial*) es igual al producto de los primeros n enteros, es decir, $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. La expresión anterior se lee *"permutaciones de n en r"*.

En el ejemplo anterior, el total de números de 2 dígitos de un 4 posibles es

$${}_4P_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

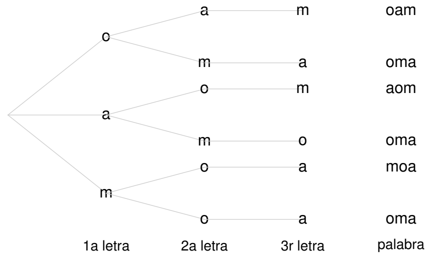
Permutaciones

Ejemplo:

1. ¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden formar con las letras *o*, *a*, *m* *sin repetición*?

Solución: $${}_3P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Diagrama de árbol con todas las palabras posibles

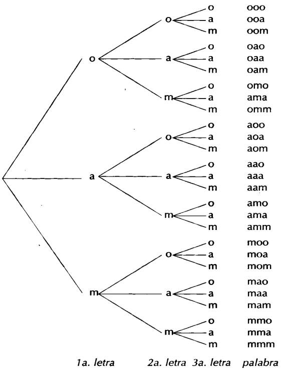


Ordenaciones

Ejemplo:

2. ¿Cuántas palabras de 3 letras se pueden formar con las letras o, a, m *con repetición*?

Solución:



Ordenaciones con repetición:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$$

En general, el número de arreglos ordenados de tamaño r que se pueden formar de n objetos distintos *con* repetición:

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r} \equiv {}_nO_r = n^r$$

y se lee *"ordenaciones de n en r"*.

Ejemplos

3. Se lanza una moneda al aire 4 veces. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral de este experimento?

   Solución:

$$\mathcal{S} = \{(a, a, a, a), (a, a, a, s), \ldots, (s, s, s, s)\}. \quad N =_2 O_4 = 2^4 = 16$$

4. Se lanza una moneda al aire 4 veces. ¿Cuántas son los posibles resultados en donde se obtienen exactamente 2 águilas sin importar el orden?

   Solución:

$$E = \{(a, a, s, s), (a, s, a, s), (a, s, s, a), (s, a, a, s), (s, a, s, a), (s, s, a, a)\}$$

   $n(E) = 6.$

Combinaciones

5. ¿De cuántas formas distintas se pueden elegir k objetos de n distintos? Esto es, ¿de cuántas maneras se pueden seleccionar k objetos *sin reemplazo* de n posibles?

Solución:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Sea esta cantidad, ${}_nC_k$, léase *"combinaciones de n en r"*. Entonces,

$${}_nC_k \equiv \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

donde $\binom{n}{k}$ se conoce como el *coeficiente binomial* e indica el número de *combinaciones* de n elementos tomados k a la vez.

El problema anterior se puede resolver contando las formas de acomodar 2 posiciones, donde van las águilas, de 4 posibles. Es decir,

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

Cálculo Combinatorio

6. Una caja contiene 5 números. Sea extrae 3 al mismo tiempo. ¿Cuáles son los posibles resultados del experimento?

   Solución: Considere cómo calcular el número de formas de seleccionar 3 (combinar) objetos de 5 posibles. Luego,

$$\binom{5}{3} = \frac{5}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$$

   Efectivamente, estos números son: $123, 124, \ldots, 345$.

Cálculo Combinatorio

En resumen, las herramientas para contar eficientemente son las permutaciones, ordenaciones y combinaciones, dependiendo si los casos involucran selecciones con o sin reemplazo y son ordenados o no.

	Sin repetición	Con repetición
Con orden	*Permutaciones*	*Ordenaciones*
Sin orden	*Combinaciones*	

- *Permutaciones:* ¿De cuántas formas se acomodan 3 pelotas *sin* repetir de 5 posibles?

$$n = {}_5P_3 = 5 \cdot 4 = 20$$

- *Ordenaciones:* ¿De cuántas formas se acomodan 3 pelotas *con* repetición de 5 posibles?

$$n = {}_5O_3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

- *Combinaciones:* ¿De cuántas formas se seleccionan 3 pelotas *sin* repetir de 5 posibles y *sin* importar el orden?

$$n = \binom{5}{3} = {}_5C_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Cálculo Combinatorio

Ejemplos:

1. Muestreo (no) ordenado con (sin) reemplazo.

$$S = \left\{ \begin{array}{ccccc} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), & (1,5) \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4), & (2,5) \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), & (3,5) \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4), & (4,5) \\ (5,1), & (5,2), & (5,3), & (5,4), & (5,5) \end{array} \right\}$$

- Pares *ordenados con remplazo* :

$$_5O_2 = 5 \cdot 5 = 25$$

- Pares *ordenados sin remplazo*:

$$_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$$

- Pares *no ordenados sin remplazo*:

$$_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10$$

Cálculo Combinatorio

Ejemplos:

2. Una urna contiene 5 pelotas numeradas $1, \ldots, 5$.

   a. Suponga que se seleccionan 2 pelotas de la urna *con reemplazo*. ¿Cuántos parejas *ordenadas* son posibles? ¿Cuál es la probabilidad de que las 2 extracciones tengan el mismo número?

      Solución: Sean $S_a = \{\text{Todas posibles parejas}\}$ y $A = \{\text{Parejas iguales}\}$.

      $$n(S_a) = {}_5O_2 = 5 \cdot 5 = 25; \quad n(A) = 5 = {}_5O_2 - {}_5P_2 = 25 - 20$$

      $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S_a)} = \frac{5}{25} = 0.20$$

   b. Suponga que se seleccionan 2 pelotas de la urna *sin reemplazo*. ¿Cuántos parejas *ordenadas* son posibles? ¿Cuál es la probabilidad de que la primer bola sea mayor que la segunda?

      Solución: Sean $S_b = \{\text{Todas posibles parejas}\}$ y $B = \{\text{Primer bola es mayor que la segunda}\}$.

      $$n(S_b) = {}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20; \quad n(B) = 10$$

      $$P(B) = \frac{n(B)}{n(S_b)} = \frac{10}{20} = 0.50$$

Cálculo Combinatorio

Ejemplos (cont.):

- Suponga que se seleccionan 2 pelotas de la urna *sin reemplazo*. ¿Cuántos parejas posibles? ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea 5?

  Solución: Sean $S_c = \{\text{Todas posibles parejas}\}$ y $C = \{\text{Suma es 5}\}$.

$$n(S_c) = {}_5C_2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10; \quad n(C) = 2$$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S_c)} = \frac{2}{10} = 0.20$$

Cálculo Combinatorio

Ejemplos:

3. La combinación de un candado está dada por la 3 números del conjunto $J = \{1, 2, \ldots, 39\}$. Encuentre el número de combinaciones posibles.

   Solución: a) Suponiendo posible usar el mismo numero: $n = 39^3 = 59,319$; b) Sin no es posible usar un número más de 2 veces: $n = 39 \cdot 38 \cdot 37 = 54,834$.

4. Un estudiante tiene 4 pares de zapatos y nunca usa el mismo par 2 días consecutivos. ¿De cuántas formas puede usar sus zapatos en 5 días?

   Solución: $n = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$.

5. ¿Cuántos números telefónicos de 8 dígitos distintos son posibles si el primer dígito no puede se ni 0 ni 1?

   Solución: $n = 8 \cdot 10^7 = 80$ millones.

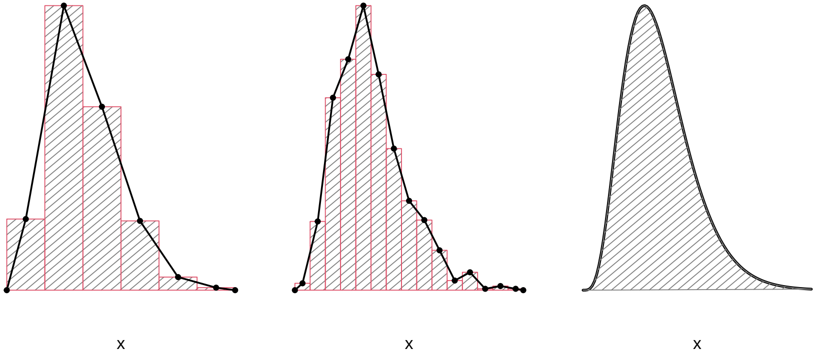
6. a) ¿De cuántas formas se pueden acomodar 10 estudiantes en 10 asientos?; b) ¿Y en 12?

   Solución: a) $n = {}_{10}P_{10} = 10! = 3.628,800$; b) $n = {}_{12}P_{10} = 12!/2! = 229.500,800$.

7. a) ¿De cuántas formas se pueden acomodar 6 personas en una mesa rectangular?; b) Y si la mesa es redonda?

   Solución: a) $n = 6!$; b) $n = 5!$.

4 - V. Aleatorias y D. Probabilidad



Temario

1. Concepto de variable aleatoria.
2. Variables aleatorias discretas
   - Función masa de probabilidad (*f. m. p.*) y función de probabilidad acumulada (*f. p. a.*) o de distribución.
   - Valores esperados, media y varianza.
3. Variables aleatorias continuas
   - Función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) y función de probabilidad acumulada (*f. p. a.*) o de distribución.
   - Valores esperados, media y varianza.
4. Distribuciones de probabilidad bivariadas.
   - Probabilidad condicional e independencia de variables aleatorias.
   - Comportamiento conjunto variables aleatorias. Correlación.
   - Media y varianza de la suma de variables aleatorias.

Variables Aleatorias

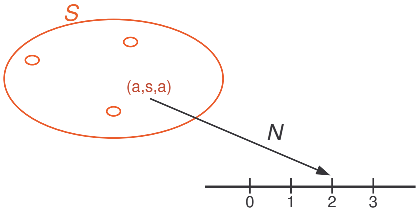
Ejemplo: Considere el lanzamiento de una moneda 3 veces.

El espacio muestral del experimento es:

$$S = \{(s, s, s), (s, s, a), \ldots, (a, a, a)\}$$

Sea $N = \{\text{Número de águilas en los tres lanzamientos}\}$. Entonces,

$w =$	(s,s,s)	(s,s,a)	(s,a,s)	(a,s,s)	(s,a,a)	(a,s,a)	(a,a,s)	(a,a,a)
$N =$	0	1	1	1	2	2	2	3



Note que la ocurrencia de ω es aleatoria, luego los valores que toma la variable N también es aleatoria. N se dice que es una *variable aleatoria* (v.a.).

Variables Aleatorias

Clasificación:

Se define el *rango de la variable aleatoria (R)* como el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria.

Las variables aleatorias se clasifican según su rango: *discretas* si el rango es un conjunto discreto (numerable), o en caso contrario *continuas*.

En nuestro ejemplo, N es una variable aleatoria discreta que toma los valores $0, 1, 2$ ó 3. En este caso, el rango de N es: $R_N = \{0, 1, 2, 3\}$.

Clasificación:

Variables Aleatorias Discretas:

- Se convoca a una reunión extraordinaria a los miembros de un club de 1000 socios. Sea $A =$ Número de asistentes a la reunion. Entonces, $R_A = \{0,1,\ldots,1000\}$.
- Sea $Y =$ Número de llamadas que llegan al conmutador entre 8:00 y 10:00 am. Entonces, $R_Y = \{0,1,2, \ldots\}$.
- Sea $X =$ Número de empleados trabajando medio tiempo o más en un proceso. Entonces, $R_X = \{1, 2, \ldots\}$.

- Sea $T =$ Tiempo en horas que duró la reunión. Entonces, $R_T = \{t : t > 0\}$.
- Sea $D =$ Paridad cambiaria promedio entre USD y \$Mex. el mes de Octubre. Entonces, $R_D = \{d : \$10.00 \leq d \leq \$11.00\}$.
- Sea $B =$ La balanza de pago entre México y China en 2023. Entonces, $R_B = \{b : -\infty < b < +\infty\}$.

Variables aleatorias discretas

Función masa de probabilidad (*f.m.p.*)

Note que para la variable aleatoria: $N =$ Número de águilas

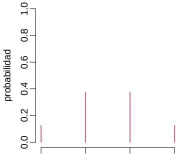
$$\begin{aligned}
P(N=0) = &\quad P(\{(s,s,s)\} = && 1/8 \\
P(N=1) = &\quad P(\{(s,s,a),(s,a,s),(a,s,s)\} = && 3/8 \\
P(N=2) = &\quad P(\{(s,a,a),(a,s,a),(a,a,s)\} = && 3/8 \\
P(N=3) = &\quad P(\{(a,a,a)\} = && 1/8
\end{aligned}$$

Pues por ejemplo,

$$\begin{aligned}
P(N=1) &= P(\{(s,s,a),(s,a,s),(a,s,s)\} \\
&= P(\{(s,s,a) \cup (s,a,s) \cup (a,s,s)\} \\
&= P((s,s,a)) + P((s,s,a)) + P((s,s,a)) \\
&= 1/8 + 1/8 + 1/8 \\
&= 3/8
\end{aligned}$$

Así,

- $P(N < 2) = P(N = 0) + P(N = 1) = 4/8 = 0.50.$
- $P(N > 2) = P(N = 3) = 1/8 = .125.$



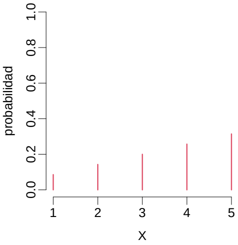
Variables aleatorias discretas

Ejemplo:

Considere X v.a. tal que para $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

$$P(X = x) = \frac{2x + 1}{35}$$

X	$P(X = x)$
1	$3/35$
2	$5/35$
3	$7/35$
4	$9/35$
5	$11/35$
total	$35/35$



Note:

1. $0 \leq P(X = x) \leq 1$, para todo $x \in R_X$.
2. $\sum_{i=1}^{5} P(X = x) = 1$.

Variables aleatorias discretas

Función masa de probabilidad (*f.m.p.)*

La función $f_X : R_X \to [0,\ 1]$, tal que $f_X(x) = P(X = x)$, para todo $x \in R_X$, se dice *función masa de probabilidad (f.m.p.)* de la variable aleatoria X.

Con esta notación las propiedades anteriores pueden re-escribirse como

1. $0 \leq f_X(x) \leq 1$, para todo $x \in R_X$.
2. $\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1$.

Variables aleatorias discretas

Función de distribución o de probabilidad acumulada (*f.p.a.)*

La *función de distribución ó de probabilidad acumulada (f. p. a.)*, $F_X(x)$, de una variable aleatoria X se define por:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad \text{para toda } \; x \in \mathbb{R}$$

Propiedades:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Si a y b son dos números tales que $a < b$, entonces $F_X(a) \leq F_X(b)$. Es decir, la función de distribución es *no decreciente*.
3. $F_X(-\infty) = 0$, y $F_x(+\infty) = 1$.
4. $\lim_{h\to 0^+} F_X(x+h) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, la función de distribución es *continua por la derecha*.

Variables aleatorias discretas

Función de distribución o de probabilidad acumulada (*f.p.a.)*

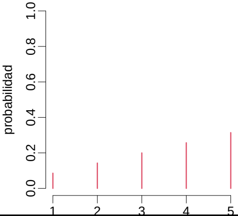
Ejemplo (cont.) Considere otra vez a X, v.a. tal que

$$P(X = x) = \frac{2x + 1}{35}$$

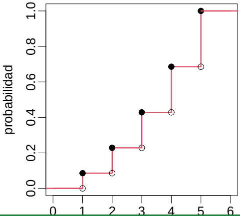
Entonces X tiene las siguientes *f. m. p.* y *f. p. a.*.

