CLASE10. Opciones Americanas

Valuacion de Opciones Americanas.

Porque es atractiva una opcion americana ?

Cualquier producto derivado puede diseñarse como un producto de tipo americano simplemente añadiendo una clausula de ejercicio previo al contrato. La gran mayoria de las opciones que se compran a traves de bolsas de valores son de tipo americano.

La clausula de ejercicio previo permite al comprador del producto derivado reclamar el valor intrinseco definido en el contrato en el momento que el decida hacerlo simpre y cuando esto sea antes que el tiempo final de maduracion del contrato.

El valor intrinseco del producto derivado esta dado por la relacion funcional $I(\mathsf{F})$ que lo determina. En el caso de la opcion Call con prevcio de ejercicio K tenemos que $I(\mathsf{F}) = (\mathsf{F} - K)_+$ .Asi, la parte larga de un producto derivado de tipo americano podra reclamar un flujo definido por:

$$I(S_\tau)$$

donde τ es cualquier tiempo intermedio entre t y T ($\tau \in [t,T]$) en el cual la parte larga del contrato decida ejercerlo. Para el caso de la opcion call americana con precio de ejercicio K tenemos que la parte larga del contrato podra reclamar en cualquier tiempo τ la cantidad:

$$(S_\tau - K)_+$$

Porque es atractiva una opcion americana ?

Una opcion con clausula de ejercicio previo puede ser atractiva a los inversionistas.

Si consideramos la volatilidad inherente a los mercados bursatiles es razonable pensar que algun inversionista pueda querer tomar ventaja de algun movimiento fuerte del precio del activo subyaciente; reclamando el flujo asociado al producto derivado inmediatamente sin tener que esperar a la terminacion del contrato, corriendo el riesgo de que un movimiento adverso lo prive de las ganancias que podria obtener en es momento.

Por supuesto una opcion americana ofrece las mismas ventajas, y quiza mas, que las ofrecidas por una opcion de tipo europeo. Por ello la opcion americana debera valer por lo menos lo mismo que su contraparte europea.

4A la diferencia entre el valor de la opcion de tipo americano y la opcion de tipo europeo se le denomina prima por ejercicio previo.

$$PEP = V_0^0 am - V_0^0 eu$$

Esta prima es lo que paga el inversionista por la adicion al contrato de la clausula de ejercicio previo. Si esta facilidad vale o no algo de dinero para el inversionista debera ser determinado por consideraciones de valuacion libre de riesgo, tal como hemos valuado los productos derivados hasta el momento.

Valuar una opcion de tipo americano representa una dificultad poco trivial pues no sabemos en que momento del tiempo se ejercera la opcion y se generara un flujo de efectivo para el inversionista. En lenguaje de probabilidad decimos que el tiempo de ejercicio τ es aleatorio. De hecho es lo que se llama un tiempo de paro con respecto al proceso estocastico que genera los precios.

En la practica el problema consiste en considerar todas las posibles estrategias de ejercicio de la opcion americana y cobrarle al comprador el producto derivado considerando que el lo adquiera ejercera de manera optima la opcion (con la estrategia de ejercicio que maximize sus ganancias). Entonces el valor de una opcion americana esta dado por:

$$\max_\tau \left(\frac{1}{1 + r_\tau} E[I(S_\tau)] \right)$$

donde r_τ es la tasa simple no anualizada por un periodo τ y el maximo se toma con respecto a todas las posibles estrategias de ejercicio o lo que es equivalente sobre todos los posibles tiempos de paro. Donde el valor esperado es por supuesto con respecto a uuna medida de probabilidad libre de riesgo.

No es dificil demostrar que la estrategia de ejercicio optimo esta dada, en terminos financieros, por:

"PARO SIEMPRE QUE MI INGRESO AL EJERCER HOY SEA MAYOR QUE EL VALOR ESPERADO, TRAIDO A VALOR PRESENTE, DE MI OPCION AMERICANA EN EL MERCADO SECUNDARIO"

Este es entonces un problema altamente recursivo pues para decidir sobre el ejercicio hoy de la opcion americana y conocer lo que esta vale, debo saber de antemano lo que valdra la opcion americana en todos los tiempos futuros, anteriores a T, en todos los estados posibles.

