CLASE3. Introduccion a la Calibracion de Modelos. El modelo Binomial.

Calibracion de modelos.

Dado que la distribucion de probabilidad del activo subyaciente al tiempo T, S_T no esta determinada y no es conocida a priori, para valuar productos derivados es necesario eligir un modelo de probabilidad (por ejemplo la formula de Black-Scholes que veremos mas adelante supone una distribucion lognormal para el precio del subyaciente al tiempo T). Sin embargo sea cual fuere el modelo probabilistico que usemos debe tener la propiedad de ser consistente tanto con el precio del forward como con la paridad Put-Call. esta consistencia es un ejemplo de lo que se conoce como calibracion de modelos a precios del mercado.

Es decir, sea cual fuere la densidad de probabilidad $f(S_T)$ que usemos para el tiempo T se debe cumplir que:

$$\frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n}(S_T^i - K)f(S_T^i) = S_t - \frac{K}{1+r}$$

$$\frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n}(S_T^i - K)_+ f(S_T^i) - \frac{1}{(1+r)}\sum_{i=1}^{n}(K - S_T^i)_+ f(S_T^i) = S_t - \frac{K}{1+r}$$

si usamos un modelo discreto, o bien:

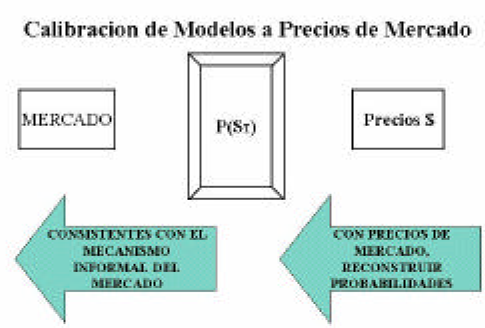
$$\frac{1}{(1+r)}\int_{-\infty}^{+\infty}(S_T - K)f(S_T)dS_T = S_t - \frac{K}{1+r}$$

$$\frac{1}{(1+r)}\int_{-\infty}^{+\infty}(S_T - K)_+ f(S_T)dS_T - \frac{1}{(1+r)}\int_{-\infty}^{+\infty}(K - S_T)_+ f(S_T)dS_T = S_t - \frac{K}{1+r}$$

en el caso de un modelo continuo.

P: Cual es el objetivo de calibrar un modelo ?

R: Sacarle la verdad al mercado: Si bien no existe tal cosa como "*LA*" distribucion de probabilidad del subyaciente al tiempo T. De alguna u otra manera el mercado llega a un concenso de como deberian ser (a groso modo) las probabilidades de que el subyaciente tome tales o cuales valores, dicho concenso se refleja en el precio que le asignana a los productos derivados. La calibracion de modelos es un ejemplo de lo que se conoce como ingenieria inversa:



Podemos pensar en el proceso de calibracion como un esfuerzo por obtener informacion sobre el ”aparato” generados de precios a partir de observaciones de su producto final, es decir los precios de los derivados.

En un mercado liquido existen muchos productos derivados escritos sobre un mismo subyacente y por consiguiente muchos precios a los cuales calibrar un modelo. Tipicamente en un mercado de derivados liquido existiran una decena o mas de opciones de tipo Call y Put con distintos precios de ejercicio:

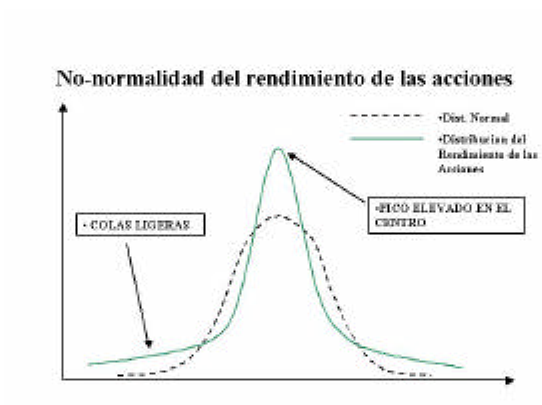
$$\begin{array}{cc} C(t,T,S,K_1) & P(t,T,S,K_1) \\ C(t,T,S,K_2) & P(t,T,S,K_2) \\ \vdots & \vdots \\ C(t,T,S,K_N) & P(t,T,S,K_N) \end{array}$$