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0.086	0.143	0.200	0.257	0.314
$F_X(x)$	0.086	0.229	0.429	0.686	1.000

Función Masa de Probabilidad (*f. m. p.*)



Función de probabilidad acumulada (*f. p. a.*)



Variables aleatorias discretas

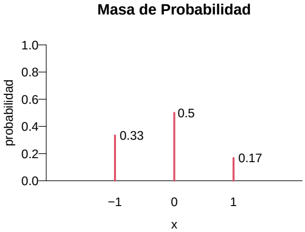
Ejemplos:

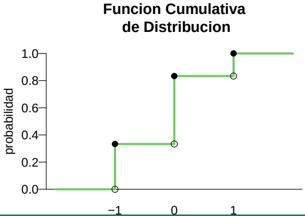
Función masa de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & x = -1 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1/6 & x = +1 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/3 & -1 \leq x < 0 \\ 5/6 & 0 \leq x < +1 \\ 1 & x \geq +1 \end{cases}$$





Variables aleatorias discretas

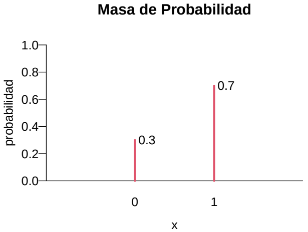
Bernoulli ($p = 0.7$)

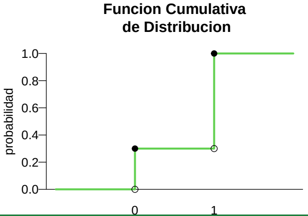
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1/3 & -1 \leq x < 0 \\ 5/6 & 0 \leq x < +1 \\ 1 & x \geq +1 \end{cases}$$





Variables aleatorias discretas

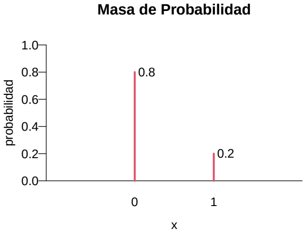
Bernoulli ($p = 0.2$)

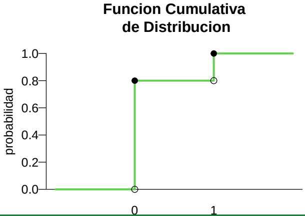
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq +1 \end{cases}$$





Variables aleatorias discretas

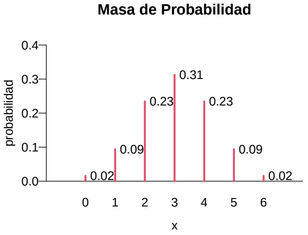
Binomial ($n = 6, p = 0.5$)

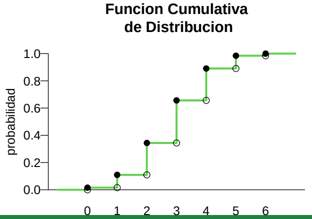
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \binom{6}{x} 0.5^x (1-0.5)^{6-x}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F(x) = \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k \leq x} \binom{6}{k} 0.5^k (1-0.5)^{6-k}$$





Variables aleatorias discretas

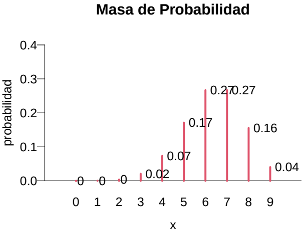
Binomial ($n = 9, p = 0.7$)

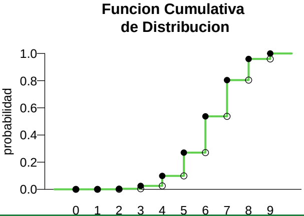
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \binom{9}{x} 0.7^x (0.3)^{9-x}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F(x) = \sum_{k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \sum_{k \le x} \binom{9}{k} 0.7^k (0.3)^{9-k}$$





Variables aleatorias discretas

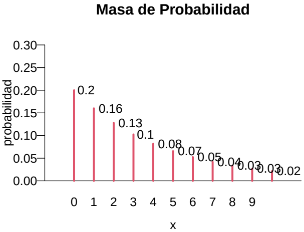
Geométrica ($p = 0.2$)

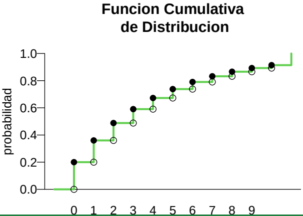
Función masa de probabilidad

$$p(x) = (1-p)^{x-1}p$$
$$= (1-0.2)^{x-1}(0.2)$$

Función de probabilidad acumulada

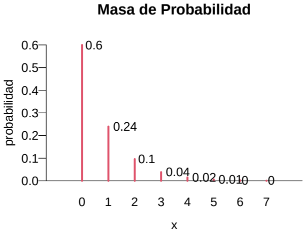
$$F(x) = \sum_{k\leq x}(1-p)^{k-1}p$$
$$= \sum_{k\leq x} 0.8^{k-1}(0.2)$$





Variables aleatorias discretas

Geométrica ($p = 0.6$)

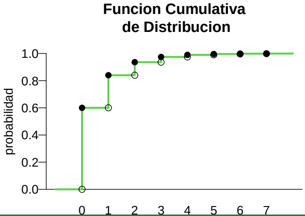


Función masa de probabilidad

$$p(x) = (1-p)^{x-1}p$$
$$= (1-0.6)^{x-1}(0.6)$$

Función de probabilidad acumulada

$$F(x) = \sum_{k \leq x}(1-p)^{k-1}p$$
$$= \sum_{k \leq x} 0.4^{k-1}(0.6)$$



Variables aleatorias discretas

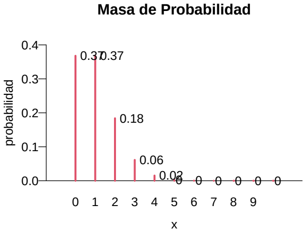
Poisson ($\lambda = 1.0$)

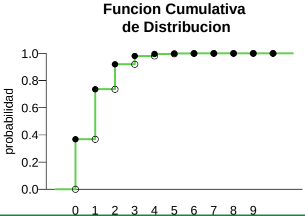
Función masa de probabilidad

$$p(x) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-1}\,\frac{1}{x!}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F(x) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1}\sum_{k=0}^{x}\frac{1}{k!}$$





Variables aleatorias discretas

Poisson ($\lambda = 4.0$)

Función masa de probabilidad

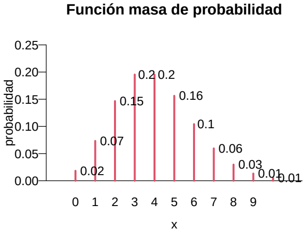
$$p(x) = e^{-\lambda}\ \frac{\lambda^x}{x!}$$

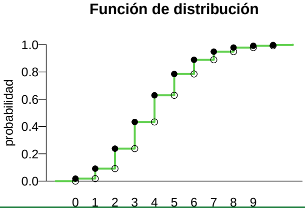
$$= e^{-4}\ \frac{4^x}{x!}$$

Función de probabilidad acumulada

$$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}$$

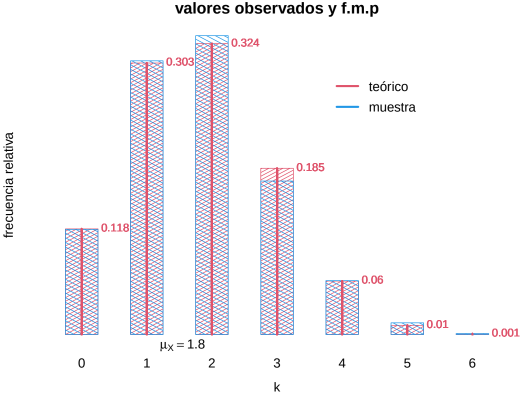
$$= e^{-4} \sum_{k=0}^{x} \frac{4^k}{k!}$$





Problema:

Comité con 6 miembros y probabilidad de voto a favor de $p = 0.3$



Modelo: $X \sim \text{Binomial}(n = 6, p = 0.3)$

¿Cuántos votos podemos esperar, o bien, cuántos votos habrá en promedio?

Variables aleatorias discretas

Valor esperado

El *valor esperado, esperanza matemática o media* de una variable aleatoria o distribución es una *medida de la tendencia central* de la distribución.

En el caso de variables aleatorias discretas se define como

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in R_X} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in R_X} x f_X(x)$$

$\star$ Note que el valor esperado de una variable aleatoria discreta es *el promedio de los valores que puede tomar la variable ponderado por la correspondiente probabilidad*.

- Recuerde el cálculo del promedio a partir de datos agrupados.

Valor esperado

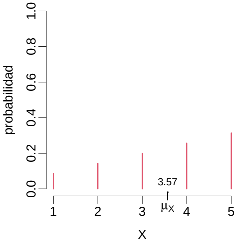
Ejemplo: Número de águilas en 3 volados

$$\mu_N = E[N] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1.5 \text{ águilas}$$

Ejemplo: variable aleatoria X

$$P(X = x) = \frac{2x+1}{35}$$

X	$P(X=x)$
1	$3/35$
2	$5/35$
3	$7/35$
4	$9/35$
5	$11/35$
total	$35/35$



$$\mu_X = E[X] = 1 \cdot \frac{3}{35} + 2 \cdot \frac{5}{35} + 3 \cdot \frac{7}{35} + 4 \cdot \frac{9}{35} + 5 \cdot \frac{11}{35} = 3.57$$

Valor esperado

Propiedades:

Sean a y b constantes, y X una variable aleatoria. Entonces:

1. $\mathbb{E}[a] = \sum_{x \in R_X} aP(X = x) = a \sum_{x \in R_X} P(X = x) = a \cdot 1 = a$
2. $\mathbb{E}[bX] = \sum_{x \in R_X} bxP(X = x) = b \sum_{x \in R_X} xP(X = x) = bE[X]$
3. $\mathbb{E}[a + bX] = \sum_{x \in R_X} (a + bx)P(X = x) = a + bE[X]$

Ejemplo: Suponga que la variable aleatoria X del ejemplo anterior representa el nivel del inversión para el año siguiente en una empresa. Si el monto de la inverión en millones de pesos está dado por $0.5 + 10X$, ¿cuál es el valor esperado de inversión para el próximo año?

Solución:

$$E[0.5 + 10X] = 0.5 + 10E[X] = 0.5 + 10 \cdot 3.37 = 36.2 \text{ millones de pesos}$$

Valor esperado

Valor esperado de funciones de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria discreta con función masa de probabilidad $f_X(x) = P(X = x)$ y sea $g(\cdot)$ una función real. Entonces, para $Y = g(X)$

$$\mu_Y = E[Y] = E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f_X(x) = \sum_{x \in R_X} g(x) P(X = x)$$

Ejemplo:
Sean $g(u) = \sqrt{u}$, o $h(v) = (v - 5)^2$. Entonces,

$$U = g(X) = \sqrt{X} \quad \text{ó} \quad V = h(X) = (X - 5)^2$$

también son variables aleatorias y su *valor esperado* está dado por

$$\mu_U = \mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f_X(x) = \sum_{x \in R_X} \sqrt{x} P(X = x)$$

$$\mu_V = \mathbb{E}[H] = \mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x \in R_X} h(x) f_X(x) = \sum_{x \in R_X} (x - 5)^2 P(X = x)$$

Valor esperado

Valor esperado de funciones de una variable aleatoria

Ejemplo: Considere otra vez el experimento de lanzar 3 veces una moneda y sea la variable aleatoria $X =$ Número de águilas. Entonces, vimos que

N	0	1	2	3
p	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
G	$+5$	-10	-10	$+5$

Si el jugador A recibe \$5 si todas las monedas salen con la misma cara y paga \$10 si salen distintas, ¿cuánto espera ganar (perder) A?

Valor esperado

Valor esperado de funciones de una variable aleatoria

Ejemplo: Considere otra vez el experimento de lanzar 3 veces una moneda y sea la variable aleatoria $X =$ Número de águilas. Entonces, vimos que

N	0	1	2	3
p	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
G	$+5$	-10	-10	$+5$

Si el jugador A recibe \$5 si todas las monedas salen con la misma cara y paga \$10 si salen distintas, ¿cuánto espera ganar (perder) A?

Solución:
Sea $G = g(N)$ el monto en pesos que espera ganar A. Entonces,

$$\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}[g(N)] = +5\frac{1}{8} - 10\frac{3}{8} - 10\frac{3}{8} + 5\frac{1}{8} = -50/8 = -6.25$$

Varianza

Propiedades:

Sea X variable aleatoria con valor esperado μ_X y varianza σ_X^2 y sean a, b constantes. Entonces se cumple que:

1. $\text{var}(X) \geq 0$
2. $\text{var}(a) = 0$
3. $\text{var}(bX) = b^2\text{var}(X)$
4. $\text{var}(a + bX) = b^2\text{var}(X)$

Varianza

Ejemplo:

En la fase inicial de proyecto, el tiempo T (en semanas) en que la compañía constructora *ABC* que entregara la obra *xyz* es incierta. Por experiencia, se espera entregar la obra a tiempo con una probabilidad del 50 %. En caso de retraso, T sigue una distribución de probabilidad dada por la siguiente tabla:

T	0	1	2	3	4	5
f_T	0.500	0.150	0.125	0.100	0.050	0.075
F_T	0.500	0.650	0.775	0.875	0.925	1.000
L	0.0	1.5	2.0	2.5	3.0	5.0

El tiempo $T = 5$ representa en realidad la probabilidad de entregar la obra después de 4 semanas. ($\{T = 5\} \equiv \{T > 4\}$).

Varianza

Ejemplo: (cont.)

En caso de retraso la constructora es multada (L) con \$1M más medio millón por cada semana extra, y una multa fija de \$5M si el retraso es de más de 4 semanas. Esto es,

$$L = \begin{cases} 0 & \text{si } \ T = 0 \\ 1.0 + 0.5T & \text{si } \ 1 \leq T \leq 4 \\ 5.0 & \text{si } \ T > 4 \end{cases} \tag{1}$$

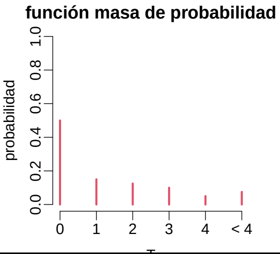
1. Bosqueje la *f. m. p.* y la *f. p. a.*
2. Calcule el valor esperado y varianza del tiempo de entrega.
3. Encuentre la multa esperada y su varianza.

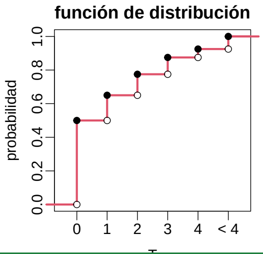
Varianza

Ejemplo: (cont.)

Solución:
Sea T la variable aleatoria discreta que describe (modela) el tiempo de terminación de la obra *xyz*, y sea L la *v. a.* definida por la definición (1).

1. Función masa de probabilidad (*f. m. p.*) y función de probabilidad acumulada o de distribución (*f. p. a.*).





Varianza

Ejemplo: (cont.)

Solución:

2.

$$
\begin{aligned}
E(T) &= 0(.500) + 1(.150) + \cdots + 5(.075) = 1.28 \text{ semanas} \\
V(T) &= (0-1.28)^2(.500) + (1-1.28)^2(.150) + \cdots + (5-1.8)^2(.075) = 2.60 \text{ semanas}^2 \\
&= \left[0^2(.500) + 1^2(.150) + \cdots + 5^2(.075)\right] - (1.28)^2 = 2.60 \text{ semanas}^2 \\
\sigma(T) &= \sqrt{2.60} = 1.61 \text{ semanas}
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
E(L) &= 0.0(.500) + 1.5(.150) + \cdots + 5(.075) = 1.25M \\
V(L) &= \left[0.0^2(.500) + 1.5^2(.150) + \cdots + 5^2(.075)\right] - 1.25^2 = 2.225M^2 \\
\sigma(L) &= \sqrt{2.225} = 1.492M
\end{aligned}
$$

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

Problemas CuadernoCompleto, sección 3.2 :

Ejercicios recomendados:

$$\underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \underline{4}, \mathbf{5}, 6, 7, \mathbf{8}, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 23, \underline{\mathbf{24}}, 25, 26, \underline{27}, \underline{29}$$

. . .

