CLASE4. Modelo Binomial (cont). Modelo trinomial. Mercados Incompletos.

Modelos Binomial (cont).

Al calibrar el modelo binomial al precio del activo subyacente encontramos que para obtener probabilidades positivas, debiamos satisfacer que:

$$D < 1 + r < U$$

Esta condicion tiene significado financiero y una explicacion consistente con no-arbitraje. En un mercado con no arbitraje, el modelo de un activo financiero riesgoso debe darle probabilidad positiva al evento de que el activo tenga un rendimiento menor a la tasa libre de riesgo y una probabilidad positiva para un rendimiento mayor a la tasa libre de riesgo.

Esto hace sentido pues de lo contrario podriamos hacer un arbitraje.

Si $1 + r < D < U$ podemos hacer un arbitraje pidiendo prestado al banco la cantidad S_t comprar el activo y al tiempo T tendremos, sea cual fuere el valor que tomara S_T un rendimiento suficiente para pagar nuestra deuda y aun obtener una ganancia. De igual modo si $D < U < 1 + r$ podriamos hacer un arbitraje vendiendo la accion en corto e invirtiendo el dinero en el banco, pues el rendimiento del banco siempre seria mayor que lo que tenemos que pagar a la otra parte de la venta en corto.

Para probar la consistencia del modelo binomial deberia ser cierto que el precio teorico del forward bajo este modelo sea de

$$S_t - \frac{K}{1 + r}$$

asi debe suceder pues este resultado fue derivado independientemente del modelo de probabilidad que se usara para modelar S_T.

El precio teorico del forward bajo el modelo binomial esta dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{E(S_T - K)}{1 + r} &= \frac{(S_D - K)P_D + (S_U - K)P_U}{1 + r} \\
&= \frac{(S_D P_D + S_U P_U) - K(P_D + P_U)}{1 + r} \\
&= \frac{(S_D P_D + S_U P_U) - K}{1 + r} \\
&= \frac{(S_D P_D + S_U P_U)}{1 + r} - \frac{K}{1 + r} \\
&= S_t - \frac{K}{1 + r}
\end{aligned}$$

La tercera igualdad es cierta porque las probabilidades suman a uno y la ultima igualdad se sigue del hecho de que el modelo esta calibrado al precio del activo subyaciente, es decir:

$$\begin{aligned}
S_t &= \frac{E(S_T)}{1 + r} \\
&= \frac{(S_D P_D + S_U P_U)}{1 + r}
\end{aligned}$$

Distribuciones libres de riesgo.

A las distribuciones de probabilidad resultantes de calibrar el precio del activo subyacente se les llama distribuciones ”libres de riesgo” y a las probabilidades asignadas a cada posible valor del subyaceinte en el futuro probabilidades ”libres de riesgo” (risk neutral probabilities). La razon es la siguiente:

En el caso de la distribucion binomial calibrar al precio del subyacente significa que P_U y P_D son de tal forma que

$$S_t = \frac{E(S_T)}{1 + r}$$

Entonces el rendimiento esperado del activo esta dado por

$$E\left(\frac{S_T}{S_t}\right) = \frac{E(S_T)}{S_t} = 1 + r$$

es decir, el activo subyaciente riesgoso tiene el mismo rendimiento esperado que un activo libre de riesgo: meter tu dinero al banco para tener una ganancia segura de $1 + r$.

Ejemplo: el modelo binomial en accion

Al quedar en el modelo binomial determinadas las probabilidades de que el subyacente adquiere los valores S_U o bien S_D, podemos valuar cualquier producto derivado que depedna unicamente del precio S_T del subyaciente al tiempo T.

Por ejemplo, un Call sobre acciones de AOL con las siguientes caracteristicas:

$$T = 1$$
$$S = 50$$
$$S_U = 75$$
$$S_D = 40$$
$$r = 0.1$$
$$K = 60$$

es decir D=0.8 y U=1.5. En este caso las probabilidades ”calibradas” son:

$$P_U = \frac{1+r-D}{U-D} = \frac{1.1-0.8}{1.5-0.8} = 3/7$$
$$P_D = \frac{U-1-r}{U-D} = \frac{1.5-1.1}{1.5-0.8} = 4/7$$

Hace sentido financiero que $P_U < P_D$ porque el precio de la accion hoy es mas cercano al valor de S_U lo cual implica que el mercado le ”asigna” una mayor probabilidad a que la accion baje de precio.

En el caso de que $U = 1.2$ y $D = 0.8$ tenemos que $S_U = 60$ y $S_D = 40$, si $r = 0$ entonces $P_U = 0.5$. Es decir el mercado asigna igual probabilidad a que la accion suba o baje de precio.

En el caso de que $U = 1.2$ y $D = 0.8$ tenemos que $S_U = 60$ y $S_D = 40$, si $r = 0.1$ entonces $P_U = 0.75$. El mercado asigna mayor probabilidad a que la accion suba de precio pues a pasar de que suban o bajan en la misma proporcion (20%), la presencia de una tasa de interes positiva introduce una asimetria.

Dadas las probabilidades $P_U = 3/7$ y $P_D = 4/7$ podemos evaluar el call de la siguente manera:

			Flujo Originado por el Call
	$\boxed{S_U=75}$	$\rightarrow$	$(75-60)_+ = 15$
$\boxed{S_t=50}$			
	$\boxed{S_D=40}$	$\rightarrow$	$(40-60)_+ = 0$

Valor del Call: $E\left[(S_T-K)_+\right]/(1+r) = \left[15 * 3/7 + 0 * 4/7\right]/1.1$

$= \$5.85$

El modelo Trinomial.