Solo en casos simplificados podemos realizar este tipo de valuacion iterativa de manera feasible con recursos computacionales razonables. Es de esperarse que en el arbol binomial podamos realizar esta valuacion pues ya hemos observado la facilidad con la que se pueden iomplementar tecnicas de valuacion recursivas (trabajando sobre el arbol de "adelante hacia atras")

En casos multidimensionales y/o modelos en tiempo continuo es mucho mas dificil realizar esta valuacion y es de hecho un problema abierto de investigacion en al area de matematicas financieras.

Valuacion sobre el arbol Binomial.

Para obtener el valor de producto derivado de tipo americano sobre un arbol binomial requerimos primero de algunas definiciones:

1. Sea $I_i^j = I(S_i^j) = I(S_0 u^{i-j} d^{i-j})$ el valor intrinseco del derivado en el nodo *i,j*. Es decir en el tiempo *i* y en el estado *j*. I_i^j sera entonces lo que obtendriamos al tiempo *i* si decidieramos ejercer en ese momento mientras nos encontramos en el estado *j* de la naturaleza.
2. Vam_i^j es el valor en el mercado secundario de la opciona americana si nos encontramos al tiempo *i* en el nodo *j*. Para simplificar notacion simplemnente escribiremos V_i^j pero dado el contexto debera ser claro que se trata del valor de una opcion americana.
3. Sea Y_i^j el valor de continuacion de la opcion en el nodo *i,j*. Esto es el valor asociado a no ejercer en el momento *i* y en el estado *j*.

Dadas estas definiciones existen las siguientes relaciones entre ellaas con una clara interpestacion financiera:

1. El valor de continuacion es igual a:
$$\begin{aligned} Y_i^j &= \frac{1}{1+r} E\left[V_{i+1}^j \,\middle|\, S_i^j \right] \\ &= \frac{1}{1+r}\left[PuV_{i+1}^j + PdV_{i+1}^{j+1} \right] \end{aligned}$$
donde $E\left[V_{i+1}^j \,\middle|\, V_i^j \right]$ denota el valor esperado de la opcion americana al tiempo $(i+1)$ dado que al tiempo *i* el subyaciente adquirio el valor S_i^j
2. El valor de continuacion al tiempo *N* es igual a cero y el valor dela opcion es igual al valor intrinseco.
$$Y_N^j = 0$$
$$V_N^j = I_N^j$$
para toda *j*. El valor de continuar en la fecha en que vence el contrato es igual a cero. Al tiempo final si la opcion no se ejercicio valdra lo mismo que una europea (el valor intrinseco al momento de terminacion del contrato).
3. El valor la opcion americana sera igual al maximo entre I_i^j y Y_i^j
$$V_i^j = \max\left[I_i^j, Y_i^j \right]$$
Es decir al maximo entre ejercer hoy y el valor esperado asociado a la decision de continuar.

Con estas tres observaciones podemos proceder a valuar la opcion americana con un algoritmo de atras hacia adelante de la siguiente forma:

1. a. Al tiempo final

$$V_N^j = I_N^j = I(S_N^j)$$

b. En un tiempo anterior $N-1$ obtenemos los valores de continuacion Y_i^j :

$$Y_{N-1}^j = \frac{1}{1+r}\left[PuV_N^j + PdV_N^{j+1}\right]$$

c. Con lo valores de continuacion ya calculados obtenemos el valor de la opcion americana al tiempo $N-1$ como

$$V_{N-1}^j = \max\left[I_{N-1}^j, Y_{N-1}^j\right]$$

d. Con los valores V_{N-1}^j repetimos los pasos b,c para obtener los valores V_{N-2}^j y asi sucesivamente hasta obtener el valor V_0^0

Como siempre es mas sencillo entender este algoritmo a traves de un ejemplo.