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

5. Se presentan 5 funciones. Determine cuáles son funciones masa de probabilidad. Justifique su respuesta.
   1. $f(x) = +\sqrt{x}; \quad x = 0.01, .04, .09, .16$
   2. $f(x) = \frac{x}{5}; \quad x = 1, 2, 3$
   3. $f(x) = \frac{x-1}{2}; \quad x = 0, 1, 2$
   4. $f(x) = x - x^2 + 0.1; \quad x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$
   5. $f(x) = \frac{3/4}{x!(3-4)!}; \quad x = 0, 1, 2, 3$

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

5. *Solución*:

   Si $f(x)$ es una función masa de probabilidad legítima, entonces

$$i) \quad f(x) \geq 0$$
$$ii) \quad \sum_{x \in R_X} f(x) = 1$$

1. SI: $\sqrt{.01} + \cdots + \sqrt{.16} = .1 + .2 + .3 + .4 = 1.0$
2. NO: $1/5 + 2/5 + 3/5 = 6/5 \neq 1.0$
3. NO: f no es *f. m. p.* pues para $x = 0,\ f(0) = -1/2 < 0$.
4. NO: $.1 - .01 + .1 + \cdots + .5 - .25 + .1 \neq 1.0$
5. SI: $\frac{3}{4}\left[\frac{1}{0!3!} + \frac{1}{1!2!} + \frac{1}{2!1!} + \frac{1}{3!1!}\right] = \frac{3}{4}\left[1/6 + 1/2 + 1/2 + 1/6\right] = 1$

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

8. Sea X una variable aleatoria, tal que:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{c} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{9-x}{c} & \text{si } x = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

   1. Calcule el valor de c que hace que $p(x)$ sea una *f. m. p.*. Calcule la distribución de X y grafíquela.
   2. Calcule el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria.
   3. Calcule $\mathbb{P}(2 < X < 7)$.

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

Solución:

8.

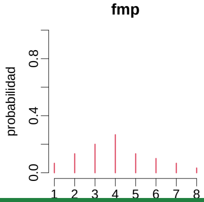
$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{c} & \text{si } x = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{9-x}{c} & \text{si } x = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$

1. Para que $p(x)$ sea una *f. m. p.*, se debe tener que $\sum p(x) = 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\left[(2+4+6+8)+(4+3+2+1)\right] &= 1 \\ \frac{1}{c}\,30 &= 1 \\ 30 &= c \end{aligned}$$

Luego, la función masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{30}, & \text{si } x = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{9-x}{30}, & \text{si } x = 5, 6, 7, 8 \end{cases}$$



Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

Solución:

1.
$$p(x) = \begin{cases} \frac{2x}{30} & \text{si } x = 1,2,3,4 \\ \frac{9-x}{30} & \text{si } x = 5,6,7,8 \end{cases}$$

2.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum x\mathbb{P}(X=x) = 1\tfrac{2}{30} + \cdots + 4\tfrac{8}{30} + 5\tfrac{4}{30} + \cdots + 8\tfrac{1}{30} = 4.0 \\ \text{var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \left[1^2\tfrac{2}{30} + \cdots + 4^2\tfrac{8}{30} + 5^2\tfrac{4}{30} + \cdots + 8^2\tfrac{1}{30}\right] - (4.0)^2 = 3.0 \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = 1.732 \end{aligned}$$

3.
$$\mathbb{P}(2 < X < 7) = \mathbb{P}(X=3) + \cdots + \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{30}\left[6+8+4+3\right] = \frac{21}{30}$$

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

24

1. Si X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2, defina Z como:

$$Z = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} + (X - 12)$$

Encuentre el valor esperado de Z.

2. Sea Y una variable aleatoria con media λ y varianza γ^2, y sea

$$W = Y + \frac{2Y - \lambda}{\gamma}$$

Encuentre el valor esperado y la varianza de W.

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

Solución:

24

1. X v.a. con $E(X) = \mu$, y $\text{var}(X) = \sigma^2$,

$$Z = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} + (X - 12)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} + (X-12)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right] + \mathbb{E}(X-12) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}(X-\mu)^2 + \mathbb{E}(X) + 12 \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 + \mu - 12 \\
&= \mu - 11
\end{aligned}$$

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

17. Una urna tiene 4 canicas roja y 6 canicas blancas, se extraen 3 canicas sin reemplazo. Sea X la variable aleatoria que denota el número total de canicas rojas extraídas de la urna.
    1. Construya una tabla mostrando la distribución de la probabilidad de X.
    2. Encuentre su valor esperado, varianza y desviación estándar.

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.2

Solución:

17. Sea X el número de canicas rojas en la muestra de tamaño 3, extraída sin reemplazo. $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

1.

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3-0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{0!(4-0)!}\ \frac{6!}{3!(6-3)!}}{\frac{10!}{10!(10-0)!}} = \frac{1\cdot 20}{120} = 10/60$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3-1}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{1!(4-1)!}\ \frac{6!}{2!(6-2)!}}{120} = \frac{4\cdot 15}{120} = 30/60$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{3-2}}{\binom{10}{3}} = \frac{6\cdot 6}{120} = 18/60$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{3-3}}{\binom{10}{3}} = \frac{4\cdot 1}{120} = 2/60$$

x	$p(x)$
0	0.167
1	0.500
2	0.300
3	0.033
	1.000

2.

$$\mathbb{E}(X) = 0(.6) + 1(.5) + 2(.3) + 3(.033) = 1.2$$

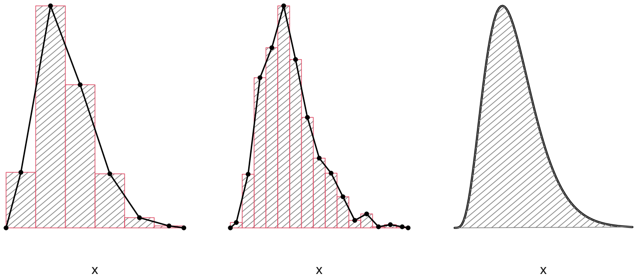
$$\text{var}(X) = 0^2(.6) + 1^2(.5) + 2^2(.3) + 3^2(.033) - (1.2)^2 = 0.56$$

$$\text{de}(X) = \sqrt{0.56} = 0.748$$

Variables aleatorias continuas

Las *variables aleatorias continuas* son aquellas que pueden tomar cualquier valor en un intervalo dado, por lo que no es posible construir una tabla de frecuencias relativas para el rango (posibles valores de la *v. a.*.) o *soporte*.

La función de densidad puede verse como un *proceso límite* en funciones de masa de probabi



Variables aleatorias continuas

Función de densidad de probabilidad

La *función de densidad de probabilidad* (*f. d. p.*) de una variable aleatoria continua X puede verse como un *proceso límite* en funciones de masa de probabilidad. Por lo mismo, se representan por medio de expresiones matemáticas $f_X(x)$.

En el caso de que X sea una *v. a.* discreta:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} \mathbb{P}(X = x)$$

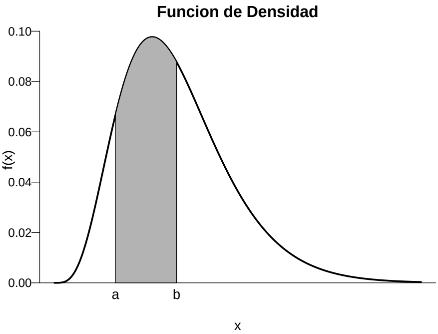
Si X es una *v. a.* continua

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(u)du$$

Por lo mismo, a diferencia de las *v. a.* discretas, si X es continua,

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_a^a f_X(u)du = 0$$

para toda $a \in R_X$.



Variables aleatorias continuas

Función de densidad de probabilidad

Ejemplo:

Una fabricante de calculadoras electrónicas ha decidido exportar su producto a los E.E.U.U. Un despacho de consultoría ha encontrado que la demanda X (aleatoria) del producto (en miles de pesos) puede representarse por la siguiente función de densidad.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-30}{450} & 30 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para encontrar la probabilidad de que la demanda se encuentre entre 40 y 50 mil pesos,

$$\mathbb{P}(40 < X < 50) = \int_{40}^{50} \frac{u-30}{450}\, du = \frac{1}{450}\left[\frac{u^2}{2} - 30u\right]_{40}^{50} = \frac{1}{450}(150) = \frac{1}{3}$$

Note que

- $f_X(x) \geq 0$, para todo $-\infty < x < +\infty$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)du = 1$

Variables aleatorias continuas

Función de densidad de probabilidad

La función $f_X : R_X \to R^+$, se dice que es *función de densidad de probabilidad (f. d. p.)* de la variable aleatoria continua X si

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(u)du$$

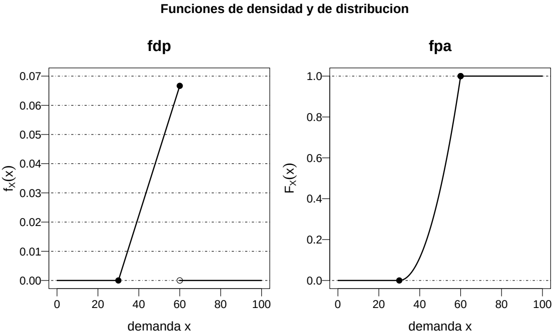
La función de densidad $f_X(x)$ satisface las siguientes propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0$, para todo $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) = 1$

Función de probabilidad acumulada (*f. p. a.*) ó distribución

Ejemplo:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{30}^{x} \frac{u-30}{450}\, du = \frac{u^2 - 60u + 900}{900}, \quad \text{para todo } \ 30 \leq x \leq 60$$



Variables aleatorias continuas

Función de probabilidad acumulada ó distribución

La *función de probabilidad acumulada (f. p. a.) ó de distribución* $F_X(x)$ de una variable aleatoria continua X se define por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du, \quad \text{para toda } \ x \in R_x$$

Propiedades:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Si $a < b$, entonces, $F_X(a) \leq F_X(b)$. Es decir, la función de distribución es una *función no decreciente*.
3. $F_X(-\infty) = 0$, y $F_x(+\infty) = 1$.
4. $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Es decir, la función de distribución es *continua por la derecha*.
5. Si además X tiene *f. d. p.* $f_X(x)$, se cumple: $F'(u) = \frac{dF_X}{dx}\big|_{x=u} = f_X(u)$.
6. Para todo $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Distribución uniforme

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Función probabilidad acumulada o de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Valor Esperado:

$$\mu_X = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

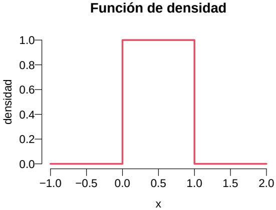
Varianza:

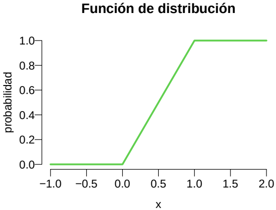
$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Desviación estándar:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

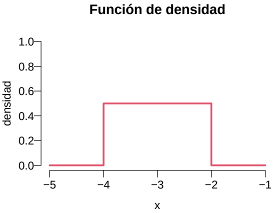
$X \sim \text{unif}(0, 1)$

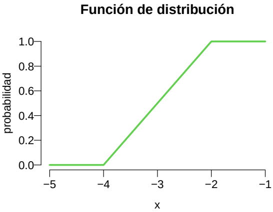




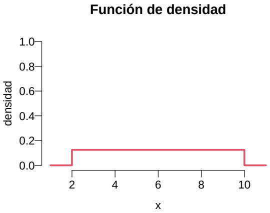
Distribución uniforme

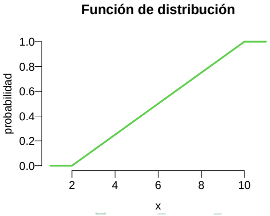
$X \sim \text{unif}(-4, -2)$





$X \sim \text{unif}(2, 10)$





Distribución exponencial

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Función de probabilidad acumulada o de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & 0 \leq x \end{cases}$$

Valor esperado:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = 1$$

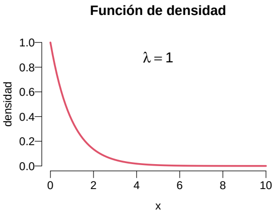
Varianza:

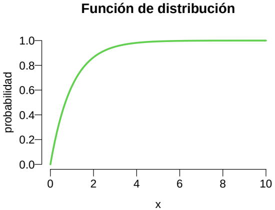
$$\sigma_X^2 = \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

Desviación estándar:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = 1$$

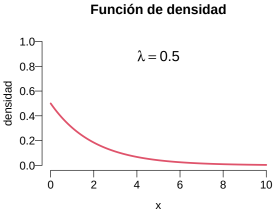
$X \sim \text{Exp}(1.0)$

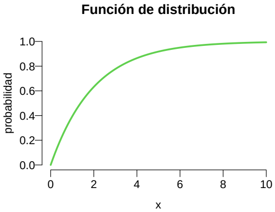




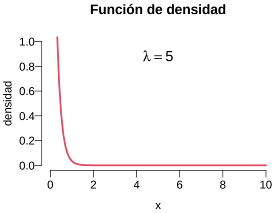
Distribución exponencial

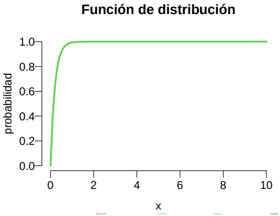
$X \sim \mathrm{Exp}(0.5)$





$X \sim \mathrm{Exp}(5.0)$





Distribución gamma

Función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

donde$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du.$

Función de probailidad acumulada o de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x u^{\alpha-1} e^{-\lambda u} du & 0 \leq x \end{cases}$$

Valor esperado:

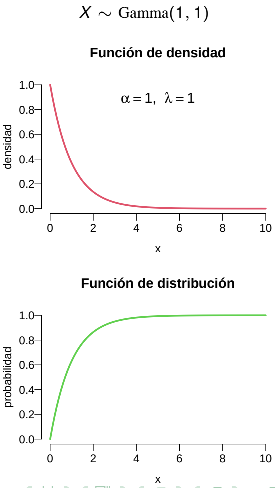
$$\mu_X = E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Varianza:

$$\sigma_X^2 = V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

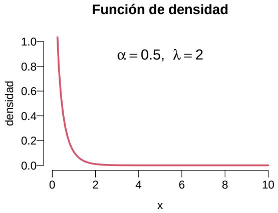
Desviación estándar:

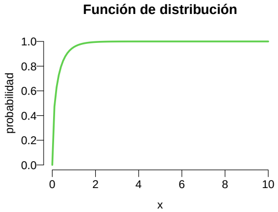
$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda^2}}$$



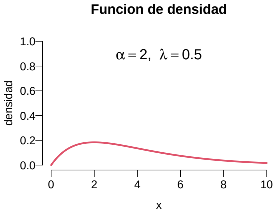
Distribución gamma

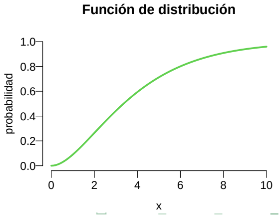
$X \sim \mathrm{Gamma}(0.5, 2.0)$





$X \sim \mathrm{Gamma}(2.0, 0.5.0)$





Distribución normal

Función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

con $-\infty < x < +\infty$

Función de probabilidad acumulada o de distribución

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2} du$$

con $-\infty < x < +\infty$.

