CLASE5. Modelo Trinomial. Replicacion de Portafolios y Mercados Incompletos.

Modelos Trinomial

Una generalizacion inmediata al modelo binomial en el que permitimos tres estados del activo S en el futuro: Su,Sm y Sd donde

$$d < m < u$$

y como hemos hecho anteriormente u, m y d son porcentajes en que la opcion puede bajar en la proporcion d, subir en la proporcion u o (bajar/subir) una proporcion intermedia m

$$\boxed{\mathrm{S}_T = \mathrm{S}u}$$

$$\boxed{\mathrm{S}_t = \mathrm{S}} \quad \boxed{\mathrm{S}_T = \mathrm{S}m}$$

$$\boxed{\mathrm{S}_T = \mathrm{S}d}$$

Al calibrar el modelo binomial al precio del activo subyacente (es decir, encontrar las probabilidades libres de riesgo) implica resolver para las probabilidades de cada uno de los tres posibles estados Pu, Pm, Pd las siguientes ecuaciones:

$$Pu + Pm + Pd = 1$$

$$SuPu + SmPm + SdPd = S(1 + r)$$

Este es un sistema de dos ecuaciones en tres incognitas. De algenbra lineal sabemos que este sistema o no tiene solucion o bien tiene un numero infinito de soluciones. El segundo caso es el que prevalece siempre que la accion tome valores distintos. Es decir $u \neq m \neq d$.

En particular, la solucion del sistema de ecuaciones lineales esta dada por:

$$\begin{cases} Pm = \frac{1+r-u}{m-u} - \frac{d-u}{m-u} Pd \\ Pu = \frac{m-1-r}{m-u} + \frac{d-m}{m-u} Pd \\ Pd = \text{ parametro libre} \end{cases}$$

El pedir positividad de las probabilidades implica por un lado que:

$$\begin{aligned} Pm &= \frac{1+r-u}{m-u} - \frac{d-u}{m-u} Pd > 0 \\ &\Rightarrow \frac{d-u}{m-u} Pd < \frac{1+r-u}{m-u} \\ &\Rightarrow (d-u)Pd > 1+r-u \\ &\Rightarrow Pd < \frac{1+r-u}{(d-u)} \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} Pu &= \frac{m-1-r}{m-u} + \frac{d-m}{m-u} Pd > 0 \\ &\Rightarrow \frac{m-d}{m-u} Pd < \frac{m-1-r}{m-u} \\ &\Rightarrow (m-u)Pd > m-1-r \\ &\Rightarrow Pd > \frac{m-1-r}{m-d} \end{aligned}$$

En resumen, si bien Pd es un parametro libre que define a unnumero infinito de vectores de probabilidad libre de riesgo, esta acotado de la siguiente forma para mantener la positividad de las probabilidades:

$$\begin{cases} \text{Si } m-1-r \geq 0 \;\rightarrow\; \frac{m-1-r}{m-d} \leq Pd \leq \frac{1+r-u}{d-u} \\ \\ \text{Si } m-1-r < 0 \;\rightarrow\; 0 \leq Pd \leq \frac{1+r-u}{d-u} \end{cases}$$

Ejemplo:

Para la Opcion Call que valuamos en el modelo binomial resulta que no podemos determinar univocamente su valor a traves de argumentos de no arbitraje, pues hay mas de una probabilidad libre de riesgo

			Flujo Originado por el Call
	$\boxed{S_U=75}$	$\rightarrow$	$(75-60)_+ = 15$
$\boxed{S_t=50}$	$\boxed{S_M=65}$		$(65-60)_+ = 5$
	$\boxed{S_D=40}$	$\rightarrow$	$(40-60)_+ = 0$
		Valor del Call:	$E\left[(S_T-K)_+\right]/(1+r) = \left[15*Pu+5*Pm\right]/1.1$

Es decir $S_t = 50, r = 0.1, u = 1.5, m = 1.3, d = 0.8$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
E\left[(S_T-K)_+\right]/(1+r) &= \left[15*Pu+5*Pm\right]/1.1 \\
&= 10/11*\left[15*\frac{m-1-r}{m-u}+15*\frac{d-m}{m-u}Pd+5*\frac{1+r-u}{m-u}-5*\frac{d-u}{m-u}Pd\right] \\
&= 10/11*\left[15*\frac{1.3-1.1}{1.3-1.5}+15*\frac{0.8-1.3}{1.3-1.5}Pd+5*\frac{1.1-1.5}{1.3-1.5}-5*\frac{0.8-1.5}{1.3-1.5}Pd\right] \\
&= 10/11*\left[15*\frac{0.2}{-0.2}+15*\frac{0.5}{0.2}Pd+5*\frac{0.4}{0.2}-5*\frac{0.7}{0.2}Pd\right] \\
&= 10/11*\left[-15+\left(\frac{7.5}{0.2}-\frac{3.5}{0.2}\right)Pd+10\right] \\
&= 10/11*\left[20Pd-5\right]
\end{aligned}$$