EJEMPLO

A continuacion obtendremos el valor de una opcion PUT de tipo americano en un arbol binomial con las sigueintes caracteristicas:

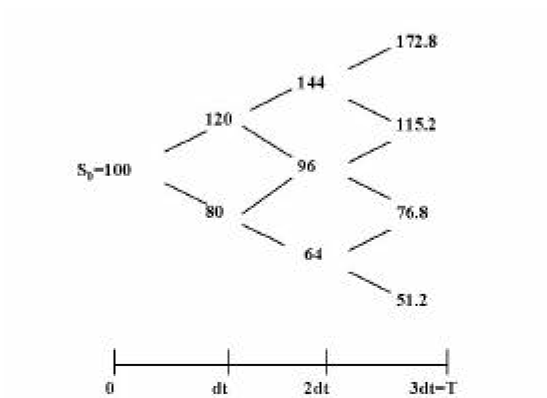
1. $T = 1$
2. $N = 3$
3. $u = 1.2$
4. $d = 0.8$
5. $r = 0.1$
6. $S_0 = 100$
7. $K = 100$

Nota: usando nuestra formula para el calculo de las probabilidades libres de riesgo tenemos que:

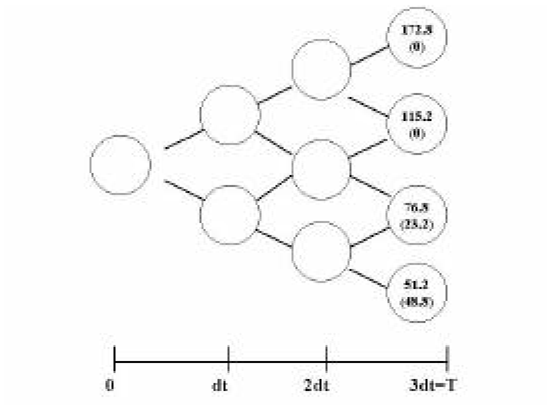
$$Pu = 3/4$$

$$Pd = 1/4$$

Nuestro arbol binomial es entonces:



Al tiempo N= 3: El valor de la opcion americana en los nodos finales esta dado por el valor intrinseco del put y se escribe entre parentesis en la siguiente grafica:



Al tiempo N= 2: Obtenemos los valores de continuacion en cada nodo:

$$\begin{aligned} Y_2^0 &= \frac{1}{1.1}\left[3/4 * V_3^0 + 1/4 * V_3^1\right] \\ &= \frac{10}{11}\left[3/4 * 0 + 1/4 * 0\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2^1 &= \frac{1}{1.1}\left[3/4 * V_3^1 + 1/4 * V_3^2\right] \\ &= \frac{10}{11}\left[3/4 * 0 + 1/4 * 23.2\right] \\ &= 5.27 \end{aligned}$$

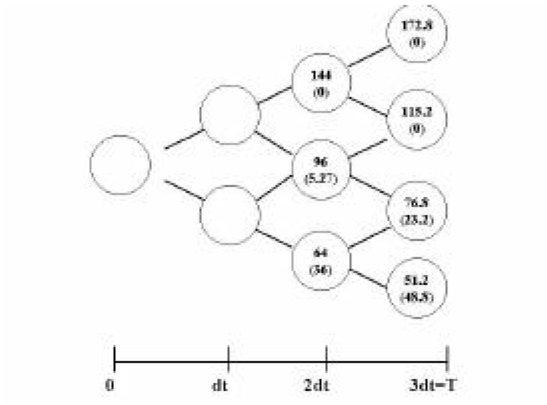
$$\begin{aligned} Y_2^2 &= \frac{1}{1.1}\left[3/4 * V_3^2 + 1/4 * V_3^3\right] \\ &= \frac{10}{11}\left[3/4 * 23.2 + 1/4 * 48.8\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con ello calculamos el valor de la opcion americana en los nodos al tiempo 2:

$$\begin{aligned} V_2^0 &= \max\left[I_2^0, Y_2^0\right] \\ &= \max\left[0, 0\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2^1 &= \max\left[I_2^1, Y_2^1\right] \\ &= \max\left[4, 5.27\right] \\ &= 5.27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \max\left[I_2^2, Y_2^2\right] \\ &= \max\left[36, 26.91\right] \\ &= 36 \end{aligned}$$