Valor esperado:

$$\mu_X = \mathbb{E}(X) = \mu$$

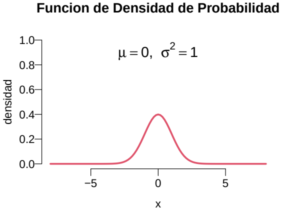
Varianza:

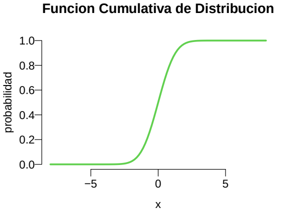
$$\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = \sigma^2$$

Desviación estándar:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

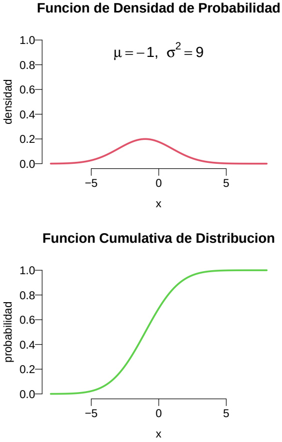
$$X \sim \mathrm{N}(0, 1)$$



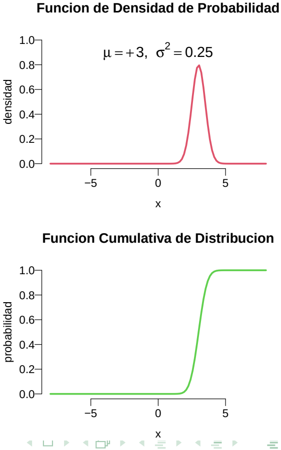


Distribución normal

$X \sim \mathrm{N}(-1.0, 9.0)$



$X \sim \mathrm{N}(+3.0, 0.25)$



Valor esperado

Se define el *valor esperado* de una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \mu_X$$

cuando la integral existe. Las propiedades del valor esperado son las mismas que se presentaron para el caso de las variables aleatorias discretas A saber,

1. $E(a) = \int_{R_X} a f_X(u) du = a \int_{R_X} f_X(u) du = a \cdot 1 = a$
2. $\mathbb{E}(bX) = \int_{R_X} b x F_X(u) du = b \int_{R_X} x f_X(u) du = bE(X)$
3. $\mathbb{E}(a + bX) = \int_{R_X} (a + bx) f_X(u) du = a + b\mathbb{E}(X)$

Valor esperado

El concepto de *valor esperado* es independiente del tipo de variable aleatoria.

El material desarrollado para variables aleatorias discretas se repite para las continuas, sustituyendo las sumatorias por integrales y las *funciones masa de probabilidad (f. m. p.)* por las *funciones de densidad de probabilidad (f. d. p.)*.

Sea X una *v. a.* continua con f_X su *f. d. p.*. Se define *media* o *valor esperado* de X como

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f_X(u) du \tag{1}$$

Si $Y = g(X)$ donde $g : R \longrightarrow R$ es una función, Y es también una variable aleatoria y su valor esperado se puede calcular como

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Así por ejemplo,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \tag{2}$$

Valor esperado

Las definiciones y propiedades asociadas al valor esperado de las variables aleatorias discretas se repiten para las variables aleatorias continuas.
Así por ejemplo, si X es una *v. a.* continua con *f. d. p.* f_X y *valor esperado* $\mathbb{E}X = \mu_X$, entonces la *varianza* de la *v. a.* está dada por:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx$$

Nuevamente se cumple que

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$$

Similarmente se tiene,

- $\mathbb{E}(a + bX) = a + \mathbb{E}(X)$
- $\text{var}(a + bX) = b^2\text{var}(X)$
- Etc.

Valor esperado

Se define la *varianza* σ^2 de una variable aleatoria continua X con media $\mathbb{E}(X) = \mu$ y función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ por

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx$$

cuando existe la integral. Las propiedades de la varianza son las mismas que se presentaron para el caso de las variables aleatorias discretas. A saber,

1. $\text{var}(X) \geq 0$
2. $\text{var}(a) = \mathbb{E}(a^2 - (a)^2) = a^2 - a^2 = 0$
3. $\text{var}(bX) = b^2 \text{var}(X)$
4. $\text{var}(a + bX) = b^2 \text{var}(X)$

Recuerde,

$$\sigma_X^2 = V(x) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mu_X^2$$

Se define la *desviación estándar* y el *coeficiente de variación* de una *v. a.* continua por

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}, \quad \text{cv}(X) = \frac{\sigma_X}{\mu_X}$$

Ejemplo

Ejemplo: La demanda X es una *v. a.* continua con *f. d. p.*:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x-30}{450} & 30 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{30}^{60} x \, \frac{x-30}{450} dx = \int_{30}^{60} \frac{x^2 - 30x}{450} dx = \frac{1}{450} \left[\frac{x^3}{3} - 30 \frac{x^2}{2} \right]_{30}^{60} = 50$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{30}^{60} x^2 \, \frac{x-30}{450} dx = \frac{1}{450} \int_{30}^{60} (x^3 - 30x^2) dx = \frac{1}{450} \left[\frac{x^4}{4} - 30 \frac{x^3}{3} \right]_{30}^{60} = 2550$$

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = 2550 - (50)^2 = 50$$

$$\sigma_X = \sqrt{50} = 7.07$$

Ejercicios

Problemas Cuaderno Gris, sección 3.3:

Recomendados:

2, **3**, **4**, 5, 6, 8, **9**, 10, **11**, 12, 13, 15, **16**, 17, **18**, 20

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.3

9. Sea X la *v. a.* que denota el tiempo en minutos que una persona tiene que esperar hasta que pasa el camión en cierto lugar de la ciudad. Suponiendo que el comportamiento de X es uniforme en el intervalo $(0, 30)$, es decir, que la función de la densidad de X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/30 & 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

   1. Obtenga la función de distribución (*f. p. a.*) F_X.
   2. Calcule el valor esperado de X, la desviación estándar, la mediana y el coeficiente de variación de X.
   3. Diariamente, una persona se dirige a tomar el camión, pero no está dispuesta a tomar el camión si éste tarda más de 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de dos días no tome el camión?

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.3

11. La variable aleatoria Z tiene una función de densidad dada por:

$$f_Z(z) = c + dz, \qquad 0 < z < 2$$

   1. Calcule los valores de c y d tales que el valor esperado de la variable Z sea igual a $3/4$.
   2. Obtenga el valor esperado de W si:

$$W = 7 - 2Z^2$$

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.3

16. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3k|x-1| & 0 \leq x \leq 3 \\ kx^2 & 3 < x \leq 6 \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

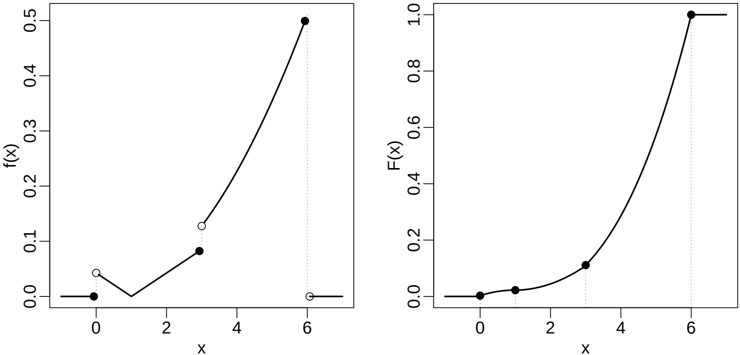
1. Encuentre el valor de k que hace que $f_X(x)$ sea una función de densidad. Grafique $f_X(x)$.
2. Encuentre $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 2)$, usando el valor de k.
3. Obtenga y grafique $F_X(x)$.
4. Encuentre $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$, usando el valor de k.
5. Obtenga $\mu_X = \mathbb{E}[X]$ y $\sigma_X^2 = \text{var}(X)$.

Cuaderno de ejercicios. Sec 3.3

Solución:

$$k = 6/423 = 0.0141844$$

Funciones de densidad y de distribucion



Cuaderno de ejercicios. Sec 3.3

18. El tiempo requerido (en fracción de hora) por los estudiantes para presentar un examen de una hora y media es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 + x & 0 \leq x \leq 1.5 \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

1. Determine el valor de k.
2. Calcule el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria.
3. Obtenga $\mathbb{E}[2 - 3X]$ y $\text{var}(2 - 3X)$.
4. Encuentre la función de probabilidad acumulada.
5. Calcule la probabilidad de que un estudiante termine en menos de media hora.
6. Dado que un estudiante necesita al menos 30 minutos para presentar el examen, encuentre la probabilidad de que necesite al menos 50 minutos para terminarlo.

Distribuciones de probabilidad bivariadas

Distribuciones Discretas

Sean X y Y variables aleatorias discretas, con rangos R_X y R_Y respectivamente. La *función de probabilidad bivariada conjunta* f_{XY} está dada por:

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y), \quad \text{para todos } \ x \in R_X, \ y \in R_Y$$

En el caso de que ambos rangos R_X, R_Y sean finitos, la distribución bivariada conjunta se puede presentar en un *tabla de probabilidades conjuntas*. Por ejemplo, si $R_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ y $R_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, la distribución conjunta de probabilidad de X y Y:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$	$f(x_1, y_n)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$	$f(x_2, y_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	$f(x_m, y_1)$	$f(x_m, y_2)$	$\cdots$	$f(x_m, y_n)$

donde

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = f_{XY}(x_i, y_j), \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n$$

Distribuciones de probabilidad bivariadas

Ejemplo:

En una comunidad de la periferia de la ciudad de México, *hace ya tiempo*, se investigó el ingreso de las parejas que formaban el núcleo familiar. Se construyó una tabla de *doble entrada* donde X representa el ingreso de él y Y el ingreso de ella, ambos en miles de pesos. La distribución del ingreso se presenta en la siguiente tabla:

	Ingreso de ella					
Ingreso de él	0	1	2	3	4	total
1	.11	.03	.01	.01	.00	.16
2	.25	.10	.04	.01	.00	.40
3	.03	.08	.02	.02	.00	.15
4	.02	.07	.06	.03	.01	.19
5	.01	.02	.01	.02	.04	.10
total	.42	.30	.14	.09	.05	1.00

Así, en aquel entonces, la probabilidad de que él tenga un ingreso de \$2000 y ella de \$3000 es de

$$P(X = 2, Y = 3) = p_{23} = 0.01$$

Es decir, el 1 % de las parejas estaban en esa situación. En la tabla puede verse también que, por ejemplo, 42 % de ellas no tenían ingreso. Igualmente, el 15 % de ellos tenían ingresos de \$3000.

Distribuciones discretas

Sean X y Y variables aleatorias discretas con rangos R_X y R_Y respectivamente, y $f_{XY} : R_X \times R_Y \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

para todo $x \in R_X$ y $y \in R_Y$. La función f_{XY} se dice *función masa de probabilidad conjunta de (X, Y)*.

Propiedades :

1. $0 \leq f_{XY}(x, y) \leq 1$, para todo x y y..
2. $\sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} f_{XY}(x, y) = 1$.

Distribuciones marginales

Sean X y Y variables aleatorias discretas con rangos R_X y R_Y respectivamente y con función de probabilidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

La *función marginal de X* está dada por:

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in R_Y} f_{XY}(x, y) = \sum_{y \in R_Y} P(X = x, y = y)$$

para todo $x \in R_X$. Similarmente, la *función marginal de Y* está dada por:

$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in R_X} f_{XY}(x, y) = \sum_{x \in R_X} P(X = x, y = y)$$

para todo $y \in R_Y$.

Distribuciones marginales

De esta forma, en el ejemplo anterior, las funciones marginales de X y Y están dadas por:

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	.16	.40	.15	.19	.10

y	0	1	2	3	4
$f_Y(y)$	.42	.30	.14	.09	.05

Note que las funciones marginales de probabilidad f_X y f_Y son funciones de masa de probabilidad *propias* en el sentido que cumplen con las propiedades de *f. m. p.*. Esto es,

- a. $0 \leq f_X(x) \leq 1$, para todo $x \in R_X$.
  b. $\sum_{x \in R_X} f_X(x) = 1$.
- a. $0 \leq f_Y(y) \leq 1$, para todo $y \in R_Y$.
  b. $\sum_{y \in R_Y} f_Y(y) = 1$.

Distribuciones condicionales

Recuerde que si A y B son eventos tales que $\mathbb{P}(B) > 0$, se define la *probabilidad condicional* de A dado B como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De la misma forma, si X y Y son *v. a.* discretas con función de probabilidad conjunta $f_{XY}(x, y)$ y funciones de probabilidad marginal $f_X(x) = P(X = x)$ y $f_Y(y) = P(Y = y)$, puesto que son probabilidades de los eventos $\{X = x\}$ y $\{Y = y\}$, respectivamente podemos definir la *función de probabilidad condicional* de la variable aleatoria X dado $\{Y = y\}$ por:

$$f_{X|Y=y}(x) = f_X(x|Y = y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{P(X = x, Y = u)}{P(Y = y)}$$

Por ejemplo, en el caso de ingreso por pareja

$$f_X(2|Y = 0) = \frac{f_{XY}(2, 0)}{f_Y(0)} = \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{.25}{.42} = 0.595$$

Variables aleatorias independientes

Dos variables aleatorias discretas X y Y con función de probabilidad conjunta f_{XY}. X y Y se dicen *variables aleatorias independientes* si

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \text{para todo } x \in R_X, y \in R_Y$$

Es decir, si

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y), \quad \text{para todo } x \in R_X, y \in R_Y$$

En el ejemplo del ingreso por pareja, las variables X y Y *no son independientes* pues

$$f_{XY}(2, 0) \neq f_X(2)f_Y(0)$$

pues, de la tabla de probabilidades,

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = .25 \neq .168 = (.40)(.42) = \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = 0)$$

Ejemplo

Sea X = número de visitas mensuales de un auditor a la compañía ABC, y sea Y = número de fallas que encuentra el auditor. La función de probabilidad conjunta f_{XY} se presenta en la siguiente tabla:

$X \backslash Y$	2	3	4	$f_X(x)$
1	$4/54$	$8/54$	$12/54$	$24/54$
2	$5/54$	$10/54$	$15/54$	$30/54$
$f_Y(y)$	$9/54$	$18/54$	$27/54$	$54/54$

En este caso, la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales. Por ejemplo, para $X = 1$ y $Y = 2$,

$$f_{XY}(2,1) = \frac{4}{54} = \left(\frac{24}{54}\right)\left(\frac{9}{54}\right)$$

y así para todo $x = 1, 2$ y $y = 2, 3, 4$. Luego, las variables aleatorias X y Y *son independientes*.

Independencia de variables aleatorias

Independencia de variables aleatorias en términos de probabilidades condicionales: las variables aleatorias X y Y *son independientes* si

$$f_X(x|Y=y) = f_X(x), \quad \text{para todo } y \in R_Y$$

Ejemplo:

$$f_X(1|Y=2) = \frac{f_{XY}(1,2)}{f_Y(2)} = \frac{4/54}{9/54} = \frac{4}{9} = \frac{24}{54} = f_X(1)$$

Nota, basta que para alguna pareja (x, y) no se cumpla la igualdad anterior para concluir que las variables X y Y no son independientes. Tal fue el caso del ejemplo del ingreso por núcleo familiar donde

$$f_{XY}(2,0) \neq f_X(2)f_Y(0)$$

luego, en este caso X y Y *no son independientes*.

Covarianza de dos variables aleatorias

Sean X y Y dos variables aleatorias con valor esperado μ_X y μ_Y, y varianza σ_X^2 y σ_Y^2 respectivamente, se define la *covarianza entre X y Y* como

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \sigma_{XY}\end{aligned}$$

Se define el *coeficiente de correlación lineal de X y Y* por:

$$\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \rho_{XY}$$

Ambas son *medidas de la asociación lineal* entre X y Y. La correlación no tiene unidades.