asi, calibrar un modelo es esquivalente a resolver lo que en la teoria de probabilidad se llama como problemas de momentos: Encontrar una distribucion $f(S_T)$ tal que:

$$\begin{array}{cc} E_f[(S_T-K_1)_+] = C(t,T,S,K_1) & E_f[(S_T-K_1)_+] = P(t,T,S,K_1) \\ E_f[(S_T-K_2)_+] = C(t,T,S,K_2) & E_f[(S_T-K_2)_+] = P(t,T,S,K_2) \\ \vdots & \vdots \\ E_f[(S_T-K_N)_+] = C(t,T,S,K_N) & E_f[(S_T-K_N)_+] = P(t,T,S,K_N) \end{array}$$

Inconsistencia de la distribucion normal, presente, pasado y futuro.

Es un conocimiento relativamente comun en el medio financiero (al menos entre los que hacen analisis cuantitativo) la no normalidad del precio de las acciones. Al graficar en un histograma los rendimientos de las acciones (o bien el logaritmo de estos si suponemos una distribucion lognormal) podremos observar por pura inspeccion visual que este histograma presenta caracteristicas alejadas a las que debiera tener si los datos proviniesen de una distribucion normal. Presentan alta kurtosis (una distribucion con un pico elevado en el centro) y colas ligeras (alta probabilidad para eventos catastroficos).



Al calibrar los precios de los calls a un modelo de probabilidad rapidamente nos encontramos en la situacion de que no solo el comportamiento historico no tiene una distribucion normal. El mecanismo a traves del cual el mercado asigna precios tampoco es consistente con una distribucion normal. Es decir la opinion del mercado sobre el comportamiento futuro del activo subyaciente difiere de un supuesto de distribucion normal.

Porque? simplemente porque al insistir en calibrar una distribucion normal tenemos mas restricciones que grados de libertad: Mientras que una distribucion normal esta completemente determinada por dos parametros (media y varianza) al calibrar requerimos cumplir con 2N restrcciones de momentos.

El modelo de probabilidad mas sencillo es la distribucion binomial y el ejercicio de calibracion al mercado mas elemento es la calibracion al precio actual de mercado del activo subyacente. esto da origen al modelo binomial.

El modelo Binomial.

El modelo binomial supone que el activo subyaciente solo puede tomar dos posibles valores al tiempo T:

$$S_T^U = US_t \text{ con probabilidad } P_u$$
$$S_T^D = DS_t \text{ con probabilidad } P_d$$

donde $D < U$ y por simplicidad omitiremos el subindice T quedando implicito que estamos trabajando con un modelo a un solo periodo, el tiempo T. Por lo que escribiremos S_D y S_U.

La simplicidad del modelo no esta necesariamente alejada de la realidad. Por un lado en los mercados liquidos las transacciones se realizan con tanta rapidez que resulta una buenba aproximacion pensar que el activo solo puede subir o bajar un tick (1/16 de peso) en una fraccion de segundo. Lo mas importante es que el modelo binomial sirve como aproximacion a un modelo en tiempo continuo si hacemos el intervalo de tiempo $T - t > 0$ lo suficientemente pequeño.

Ademas, las derivaciones teoricas del modelo binomial sientan las bases para desarrollos con modelos mas ”realistas” pero no muy distintos en cuanto a conclusiones y marco teorico al que conforma el modelo binomial.

Al proponer el modelo binomial para algun activo subyaciente, deberiamos escoger los parametros (es decir la probabilidad P_u) de tal manera que el modelo este por lo menos calibrado al precio del activo subyaciente. Es decir:

$$S_t = \frac{S_D P_D + S_U P_U}{(1+r)}$$

Esto es suficente para determinar las probabilidades pues estas deben sumar a uno. Por lo que tenemos un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incognitas:

$$\begin{cases} S_D P_D + S_U P_U = (1+r) * S_t \\ P_D + P_U = 1 \end{cases}$$

La solucion del sistema esta dada por:

$$\begin{cases} P_U = \frac{1+r-D}{U-D} \\ P_D = \frac{U-1-r}{U-D} \end{cases}$$

Para que estas sean en verdad probabilidades debemos pedir no solo que sumen a uno sino que no sean negativas, es decir $P_U > 0$ y $P_D > 0$. El requerir no negatividad pone la siguente restriccion sobre los parametros u,d,r del modelo binomial:

$$D < 1 + r < U$$