Al tiempo N= 1: Obtenemos los valores de continuacion en cada nodo:

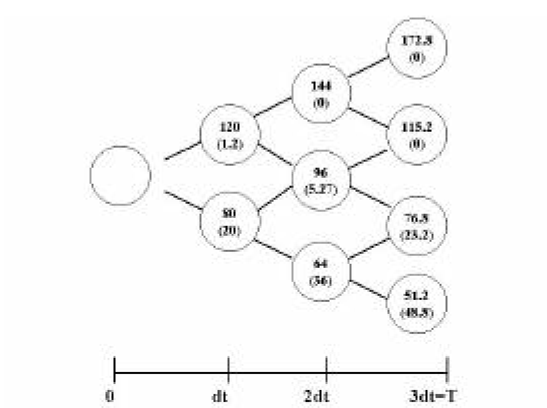
$$\begin{aligned} Y_1^0 &= \frac{1}{1.1}\left[3/4 * V_2^0 + 1/4 * V_2^1\right] \\ &= \frac{10}{11}\left[3/4 * 0 + 1/4 * 5.27\right] \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_1^1 &= \frac{1}{1.1}\left[3/4 * V_1^1 + 1/4 * V_1^2\right] \\ &= \frac{10}{11}\left[3/4 * 5.27 + 1/4 * 30\right] \\ &= 5.27 \end{aligned}$$

Con ello calculamos el valor de la opcion americana en los nodos al tiempo 1:

$$\begin{aligned} V_1^0 &= \max\left[I_1^0, Y_1^0\right] \\ &= \max\left[0, 1.2\right] \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1^1 &= \max\left[I_1^1, Y_1^1\right] \\ &= \max\left[20, 11.78\right] \\ &= 20 \end{aligned}$$

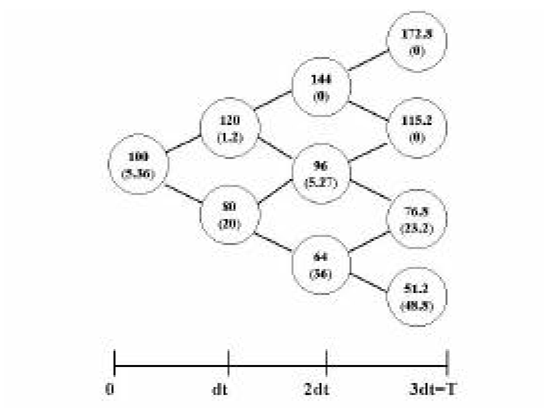


Al tiempo N= 0: Obtenemos el valor de continuacion en el nodo inicial:

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{1.1}\Big[3/4 * V_1^0 + 1/4 * V_1^1\Big] \\ &= \frac{10}{11}\Big[3/4 * 1.2 + 1/4 * 20\Big] \\ &= 5.36 \end{aligned}$$

Con ello calculamos el valor de la opcion americana hoy como:

$$\begin{aligned} V_0^0 &= \max\Big[I_0^0, Y_0^0\Big] \\ &= \max\Big[0, 5.36\Big] \\ &= 5.36 \end{aligned}$$



Podemos calcular el valor de la contraparte europea de este contrato calculando las probabilidades de llegar a los 4 nodos finales y calculando el valor esperado traido a valor presente de los flujos asociados:

$$\begin{aligned} V_0^0 eu &= \frac{1}{1+r}\Big[3 * Pu * Pd^2 * (23.2) + Pd^3(48.8)\Big] \\ &= 3.6 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso la prima por ejercicio previo esta dada por:

$$\begin{aligned} PEP &= 5.36 - 3.60 \\ &= 1.76 \end{aligned}$$

Es decir mas del 30% del valor del put americano proviene, en este caso, de la calusula de ejercicio previo.