Ejemplo: covarianza del ingreso de él y ella

$X \setminus Y$	Ingreso de ella					
Ingreso de él	0	1	2	3	4	P_Y
1	.11	.03	.01	.01	.00	.16
2	.25	.10	.04	.01	.00	.40
3	.03	.08	.02	.02	.00	.15
4	.02	.07	.06	.03	.01	.19
5	.01	.02	.01	.02	.04	.10
P_X	.42	.30	.14	.09	.05	1.00

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= 1(.16) + \cdots + 5(.10) = 2.67 \\
\mathbb{E}X^2 &= 1^2(.16) + \cdots + 5^2(.10) = 8.65 \\
\text{var}(X) &= 8.65 - (2.67)^2 = 1.521 \\
\text{de}(X) &= \sqrt{1.521} = 1.233 \\
\text{cv}(X) &= 1.233/2.67 = 0.462
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= 0(.42) + \cdots + 4(.05) = 1.05 \\
\mathbb{E}Y^2 &= 0^2(.42) + \cdots + 4^2(.05) = 2.47 \\
\text{var}(Y) &= 2.47 - (1.05)^2 = 1.368 \\
\text{de}(Y) &= \sqrt{1.368} = 1.169 \\
\text{cv}(Y) &= 1.169/1.05 = 1.114
\end{aligned}
$$

X y Y *no son variables aleatorias independientes* pues

$$f_{XY}(1,0) = .11 \neq .06 = .42 \cdot .16 = f_X(1) f_Y(0)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= 1 \cdot 0(.11) + 1 \cdot 1(.03) + \cdots + 5 \cdot 3(.02) + 5 \cdot 4(.04) = 3.62 \\
\text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 3.62 - (2.67)(1.05) = 0.817 \\
\text{corr}(XY) &= \text{cov}(X, Y)/\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)} = 0.817/\sqrt{1.512 \cdot 1.368} = 0.566
\end{aligned}
$$

Coeficiente de correlación

Notas:

- El coeficiente de correlación cumple que

$$-1 \leq \rho \leq +1$$

- Si X y Y son variables aleatorias *independientes* entonces $\text{corr}(X, Y) = 0$.
- Correlación nula, $\rho_{XY} = 0$, no implica independencia de las variables aleatorias.
- El coeficiente de correlación ρ no se afecta por cambios de escala en las variables X o Y.

Ejemplo: variables aleatorias independientes

$X \backslash Y$	2	3	4	$f_X(x)$
1	$4/54$	$8/54$	$12/54$	$24/54$
2	$5/54$	$10/54$	$15/54$	$30/54$
$f_Y(y)$	$9/54$	$18/54$	$27/54$	$54/54$

X y Y son *v. a. independientes* pues

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \text{ para todo } x \in R_X,\ y \in R_Y$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= 1(.444) + 2(.277) = 1.556 \\
\mathbb{E}X^2 &= 1^2(.444) + 2^2(.277) = 2.667 \\
\text{var}(X) &= 2.667 - (1.556)^2 = 0.247 \\
\text{de}(X) &= \sqrt{0.247} = 0.497 \\
\text{cv}(X) &= 0.497/1.556 = 0.319
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= 2(.167) + \cdots + 4(.50) = 3.333 \\
\mathbb{E}Y^2 &= 2^2(.167) + \cdots + 4^2(.50) = 11.667 \\
\text{var}(Y) &= 11.667 - (3.333)^2 = 0.556 \\
\text{de}(Y) &= \sqrt{.556} = 0.745 \\
\text{cv}(Y) &= .745/3.333 = 0.224
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= 1 \cdot 2(.4/54) + \cdots + 2 \cdot 4(15/54) = 5.185 \\
\text{cov}(X,Y) &= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 5.185 - (1.556)(3.333) = 0.000 \\
\text{corr}(XY) &= \text{cov}(X,Y)/\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)} = 0.0/\sqrt{.497 \cdot .745} = 0.000
\end{aligned}$$

$$X \text{ y } Y \text{ independientes} \implies \text{corr}(X,Y) = 0$$

Ejemplo: variables aleatorias dependientes con covarianza cero

$X\backslash Y$	2	3	4	f_X
1	$1/8$	$3/8$	$1/8$	$5/8$
2	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
f_Y	$2/8$	$4/8$	$2/8$	$8/8$

X y Y no son son *v. a.* independientes pues

$$f_{XY}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

para algún $x \in R_X,\ y \in R_Y$. Por ejemplo,

$$f_{XY}(1,2) = \frac{1}{8} \neq \frac{5}{8}\,\frac{2}{8} = f_X(1) f_Y(2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= 1(.625) + 2(.375) = 1.375 \\
\mathbb{E}X^2 &= 1^2(.675) + 2^2(.375) = 2.125 \\
\mathrm{var}(X) &= 2.125 - (1.375)^2 = 0.234 \\
\mathrm{de}(X) &= \sqrt{0.234} = 0.484 \\
\mathrm{cv}(X) &= 0.484/1.375 = 0.352
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Y &= 2(.25) + 3(.50) + 4(.25) = 3.333 \\
\mathbb{E}Y^2 &= 2^2(.25) + 3^2(.50) + 4^2(.25) = 4.5 \\
\mathrm{var}(Y) &= 4.5 - (3.333)^2 = 0.500 \\
\mathrm{de}(Y) &= \sqrt{.500} = 0.707 \\
\mathrm{cv}(Y) &= .707/2.000 = 0.354
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}XY &= 1 \cdot 2(1/8) + \cdots + 2 \cdot 4(1/8) = 2.750 \\
\mathrm{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y = 2.750 - (1.375)(2.000) = 0.000 \\
\mathrm{corr}(XY) &= \mathrm{cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{var}(X) \cdot \mathrm{var}(Y)} = 0.0/\sqrt{.234 \cdot .500} = 0.000
\end{aligned}$$

$\mathrm{corr}(X, Y) = 0$ no implica que X y Y sean variables aleatorias independientes.

Distribución de una función de variables aleatorias

En el ejemplo anterior sobre el ingreso familiar, X y Y son variables aleatorias que denotan el ingreso mensual (miles de pesos) de él y ella respectivamente. El problema ahora es representar el *ingreso total* W de la familia. Esto es, encontrar la distribución de la variable aleatoria $W = X + Y$.

Más formalmente, sea h_W la función tal que

$$\begin{array}{rccc} h_W : & R_X \times R_Y & \longrightarrow & R \\ & x, y & \longmapsto & x + y \end{array}$$

La función h_W es la función masa de probabilidad de la variable aleatoria W. Luego,

$$h_W(w) = \mathbb{P}(W = w), \quad \text{para todo } \; w \in R_W$$

Ejemplo: ingreso por familia

	Ingreso de ella					
Ingreso de él	0	1	2	3	4	total
1	.11	.03	.01	.01	.00	.16
2	.25	.10	.04	.01	.00	.40
3	.03	.08	.02	.02	.00	.15
4	.02	.07	.06	.03	.01	.19
5	.01	.02	.01	.02	.04	.10
total	.42	.30	.14	.09	.05	1.00

Nueva Variable Aleatoria:

$$W = X + Y$$

Rango: $R_W = \{1, \ldots, 9\}$

Función masa de probabilidad

w	$\mathbb{P}(W = w)$
1	.11
2	.28
3	.14
4	.15
5	.11
6	.10
7	.04
8	.03
9	.04
	1.00

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = .11 \\
\mathbb{P}(W = 2) &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = .28 \\
&\vdots \\
\mathbb{P}(W = 9) &= \mathbb{P}(X = 5, Y = 4) = .04
\end{aligned}$$

Esperanza matemática

Sean X y Y variables aleatorias con valor esperado μ_X y μ_Y respectivamente, y sea $W = X + Y$, entonces $\mu_W = \mu_X + \mu_Y$. Es decir,

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

En general, sean $X_1, \ldots, X_n$, *v. a.*'s con valor esperado $\mu_1, \ldots, \mu_n$, respectivamente y sean $c_1, \ldots, c_n$ constantes. Entonces,

$$\mathbb{E}[c_1 X_1 + \cdots + c_n X_n] = c_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + c_n \mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$$

Note que en particular

$$\mathbb{E}[X - Y] = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}[Y]$$

Ejemplo: En el ejemplo del ingreso por familia,

$$\mathbb{E}[W] = 1(.11) + 2(.28) + \cdots + 9(.04) = 3.72$$

O bien,

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 2.67 + 1.05 = 3.72$$

Varianza de suma de variables aleatorias

Sean X y Y dos variables aleatorias con valor esperado μ_X y μ_Y, varianzas σ_X^2 y σ_Y^2, constantes a y b. Entonces,

$$\text{var}(aX + bY) = a^2\text{var}(X) + b^2\text{var}(Y) + 2ab\,\text{cov}(X, Y)$$

En general, sean $X_1, \ldots, X_n$ *v. a.*'s con valor esperado $\mathbb{E}[X_1], \ldots, \mathbb{E}[X_n]$, respectivamente y sean $c_1, \ldots, c_n$ constantes. Entonces

$$\text{var}(c_1X_1 + \cdots + c_nX_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2\text{var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} c_ic_j\,\text{cov}(X_i, X_j)$$

Note que si $X_1, \ldots, X_n$ son *v. a.*'s *independientes*

$$\text{var}(c_1X_1 + \cdots + c_nX_n) = c_1^2\text{var}(X_1) + \cdots + c_n^2\text{var}(X_n)$$

pues $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$, para todo $X_i \neq X_j$

Ejemplo: ingreso por familia

	Ingreso de ella					
Ingreso de 'el	0	1	2	3	4	total
1	.11	.03	.01	.01	.00	.16
2	.25	.10	.04	.01	.00	.40
3	.03	.08	.02	.02	.00	.15
4	.02	.07	.06	.03	.01	.19
5	.01	.02	.01	.02	.04	.10
total	.42	.30	.14	.09	.05	1.00

$W = X + Y$

w	$\mathbb{P}(W = w)$
1	.11
2	.28
3	.14
4	.15
5	.11
6	.10
7	.04
8	.03
9	.04

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W] &= 1(.11) + \cdots + 9(.04) = 3.72 \\
\mathbb{E}[W^2] &= 1^2(.11) + \cdots + 9^2(.04) = 18.36 \\
\text{var}(W) &= 18.36 - (3.72)^2 = \mathbf{4.523} \\
\text{de}(W) &= \sqrt{4.522} = 2.126 \\
\text{cv}(W) &= 2.126/3.72 = 0.572
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{var}(X + Y) &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \\
&= 1.521 + 1.368 + 2(.817) \\
&= \mathbf{4.523}
\end{aligned}$$

Ejemplo: variables aleatorias independientes

$X\backslash Y$	2	3	4	$f_X(x)$
1	$4/54$	$8/54$	$12/54$	$24/54$
2	$5/54$	$10/54$	$15/54$	$30/54$
$f_Y(y)$	$9/54$	$18/54$	$27/54$	$54/54$

X y Y son variables aleatorias independientes.

$$Z = X - Y$$

z	$\mathbb{P}(Z = z)$
-3	$12/54$
-2	$23/54$
-1	$14/54$
0	$5/54$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= -3(12/54) + \cdots + 0(5/54) = -1.778 \\
\mathbb{E}[Z^2] &= (-3)^2(12/54) + \cdots + (0)^2(5/54) = 3.963 \\
\text{var}(Z) &= 3.963 - (-1.778)^2 = \mathbf{0.803} \\
\text{de}(Z) &= \sqrt{0.802} = .896
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{var}(X - Y) &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) - 2\,\text{cov}(X, Y) \\
&= .247 + .556 - 2(0) \\
&= \mathbf{.803}
\end{aligned}$$

Normal bivariada

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ sigue una *distribución normal bivariada* con medias μ_1 y μ_2, varianzas σ_1^2, y σ_2^2 y covarianza σ_{12}. Entonces se tiene que

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2); \qquad X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2); \qquad \mathrm{cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12}$$

Además, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$aX_1 + bX_2 \sim \mathrm{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12})$$

y

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}(x_2 - \mu_2)\right)$$

Normal bivariada - ejemplo

Ejemplo:

En la colonia Tizapán se ha determinado que históricamente los meses de noviembre el consumo mensual de agua (X) y de energía eléctrica (Y) de una casa-habitación *tipo* sigue una *distribución normal bivariada* con medias de 8.5 m^3 y 5.8 Kv/h, desviaciones de 0.9 m^3 y 0.7 Kv/h, respectivamente y una correlación de 0.39 entre los consumos.

1. Determine la probabilidad de que en noviembre de este año en una casa-habitación *tipo* se consuma menos de 7.0 m^3 de agua.
2. Calcule la probabilidad de que se consuma más de 6.0 Kv/h.
3. Si mensualmente se pagan \$22 por m^3 de agua y \$36 por Kv/h consumidos, determine la media y varianza de la cantidad pagada por el mes de noviembre en una casa *tipo*.

Normal bivariada - ejemplo

Ejemplo:

Una pediatra tiene el registro de sus pacientes de los últimos 5 años y puede suponer que un niño entre 1 y 2 años de edad tiene una talla (estatura) media de 82 cm, un peso medio de 14 kg, con desviaciones estándar de 3.6 cm y 1.8 kg, respectivamente. Si la correlación entre peso y estatura es de 0.48, responda las siguientes preguntas. Los datos muestran que razonablemente se puede suponer que talla y peso siguen una *distribución normal bivariada*.

1. ¿Cuál es la estatura media de los niños de 15 kg?
2. Determine la desviación estándar del peso de un niño de 80 cm de estatura.
3. Calcule la probabilidad de que un niño de talla 80 pese más de 15 kg.

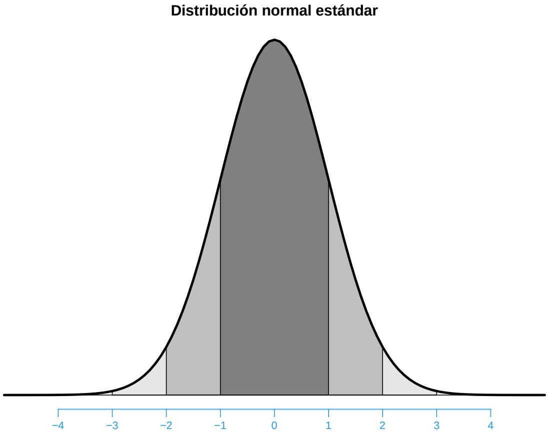
Ejercicios

Problemas Cuaderno Gris, sección 3.4:

Recomendados:

$$2, 3, 4, 5, \mathbf{6}, 10, 12, \mathbf{13}, 15, 17, 19, 23$$

5 - Distribuciones



Contenido

Contenido

Distibución uniforme

Sea X variable aleatoria discreta con soporte $S_X = \{1, 2, \ldots, n\}$ y función masa de probabilidad,

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

X se dice entonces distribuida *uniformemente* en $\{1, 2, \ldots, n\}$. O bien, X sigue una distribución uniforme con parámetros $\{1, \ldots, n\}$ y se denota por $X \sim \text{unif}\{1, \ldots, n\}$.

Propiedades:

1. $\mu_X = E(X) = \frac{n+1}{2}$.
2. $\sigma_X^2 = V(X) = \frac{(n+1)(4n^2-n-3)}{12}$.
3. Utilizada para modelar “loterías” equiprobables.

En el caso general, $X \sim u(x_1, \ldots, x_n)$, con $R_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, con

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & x = x_1, x_2, \ldots, x_n \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

En tal caso, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{x \in R_X} x_i = \bar{x}$.

Distribución uniforme

Distribución Uniforme $\{x_1, \ldots, x_n\}$

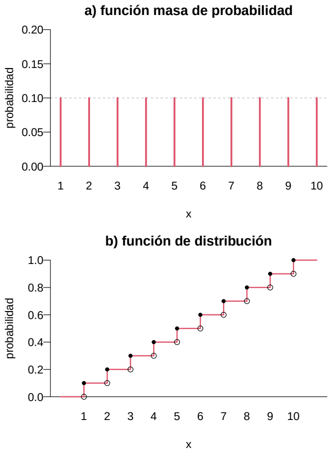
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} 1/n & x = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

Función de distribución

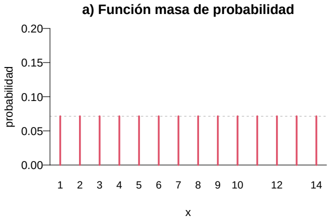
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \lfloor x \rfloor / n & 1 \leq x \leq n \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

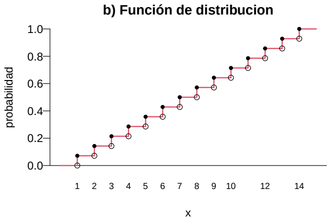
donde $\lfloor x \rfloor$, indica el máximo entero menor o igual a x.