En este caso Pd esta acotado por

$$\begin{gathered}
\frac{m-1-r}{m-d} \le Pd \le \frac{1+r-u}{d-u} \\
\frac{1.3-1.1}{1.3-0.8} \le Pd \le \frac{1.1-1.5}{0.8-1.5} \\
\frac{0.2}{0.5} \le Pd \le \frac{0.4}{0.7} \\
0.4 \le Pd \le 4/7 \approx 0.5714
\end{gathered}$$

dado que el valor del Call es una funcion lineal de Pd, este alcanzara sus valores maximos y minimos en los extremos del intervalo que acota a Pd

Cuando $Pd = 0.4$ el call vale

$$\begin{aligned}
&10/11*\left[20*0.4-5\right] \\
&= 10/11*\left[8-5\right] \\
&= 30/11 \approx 2.73
\end{aligned}$$

Cuando $Pd = 4/7$ el call vale

$$\begin{aligned}
&10/11*\left[20*4/7-35/7\right] \\
&= 10/11*\left[45/7\right] \\
&= 450/77 \approx 5.85
\end{aligned}$$

Mercados Incompletos

Un par de definiciones:

En un modelo a un periodo, se dice que dos **portafolios son equivalentes** si valen lo mismo, bajo cualquier circunstancia (cualqiuoer estado de la naturaleza), al final del periodo.

OBSERVACION: En un mercado que no permite arbitraje los dos portafolios deben valer lo mismo. De lo contrario venderiamos el portafolio mas caro, con lo que obtengamos comprariamos el mas barato (obteniendo una ganancia en la transaccion) y al final del periodo solventariamos los compromisos adquiridos al vender el portafolio al principio del periodo, vendiendo los activos contenidos en el portafolio que compramos (esto no representa ganancia o perdida pues al final del periodo los dos portafolios valen lo mismo).

En este contexto, dado un producto derivado cualquiera, se dice que un portafolio es un **portafolio replicante** (asociado a este producto derivado) si esta conformado por una posicion de dinero en el banco y acciones tales que el valor final del portafolio es igualk al valor final del producto derivado bajo cualquier estado de la naturaleza. Es decir si el portafolio replica al producto derivado.

Ahora ya podemos definir lo que es un mercado completo.

Un mercado completo es aquel en el que para todo producto derivado podemos construir un portafolio replicante.

Por negacion: **Un mercado incompleto es aquel que no es completo**.

Ejemplos:

1. • **Modelo Binomial**: **un mercado completo**.

El modelo Binomial con cuenta de Banco (que paga $1+r$ al final del periodo por un deposito al principio de \$1) y un activo S, que al tiempo final puede tomar uno de dos valores: Su o Sd con $d < 1+r < u$

Cualquier producto derivado queda completamente determinado por el valor que adquiere en cualquiera de los dos estados de la naturaleza: $D(Su)$ y $D(Sd)$. Dado este producto derivado generico, un portafolio replicante esta dado por una combinacion θ_1 y θ_2 de dinero en el banco y numero de acciones del activo S tal que

$$\begin{cases} \theta_1(1+r) + \theta_2 Su = D(Su) \\ \theta_1(1+r) + \theta_2 Sd = D(Sd) \end{cases}$$

Al despejar obtenemos que:

$$\theta_2 = \frac{D(Su) - D(Sd)}{Su - Sd}$$

$$\theta_1 = \frac{D(Su) - \theta_2 Su}{1+r}$$

Es decir, simpre existira este portafolio si $Su \neq Sd$. Es decir, si el activo es realmente riesgoso (a diferencia de la cuenta de banco, es incierto que valor tomara en el futuro).

1. • **Modelo Trinomial**: **un mercado incompleto**.

El modelo Binomial con cuenta de Banco (que paga $1+r$ al final del periodo por un deposito al principio de \$1) y un activo S, que al tiempo final puede tomar uno de tres valores: Su , Sm o Sd con $d < m < u$

Cualquier producto derivado queda completamente determinado por el valor que adquiere en cualquiera de los tres estados de la naturaleza: $D(Su)$, $D(Sm)$ y $D(Sd)$. Dado este producto derivado generico, un portafolio replicante esta dado por una combinacion θ_1 y θ_2 de dinero en el banco y numero de acciones del activo S tal que

$$\begin{cases} \theta_1(1+r) + \theta_2 Su = D(Su) \\ \theta_1(1+r) + \theta_2 Sm = D(Sm) \\ \theta_1(1+r) + \theta_2 Sd = D(Sd) \end{cases}$$

Tenemos tres ecuaciones y tan solo dos incognitas, el sistema esta sobredterminado y no tendra solucion a menos de que:

$$\frac{D(Su) - D(Sm)}{Su - Sm} = \frac{D(Su) - D(Sd)}{Su - Sd}$$

Lo cual no tiene por que suceder para todos los productos derivados posibles que podamos diseñar