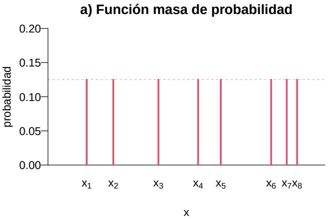
Distribución uniforme

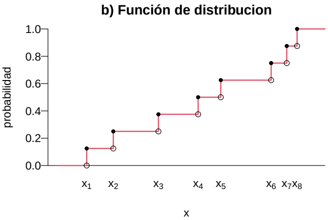
$$X \sim \text{unif}\{1, \ldots, 14\}$$





$$X \sim \text{unif}\{x_1, \ldots, x_8\}$$





Distribución Bernoulli

Sea X variable aleatoria discreta con soporte $S_X = \{0, 1\}$ y función masa de probabilidad,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

X se dice distribuida *Bernoulli parámetro p*, con $0 \leq p \leq 1$. O bien, X sigue una distribución Bernoulli con parámetro p y se denota por $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

Propiedades:

1. $\mu_X = \mathbb{E}[X] = p$.
2. $\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = p\,q$, donde $q = 1 - p$.
3. Utilizada para modelar ensayos con únicas dos salidas *"éxito"* ó *"fracaso"*; *"encendido"* ó *"apagado"*; *"correcto"* ó *"incorrecto"*, etc.

Distribución Bernoulli

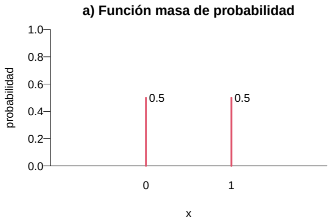
Distribución Bernoulli (p)

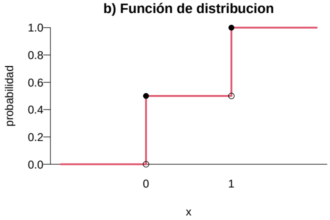
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \end{cases}$$

Función de distribución

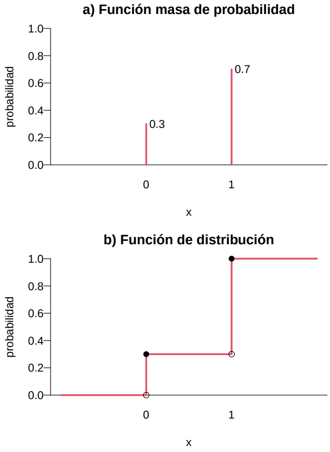
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



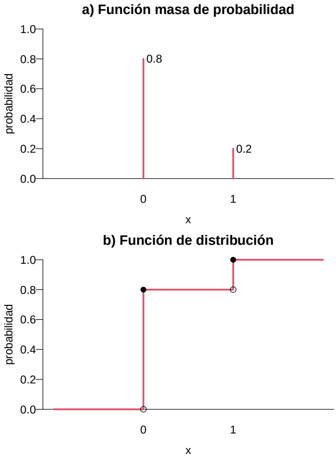


Distribución Bernoulli

$X \sim \text{Ber}(0.7)$



$X \sim \text{Ber}(0.2)$



Distribución Geométrica

Sea X variable aleatoria discreta con soporte $S_X = \{1, 2, \dots\}$ y función masa de probabilidad,

$$f(x) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \dots$$

X se dice entonces distribuida *geométrica parámetro p*, con $0 < p < 1$. O bien, X sigue una distribución geométrica con parámetro p y se denota por $X \sim \mathrm{Geom}(p)$.

Propiedades:

1. $\mu_X = E(X) = 1/p$.
2. $\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = (1-p)/p^2$.
3. Utilizada para modelar el *"tiempo del primer éxito"* en una sucesión de *ensayos Bernoulli*.

Distribución Geométrica

Geométrica (p)

Función masa de probabilidad

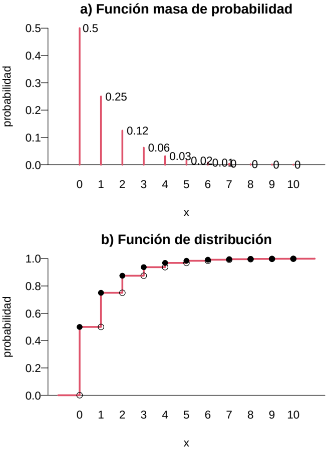
$$p(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

Función de distribución

$$F(x) = \sum_{k=1}^{x} (1-p)^{k-1} p$$

Función de sobrevivencia

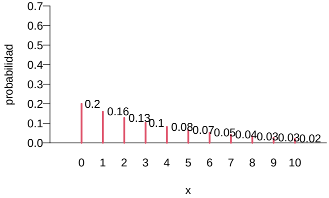
$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = (1-p)^x$$



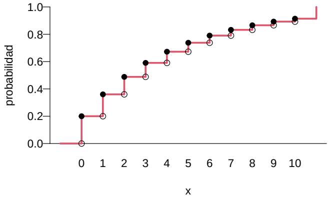
Distribución Geométrica

$X \sim \text{Geom}(0.2)$

a) Función masa de probabilidad

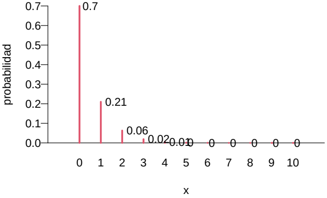


b) Función de distribución

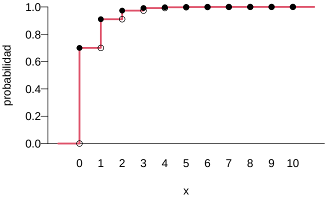


$X \sim \text{Geom}(0.7)$

a) Función masa de probabilidad



b) Función de distribución



Distribución Geométrica

Ejemplo:

De los clientes potenciales que llegan a una tienda de departamentos, la probabilidad de realicen realmente una compra por más de \$500 es del 10 %. En promedio, ¿cuántos clientes en un día habrá que esperar para que se dé la primer venta, mayor a los \$500? ¿Cuál es la desviación estándar de ésta primer venta mayor?

Solución: Sean X_i los clientes potenciales que llegan a la tienda. La probabilidad de que un cliente gaste más de \$500 es de $p = 0.1$. Suponiendo las variables X_i como ensayos Bernoulli independientes, sea N la *v. a.* que indica la primera venta. Entonces, $N \sim \mathrm{Geom}(0.1)$, y

$$
\begin{aligned}
\mu_N &= \mathbb{E}(N) = \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{.1} = 10 \text{ personas} \\
\sigma_N^2 &= \mathrm{var}(N) = \tfrac{1-p}{p^2} = \tfrac{.9}{.01} = 90 \\
\sigma_N &= \mathrm{de}(B) = \sqrt{90} = 9.48 \text{ personas}
\end{aligned}
$$

Distribución binomial

Sea X variable aleatoria discreta con soporte $S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$ y función masa de probabilidad,

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

X se dice entonces distribuida *binomial parámetros n y p*, o bien, X sigue una distribución binomial con parámetros n y p, con $n = 1, 2, \ldots,$ y $0 < p < 1$, y se denota por $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Propiedades:

1. $\mu_X = \mathbb{E}[X] = np$.
2. $\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = npq$, donde $q = 1 - p$.
3. Utilizada para modelar, por ejemplo, la suma de *"'exitos"* en n ensayos. Es decir, X se puede ver como $X = X_1 + \cdots + X_n$, donde las X_i son ensayos Bernoulli *idénticos e independientes*.

Distribución binomial

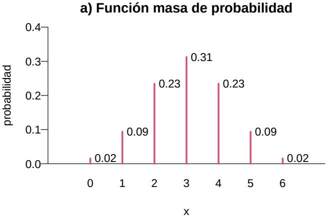
Binomial (n, p)

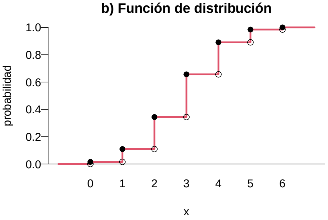
Función masa de probabilidad

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{o. c.} \end{cases}$$

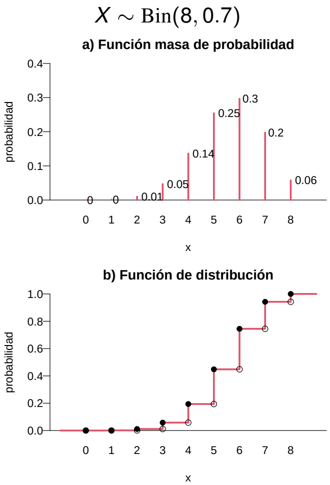
Función de distribución

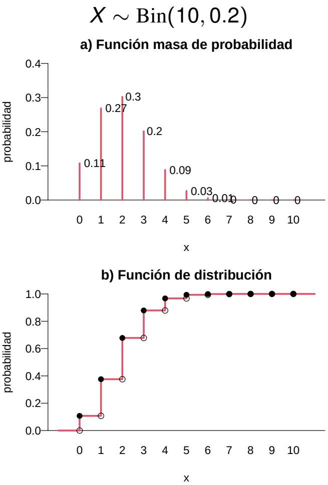
$$F(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$





Distribución binomial





Ejemplo

Una compañía que produce cristal fino sabe por experiencia que 10 % de sus productos tiene defectos cosméticos y deben clasificarse como *segundos*.

1. Entre 6 piezas elegidas aleatoriamente, ¿qué tan probable es que solamente una pieza sea segunda?
2. Entre 6 piezas elegidas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean segundas?
3. Si las piezas son examinadas una por una, ¿cuál es la probabilidad de que se necesite examinar a lo más 5 piezas para encontrar 4 que no sean segundas?

Ejemplo

Solución: Sea N_6 el numero de segundas en la muestra de tamaño 6 y $p = 0.1$ la probabilidad de que el artículo sea segunda.

1. $$P(N_6 = 1) = \binom{6}{1}(.1)^1(.9)^5 = \frac{6!}{1!(6-1)!}(.1)^1(.9)^5 = .354$$

2. $$\begin{aligned} P(N_6 \geq 2) &= 1 - P(N_6 < 2) = 1 - P(N_6 = 0) - P(N_6 = 1) \\ &= 1 - \tbinom{6}{0}(.1)^0(.9)^6 + \tbinom{6}{1}(.1)^1(.9)^5 \\ &= \tfrac{6!}{0!6!}(.1)^0(.9)^6 + \tfrac{6!}{1!5!}(.1)^1(.9)^5 \\ &= .115 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} P(E) &= P(N_4 = 0) + P(N_4 = 1)q \\ &= (.9)^4 + \tbinom{4}{1}(.1)(.9)^3 \cdot (.9) \\ &= (.9)^4 + 4(.1)^1(.9)^3(.9) \\ &= .918 \end{aligned}$$

Distribución Poisson

Sea X variable aleatoria discreta con soporte $S_X = \{0, 1, 2, \dots\}$ y función masa de probabilidad,

$$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

X se dice entonces distribuida *Poisson parámetro λ*, con $\lambda > 0$. O bien, que X sigue una distribución Poisson con parámetro λ, y se denota por $X \sim \text{Po}(\lambda)$.

Proposición :

1. $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \lambda$.
2. $\sigma_X^2 = \text{var}(X) = \lambda$.
3. Utilizada para modelar, por ejemplo, *“eventos raros”* o poco frecuentes.
4. La probabilidad de ocurrencia de eventos en intervalos de tiempo iguales es la misma.
5. La ocurrencia o no ocurrencia de un evento en un intervalo es independiente de la ocurrencia o no ocurrencia del evento en cualquier otro intervalo.

Distribución Poisson

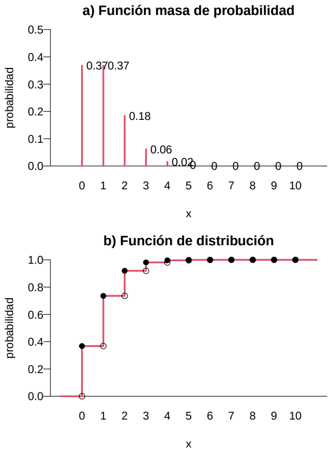
Poisson (λ)

Función masa de probabilidad

$$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

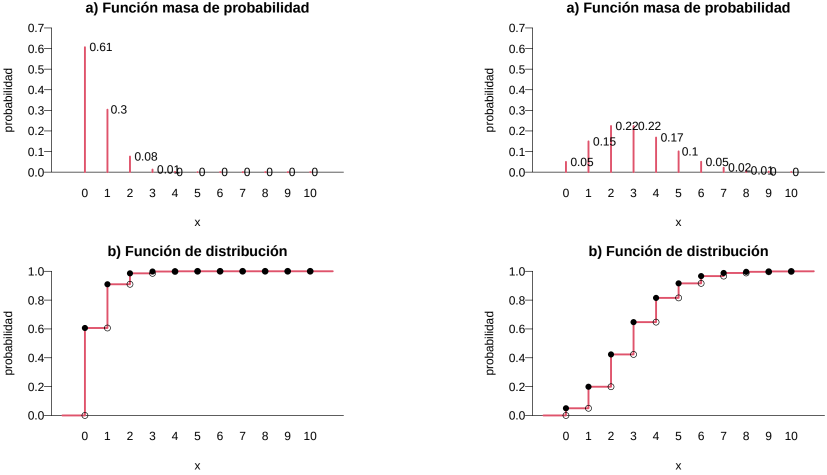
Función de distribucion

$$F(x) = \sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$



Distribución Poisson

$X \sim \text{Po}(0.5)$ $\qquad$ $X \sim \text{Po}(3.0)$



Ejemplo

Llamadas telefónicas llegan a la mesa de reservaciones de un linea aérea con una tasa de $\Lambda = 48$ llamadas por hora.

1. Encuentre la probabilidad de recibir 3 llamadas en un lapso de 5 minutos.
2. Encuentre la probabilidad de recibir exactamente 10 llamadas en 15 minutos.
3. Suponga que no hay llamadas esperando. Si un agente se lleva 5 minutos para completar un reservación, ¿cuántas clientes esperaría usted que estén esperando servicio para ese entonces? ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno esté esperando?
4. Si no hay ninguna llamada esperando ahora mismo, ¿cuál es la probabilidad de que el agente se pueda tomar 3 minutos para uso personal sin ser interrumpido?

Ejemplo

Solución: Sea $\Lambda = 48$ llamadas/hora.

1. $$\lambda = \frac{5}{60}\Lambda = 4 \text{ llamadas/5 min}; \quad \mathbb{P}(X=3) = 4^3 e^{-4}/3! = 0.195$$

2. $$\lambda = \frac{15}{60}48 = 12 \text{ llamadas/15 min}; \quad \mathbb{P}(X=10) = 12^{10} e^{-12}/10! = 0.1048$$

3. $$\lambda = \frac{5}{60}\Lambda = 4 \text{ llamadas/5 min}; \quad \mathbb{E}[X] = 4 \text{ llamadas}\ ; \quad \mathbb{P}(X=0) = e^{-4} = 0.0183$$

4. $$\lambda = \frac{3}{60}\Lambda = 2.4 \text{ llamadas/3 min}; \quad \mathbb{P}(X=0) = e^{-2.4} = 0.0907$$

Aproximación de la distribución binomial por la Poisson

Sea $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, tal que $n \geq 100$ y $p \leq 0.01$, de modo que $np \approx \lambda$ se mantiene más o menos fijo en λ. Entonces,

$$\mathbb{P}(X \leq x) \approx F_Y(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde Y es una variable aleatoria con distribución Poisson parámetro λ.

Nota: La aproximación es razonablemente buena cuando $np \leq 5$. ¡Verifíquelo!

Aproximación de la distribución binomial por la Poisson

Ejemplo: Un compañía vende pólizas de seguros a una muestra aleatoria de 1000 personas con una edad alrededor de 35 años. La probabilidad de fallecimiento en un año es aproximadamente de .002. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía de seguros tenga que pagar 2 o más personas el próximo año.

Solución:

Sea X el número de personas (aleatorio) a las que la compañía les tendría que pagar el próximo año. ¿Cuál el número esperado de personas? Entonces, $X \sim \mathrm{Bin}(1000, 0.002)$,

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] \\ &= 1 - \left[(.998)^{1000} + 1000(.002)(.998)^{999}\right] \\ &= ??? \end{aligned}$$

Sea N la variable aleatoria discreta distribuida Poisson para aproximar la distribución de X. Como $np = 1000(.002) = 2$, esperamos que la aproximación sea razonablemente buena. Consideramos entonces $N \sim \mathrm{Po}(\lambda = 2)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N \geq 2) &= 1 - [\mathbb{P}(N=0) + \mathbb{P}(N=1)] \\ &= 1 - \left[e^{-2}(1+2)\right] \\ &= 0.594 \\ \mathbb{E}[N] &= 2 \text{ personas} \end{aligned}$$

Aproximación de la distribución binomial por la Poisson

Ejemplo: Una firma consultora investiga sobre la facilidad de resolver ciertos tipos de problemas mediante el uso ó no de la lógica inversa polaca (*LIP*). Una muestra de 25 personas es seleccionada y se les permite practicar con calculadoras con ambos tipos de lógica. A cada persona se le plantea un par de problemas similares que deben trabajar con cada tipo de lógica. Sea $p = \mathbb{P}(I)$, donde I indica que una persona trabaja más fácilmente el problemas con la *LIP* que sin ella, y sea X el número de personas que trabajaron más fácilmente utilizando *LIP*.

1. Si $p = 0.5$, calcule $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 18)$.
2. Si $p = 0.8$, calcule $\mathbb{P}(7 \leq X \leq 18)$.
3. Si la aseveración de que $p = .5$ será rechazada cuando $X \leq 7$ ó $X \geq 18$, ¿cuál es la probabilidad de rechazar la aseveración cuando en realidad ésta es correcta?
4. Si la decisión de rechazar la aseveración es como en el inciso anterior, ¿cuál es la probabilidad de que la aseveración no sea rechazada cuando $p = 0.6$ ¿Y cuando es de $p = 0.8$?
5. ¿Qué regla de decisión escogería usted para rechazar la aseveración de que $p = 0.5$, si quisiera que la probabilidad en *(c)* fuera a lo más de 0.01?

Ejemplo

Ejemplo: Una compañía de teléfonos emplea 5 operadores quienes reciben solicitudes de información de manera independiente uno de otro, y de acuerdo a una ley de Poisson con una tasa de $\alpha = 2$ llamadas por minuto.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un minuto dado, el primer operador no reciba ninguna solicitud?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que durante un minuto dado, exactamente 4 de los 5 operadores no reciban ninguna solicitud.
3. Escriba una expresión para encontrar la probabilidad de que durante un minuto dado, todos los operadores reciban el mismo número de solicitudes.

Distribución uniforme

Sea X variable aleatoria continua con *función de densidad de probabilidad*,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

Entonces, X se dice distribuida *uniformemente con parámetros a y b*, ($a < b$), y se denota por $X \sim \text{unif}(a, b)$. Su *función de distribución*, está dada por:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\, du = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & b < x \end{cases}$$

Propiedades:

1. La distribución asocia probabilidades iguales a intervalos de la misma longitud.
2. $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_a^b x\, \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$
3. $\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$
4. $\sigma_X^2 = \text{var}(X) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Distribución uniforme

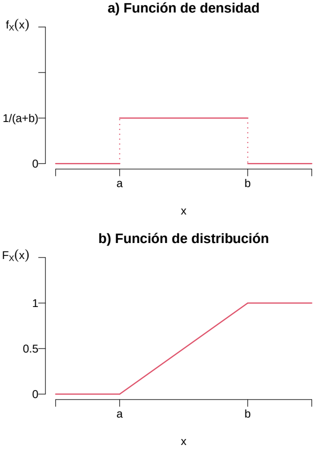
$$X \sim \text{unif}(a, b)$$

Función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

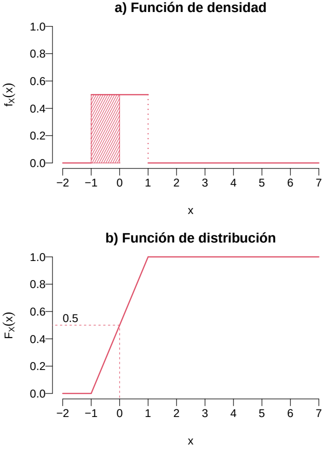
Función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

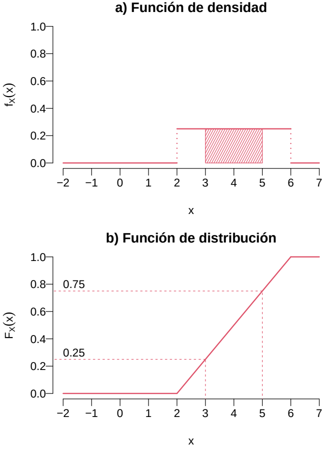


Distribución uniforme

$X \sim \text{unif}(-1, +1)$



$X \sim \text{unif}(+2, +6)$



Distribución exponencial

Sea X variable aleatoria continua no negativa con *función de densidad de probabilidad*,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & 0 \leq x \\ 0 & \text{otra forma} \end{cases}$$

Entonces, X se dice distribuida *exponencialmente con parámetro θ ($\theta > 0$)*, y se denota por $X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$. Su *función de distribución*, está dada por:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} e^{-u/\theta}\, du = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & 0 \leq x \end{cases}$$

Propiedades:

1. El tiempo T entre ocurrencias de una variable aleatoria Poisson ($N \sim \mathrm{Po}(\lambda)$) se distribuye exponencialmente ($T \sim \mathrm{Exp}(1/\lambda)$)
2. $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x\, \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\, dx = \theta$
3. $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2\, \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\, dx = 2\theta^2$
4. $\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = \int_0^{+\infty} (x-\theta)^2 \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}\, dx = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \theta^2$.

Distribución exponencial

$$X \sim \mathrm{Exp}(\theta)$$

Función de densidad de probabilidad

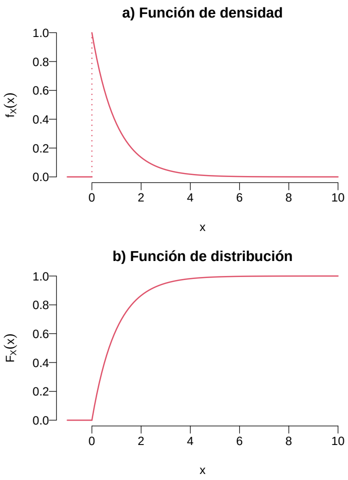
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & 0 \leq x \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Función de distribución

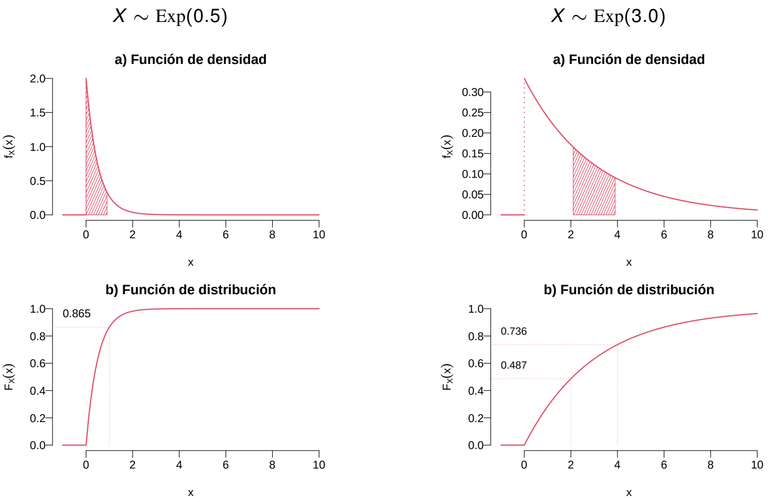
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & 0 < x \end{cases}$$

Función de sobrevivencia

$$\mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\frac{1}{\theta}}$$



Distribución exponencial



Distribución exponencial

Propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial

Sea T una variable aleatoria que se distribuye exponencialmente. entonces

$$\mathbb{P}(T > a + b | T > a) = \mathbb{P}(T > b)$$

Ejemplo:

Un departamento académico decide que el examen final extraordinario será oral. Se supone que el tiempo que toma cada estudiante en completar su examen sigue una distribución exponencial con media 12 minutos.

1. ¿Calcule la probabilidad que un alumno termine en menos de 10 minutos?
2. Suponga que ya han pasado 5 minutos del examen de un alumno ¿Calcule la probabilidad que la duración final del examen sea menor a 15 minutos?

Distribución exponencial

Solución: Sea T el tiempo para completar un de examen. Luego, $T \sim \mathrm{Exp}(\theta)$, con $\theta = 10$ min.

1.

$$\mathbb{P}(T \leq 15 \text{ min}) = F_T(15) = 1 - e^{-\frac{1}{10}15} = 0.777$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \leq 15 | T > 5) &= \frac{\mathbb{P}(5 < T \leq 15)}{\mathbb{P}(T > 5)} = \frac{F_T(15) - F_T(10)}{1 - F_T(10)} \\
&= \frac{(1 - e^{-\frac{15}{10}}) - (1 - e^{-\frac{5}{10}})}{e^{-\frac{5}{10}}} \\
&= \frac{e^{-\frac{5}{10}}(1 - e^{-\frac{10}{10}})}{e^{-\frac{5}{10}}} = 1 - e^{-\frac{10}{10}} \\
&= \mathbb{P}(T \leq 10 \text{ min}) \\
&= 0.632
\end{aligned}$$

Relación distribución exponencial con la distribución Poisson

Ejemplo:

El número de autobuses que llegan a una estación sigue una distribución Poisson con media de 5 autobuses por hora.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 3 autobuses en una hora?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 2 autobuses en una hora?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas de autobuses sea menor a 15 minutos?
4. ¿Cuál es el tiempo esperado entre dos llegadas consecutivas de autobuses?
5. Si un pasajero llega a la estación y espera 15 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visto llegar ningún autobús durante su tiempo de espera?

Relación distribución exponencial con la distribución Poisson

Solución:

Sea N_t el número de autobuses que llega a la estación en un lapso de tiempo t.

N_{60} es el número de autobuses que arriban en una hora y sigue una distribución Poisson con media $\lambda_{60} = 5$. Entonces la variable aleatoria N_t sigue una distribución Poisson con parámetro λ_t con $\lambda_t = \lambda_1 t$ y donde $\lambda_1 = \frac{5}{60}$ autobuses/min.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 3 autobuses en una hora?

$$\mathbb{P}(N_{60} = 3) = e^{-\lambda_{60}} \frac{\lambda_{60}^3}{3!}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 2 autobuses en una hora?

$$\mathbb{P}(N_{60} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(N_{60} < 2) = 1 - [\mathbb{P}(N_{60} = 0) + \mathbb{P}(N_{60} = 1)] = 0.960$$

Relación distribución exponencial con la distribución Poisson

3. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo entre dos llegadas consecutivas de autobuses sea menor a 15 minutos?

$$\mathbb{P}(N_{15} > 0) = 1 - \mathbb{P}(N_{15} = 0) = 1 - e^{-\lambda_{15}} \frac{\lambda_{15}^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda_{15}} = \mathbb{P}(T \leq 15)$$

donde $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$.

4. ¿Cuál es el tiempo esperado entre dos llegadas consecutivas de autobuses?

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{60}{5} = 12 \text{ min}$$

5. Si un pasajero llega a la estación y espera 15 minutos, ¿cuál es la probabilidad de que no haya visto llegar ningún autobús durante su tiempo de espera?

$$\mathbb{P}(T > 15) = \mathbb{P}(N_{15} = 0) = e^{-\lambda_{15}} = 0.287$$

Distribución normal estándar

Sea Z variable aleatoria continua con *función de densidad de probabilidad*,

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < +\infty$$

Entonces, Z se dice distribuida *normal estándar* y se denota por $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Su *función de distribución* está dada por:

$$\mathbb{P}(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2} du$$

Propiedades:

1. $\mu_Z = \mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} dz = 0$
2. $\sigma_Z^2 = \mathrm{var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} dz = 1$
3. La distribución normal estándar es simétrica alrededor del 0. Luego, para todo z,

$$\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

4. La distribución normal estándar $\Phi(z)$ está tabulada para varios valores de z
5. $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq +1) = 68.3$; $\mathbb{P}(-2 \leq Z \leq +2) = 95.4\,\%$; $\mathbb{P}(-3 \leq Z \leq +3) = 99.7\,\%$

Distribución normal estándar

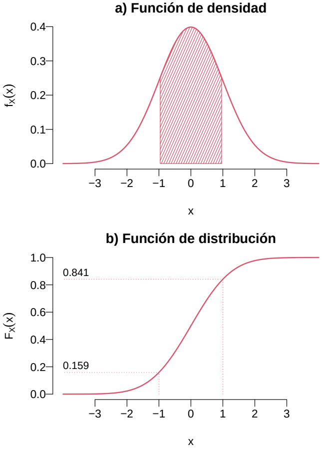
$$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

Función de densidad de probabilidad

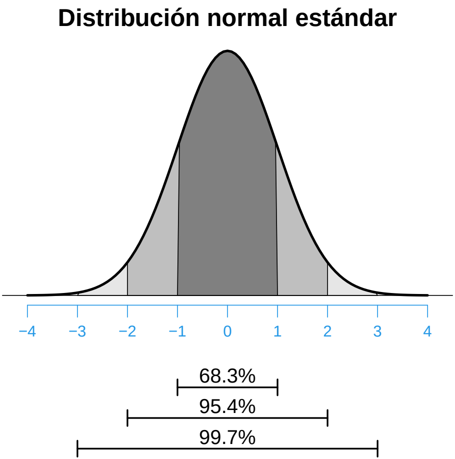
$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2} \quad -\infty < z < +\infty$$

Función de distribución

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-u^2/2} du$$



Distribución normal estándar



Distribución normal

Sea X variable aleatoria continua con *función de densidad de probabilidad*,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

Entonces, X se dice distribuida *normal con parámetros μ y σ^2* y se denota $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Su *función de distribución*, está dada por:

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, du$$

Propiedades:

1. $\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \mu$
2. $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^2 + \mu^2$
3. $\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \sigma^2$.
4. $\mathbb{P}(|X-\mu| < \sigma) = \mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 68.3\,\%$;
5. La distribución normal con parámetros μ y σ es simétrica alrededor de μ.

Distribución normal

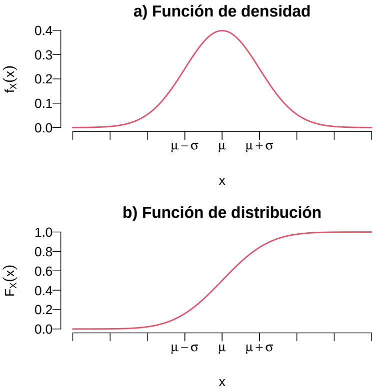
$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

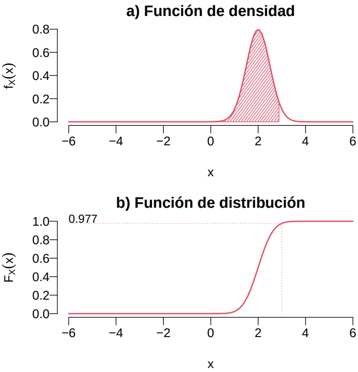
Función de probabilidad acumulada

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, du$$

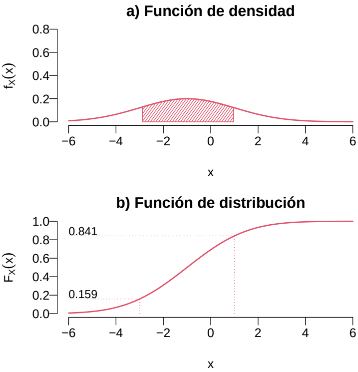


Distribución normal

$$X \sim \mathrm{N}(2.0, 0.25)$$



$$X \sim \mathrm{N}(-1.0, 4.0)$$



Estandarización de la distribución normal (μ, σ^2)

Sea X variable aleatoria normalmente distribuida con parámetros μ y σ^2, $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1) \tag{1}$$

Esto es, Z sigue la misma *ley de probabilidades normal* con parámetros

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{\sigma}\right) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0 \\ \mathrm{var}(Z) &= \mathrm{var}\left(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \mathrm{var}\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{var}(X) = 1 \end{aligned}$$

Así, la variable aleatoria Z definida por la expresión (1) es la *estandarización* de la variable aleatoria X. Entonces,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

Distribución normal - ejemplo

Ejemplo:

El tiempo (en segundos) que un cajero tarda en atender a un cliente en un banco se puede modelar por una distribución normal.

1. Si la probabilidad de que tarde menos de 150 segundos en ser atendido es de 0.8 y la probabilidad de que tarde más de 100 segundos es de 0.75, encuentre la media y la varianza de la distribución.
2. En otra sucursal el tiempo de atención al cliente también sigue una distribución normal con media de 5 minutos y desviación estándar de 1 minuto. ¿A qué proporción de clientes se les atiende en más de 3 minutos?

Distribución normal - ejemplo

Solución:

Sea T el tiempo en servicio medido en segundos, $T \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

1. Si la probabilidad de que tarde menos de 150 segundos en ser atendido es de 0.8 y la probabilidad de que tarde más de 100 segundos es de 0.75, encuentre la media y la varianza de la distribución. Entonces,

$$\mathbb{P}\left(T < 150\right) = 0.8 \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}\left(X > 100\right) = 0.75$$

$$0.8 = \mathbb{P}(T < 150) = \mathbb{P}\left(\frac{T-\mu}{\sigma} < \frac{150-\mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z < \frac{150-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{150-\mu}{\sigma}\right)$$

$$z_{0.8} = 0.842 = \frac{150-\mu}{\sigma}$$

$$0.75 = \mathbb{P}\left(T > 100\right) = \mathbb{P}\left(\frac{T-\mu}{\sigma} > \frac{100-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100-\mu}{\sigma}\right)$$

$$z_{0.25} = -0.674 = \frac{100-\mu}{\sigma}$$

Luego, se tiene el sistema de ecuaciones

$$150 - \mu = 0.842\sigma \qquad \text{y} \qquad 100 - \mu = -0.674\sigma$$

y resolviéndolo se tiene

$$\mu = 122.24, \quad \sigma = 32.98 \quad \text{y} \quad \sigma^2 = 1087.62$$

Normal bivariada - ejemplo

2. En otra sucursal el tiempo de atención al cliente también sigue una distribución normal con media de 5 minutos y desviación estándar de 1 minuto. ¿A qué proporción de clientes se les atiende en más de 3 minutos?

   Ahora se tiene que $T \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 5$ y $\sigma = 1$.

$$\mathbb{P}(T > 3) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-2/3) = 1 - 0.254 = 0.746$$

Efecto normalizador del promedio

Teorema Cental del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias *independiente e idénticamente distribuidas* con media μ y varianza σ^2 y sea $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces, para *n suficientemente grande* se tiene aproximadamente que

$$\bar{X} \mathrel{\dot\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2/n)$$

siendo la aproximación razonable para $n \geq 30$.

Teorema Central del Límite (TCL)

Teorema Central del Límite (TCL)

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias *independiente e idénticamente distribuidas* con media μ y varianza σ^2 y sean S_n la *suma* y $\bar{X}$ el *promedio*, entonces

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n; \qquad \mathbb{E}[S_n] = n\mu; \qquad \mathrm{var}(S_n) = n\sigma^2$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} S_n; \qquad \mathbb{E}[\bar{X}] = \mu; \qquad \mathrm{var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$$

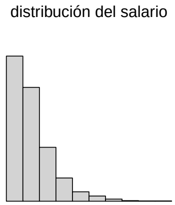
Luego, para *n suficientemente grande* se tiene aproximadamente que

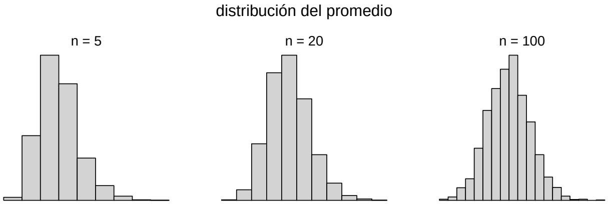
$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

siendo la aproximación razonable para $n \geq 30$.

Teorema Central del Límite

Ejemplo:





Aproximación del promedio por la distribución normal (TCL)

Ejemplo:

Los tiempos de servicio por auto, en un verificentro, son variables aleatorias independientes con media de 13 minutos y varianza 4. ¿Cuál es la probabilidad de que 35 autos sean verificados en menos de 7 horas?

Solución: Sea X_i el tiempo en ser verificado el i-ésimo auto. Entonces, $\mathbb{E}[X_i] = 13$ min, $\text{var}(X_i) = 4$ y siete horas son $T = 420$ minutos, luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < T\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} < \frac{420 - 35(13)}{\sqrt{35(4)}}\right) \\
&= \mathbb{P}(Z < -2.96) \\
&= \Phi(-2.96) \\
&= .0015
\end{aligned}$$

Aproximación de la distribución binomial por la normal

Sea $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) \approx F_Y(x) = \Phi\left(\frac{x - 0.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

donde Y es una variable aleatoria con distribución normal parámetros $\mu = np$ y $\sigma^2 = np(1-p)$. La constante aditiva 0.5 se conoce como *corrección por continuidad*.

Nota: La distribución es razonablemente buena cuando la distribución binomial no es muy *sesgada*. Esto es, si $np \geq 5$ y $n(1-p) \geq 5$.

Ejemplo:

Aproximadamente el 40 % de personas que compran una computadora personal por primera vez compra también una impresora. El proveedor pone una orden de compra por 100 PCs y tiene que decidir cuántas impresoras ordenar. ¿Cuál es la probabilidad de que en las próximas 100 personas, más de la mitad compren también una impresora?

Aproximación de la distribución Poisson por la normal

Sea $X \sim \text{Po}(\lambda)$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) \approx F_Y(x) = \Phi\left(\frac{x - 0.5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

donde Y es una variable aleatoria con distribución normal parámetros $\mu = \lambda$ y $\sigma^2 = \lambda$ y 0.5 es la *corrección por continuidad*.

Nota: La distribución es razonablemente buena cuando $\lambda \geq 10$.

Ejemplo: Suponga que en promedio 20 sistemas tienen problemas de comunicación por día en un *cluster* de computadoras. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día entre 15 y 25 PCs tengan problemas? Calcule (aproximadamente) la probabilidad de que en 5 días el número de PCs con problemas sea entre 80 y 120?

Normal bivariada

$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ sigue una *distribución normal bivariada* con medias μ_1 y μ_2, varianzas σ_1^2, y σ_2^2 y covarianza σ_{12}. Entonces se tiene que

$$X_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2); \qquad X_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2); \qquad \mathrm{cov}(X_1, X_2) = \sigma_{12}, \quad \mathrm{corr}(X_1, X_2) = \rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$$

Además, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$aX_1 + bX_2 \sim \mathrm{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\sigma_{12})$$

y

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 + \rho_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2 - \mu_2),\ \sigma_1^2(1 - \rho_{12}^2)\right)$$

Normal bivariada - ejemplo

Ejemplo:

En la colonia Tizapán se ha determinado que históricamente los meses de noviembre el consumo mensual de agua (X) y de energía eléctrica (Y) de una casa-habitación *tipo* sigue una *distribución normal bivariada* con medias de 8.5 m^3 y 5.8 Kv/h, desviaciones de 0.9 m^3 y 0.7 Kv/h, respectivamente y una correlación de 0.39 entre los consumos.

1. Determine la probabilidad de que en noviembre de este año en una casa-habitación *tipo* se consuma menos de 7.0 m^3 de agua.
2. Calcule la probabilidad de que se consuma más de 6.0 Kv/h.
3. Si mensualmente se pagan $22 por m^3 de agua y $36 por Kv/h consumidos, determine la media y desviación estándar de la cantidad pagada por el mes de noviembre en una casa *tipo*.
4. Determine la proporción de casas *tipo* que pagarán más de $450 el próximo mes.

Normal bivariada - ejemplo

Solución: Se tiene que

$$X \sim \mathrm{N}(8.5, 0.9^2), \quad Y \sim \mathrm{N}(5.8, 0.7^2), \quad \mathrm{corr}(X, Y) = 0.39$$

$$\mu_X = 8.5, \quad \sigma_X = 0.9, \quad \mu_Y = 5.8, \quad \sigma_Y = 0.7, \quad \rho_{XY} = 0.39$$

$$\mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = 0.39$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sigma_{XY} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y = .39(.9)(.7) = 0.2457$$

1. Determine la probabilidad de que en noviembre de este año en una casa-habitación *tipo* se consuma menos de 7.0 m^3 de agua.

$$\mathbb{P}(X < 8.0) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} < \frac{8.0 - 8.5}{0.9}\right) = \mathbb{P}(Z < -1.667) = \Phi(-1.667) = 0.0478$$

2. Calcule la probabilidad de que se consuma más de 6.0 Kv/h.

$$\mathbb{P}(Y > 6.0) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \leq \frac{6 - 5.8}{0.7}\right) = 1 - \Phi(0.2857) = 0.3875$$

Normal bivariada - ejemplo

3. Si mensualmente se pagan \$22 por m^3 de agua y \$36 por Kv/h consumidos, determine la media y desviación estándar de la cantidad pagada por el mes de noviembre en una casa *tipo*.

   Sea $C = c_X X + c_Y Y$ el costo mensual por agua y electricidad. Entonces,

$$\mathbb{E}[C] = \mu_C = c_X \mathbb{E}[X] + c_Y \mathbb{E}[Y] = 22(8.5) + 36(5.8) = \$395.8$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(C) = \sigma_C^2 &= c_X^2 \mathrm{var}(X) + c_Y^2 \mathrm{var}(Y) + 2 c_X c_Y \mathrm{cov}(X, Y) \\ &= c_X^2 \sigma_X^2 + c_Y^2 \sigma_Y^2 + 2 c_X c_Y \, \sigma_{XY} \\ &= 22^2 (0.9^2) + 36^2 (0.7^2) + 2(22)(36)(0.2457) \\ &= 1416.27 \end{aligned}$$

$$\mathrm{de}(C) = \sigma_C = \sqrt{1416.27} = \$37.63$$

4. Determine la proporción de casas *tipo* que pagarán más de \$450 el próximo mes.

$$\mathbb{P}(C > 450) = 1 - \mathbb{P}(C \leq 450) = 1 - \Phi\left(\frac{450 - \mu_C}{\sigma_C}\right) = 1 - \Phi(1.440) = 0.925$$

   El 92.5 % de las casas *tipo* pagarán más de \$450.

Normal bivariada - ejemplo

Ejemplo:

Una pediatra tiene el registro de sus pacientes de los últimos 5 años y puede suponer que un niño entre 1 y 2 años de edad tiene una talla (estatura) media de 82 cm, un peso medio de 14 kg, con desviaciones estándar de 3.6 cm y 1.8 kg, respectivamente. Si la correlación entre peso y estatura es de 0.42, responda las siguientes preguntas. Los datos muestran que razonablemente se puede suponer que talla y peso siguen una *distribución normal bivariada*.

1. ¿Cuál es la estatura media y desviación estándar de los niños de 15 kg?
2. Determine la desviación estándar del peso de un niño de 80 cm de estatura.
3. Calcule la probabilidad de que un niño de talla 80 pese más de 15 kg.
4. Una firma farmacéutica define un índice de desarrollo α para niños de esa edad como A $=$ 1.4 Estatura (cm) $+$ 7.8 Peso (kg). Se desea apoyar aquellos niños en el cuartil más bajo de la distribución. Determine el valor máximo de A para recibir apoyo.

Normal bivariada - ejemplo

Solución: La pareja (X, Y) denota la estatura y peso de un niño y se supone que sigue una distribución *normal bivariada* con los siguientes parámetros:

$$\mu_X = 82, \quad \sigma_X = 3.6, \quad \mu_Y = 14, \quad \sigma_X = 1.8, \quad , \rho_{XY} = 0.42$$

1. ¿Cuál es la estatura media y desviación estándar de los niños de 15 kg?

$$\mathbb{E}[X|Y = 15] = \mu_X + \rho_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y) = 82 + 0.42\frac{3.6}{1.8}(15 - 14) = 75.28 \text{ cm}$$

$$\text{de}(X|Y = 15) = \sqrt{\sigma_X^2(1 - \rho_{XY}^2)} = \sqrt{3.6^2(1 - 0.42^2)} = \sqrt{10.6738} = 3.267 \text{ cm}$$

2. Determine el peso medio y la desviación estándar de un niño de 80 cm de estatura.

$$\mathbb{E}[Y|X = 80] = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) = 14 + 0.42\frac{1.8}{3.6}(80 - 82) = 13.580 \text{ kg}$$

$$\text{de}(Y|Y = 80) = \sqrt{\sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)} = \sqrt{1.8^2(1 - 0.42^2)} = \sqrt{2.668} = 1.634 \text{ kg}$$

3. Calcule la probabilidad de que un niño de talla 80 pese más de 15 kg.

$$\mathbb{P}(Y > 15|X = 80) = 1 - \Phi\left(\frac{15 - 13.580}{1.634}\right) = 1 - \Phi(0.869) = 0.192$$

Normal bivariada - ejemplo

4. Una firma farmacéutica define un índice de desarrollo α para niños de esa edad como A $=$ 1.4 Estatura (cm) $+$ 7.8 Peso (kg). Se desea apoyar aquellos niños en el cuartil más bajo de la distribución. Determine el valor máximo de A para recibir apoyo.

   Sean $a_X = 1.4$ y $a_Y = 7.8$. Entonces, $A \sim \mathrm{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$, donde

   $$\mu_A = a_x\mu_X + a_Y\mu_Y = 224, \qquad \sigma_A^2 = a_X^2\sigma_X^2 + a_Y^2\sigma_Y^2 + 2a_Xa_Y\sigma_{XY} = 282.00$$

   Para determinar q_A el primer cuartil de la distribución del índice α, considere $z_{0.25} = -0.674$, el primer cuartil de la distribución normal estándar, de manera que $\Phi(z_{0.25}) = \Phi(-0.674) = 0.25$. Entonces se debe tener que

   $$0.25 = \Phi(z_{0.25}) = \Phi\left(\frac{q_A - \mu_A}{\sigma_A}\right)$$

   por lo que

   $$q_A = \mu_A + z_{0.25} \cdot \sigma_A = 224 - 0.674\sqrt{282} = 212.67$$

   Por lo que niños con un índice α menor a 213 podrán recibir apoyo.

Ejercicios

Problemas Cuaderno Gris, sección 4.1:

Recomendados:

1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 13

Problemas Cuaderno Gris, sección 4.2:

Recomendados:

5, 7, **9**, **10**, **12**, 13, **15**, 17, **19**, 21, **24**, 30, **35**,
40, 42, **44**, 47, 49, 52, 54, **55**, **56**, **61**, 64, 67, **68**