CLASE6. Arboles Binomiales. Opciones Dependientes del pasado y Americanas.

Germinacion del arbol binomial.

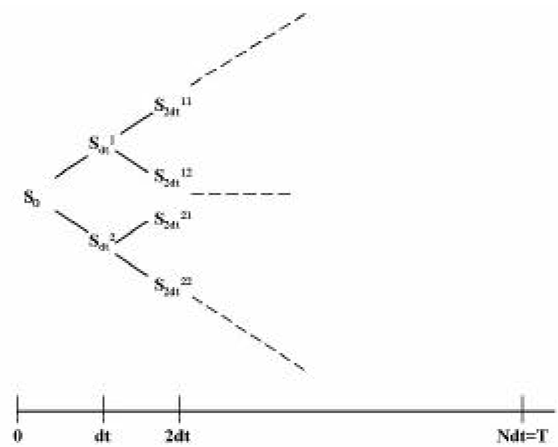
La validez teorica de un modelo binomial quedo plenamente sustentada pero su relevancia practica quedo reducida a los casos en que (T-t) es cercano a cero. Los arboles binomiales acortan esta brecha entre la importancia teorica y la practica.

Estos ”arboles” estan compuestos por ”ramas” cada una de las cuales es en si un modelo binomial. El proposito es reproducir el modelo binomial una y otra vez sobre periodos cortos de tiempo para obtener por agregacion un modelo loable para periodos de tiempo mas grandes.

Supongamos entonces que nos interesa modelar en periodo de tiempo de $t = 0$ (hoy) a T (uno o mas años) donde dividimos el intervalo de tiempo en N subintervalos de tamaño Δt lo suficientemente chicho. Por supuesto

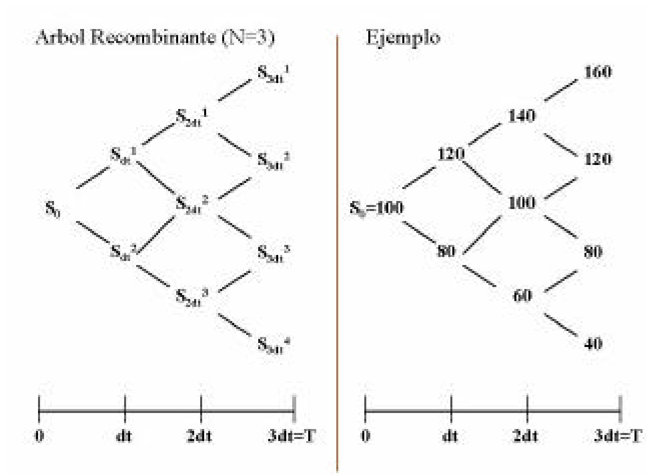
$$T = N\Delta t$$

Supongamos un activo riesgoso S, tipicamente una accion, que al tiempo Δt el activo S_0 puede tomar uno de dos valores (modelo binomial) digamos $S^1_{\Delta t}, S^2_{\Delta t}$. Dependiendo del valor que tome, al tiempo $2\Delta t$ podra romar dos valores en cada uno de los nodos del arbol: Estando parado en el nodo $S^1_{\Delta t}$, podra tomar los valores $S^{11}_{2\Delta t}$ o bien $S^{12}_{\Delta t}$, estando parado en el nodo $S^2_{\Delta t}$, podra tomar los valores $S^{21}_{2\Delta t}$ o bien $S^{22}_{\Delta t}$, y asi sucesivamente hasta llegar al tiempo $N\Delta t = T$.



Asi, al final del periodo (T) tendremos un arbol binomial muy ”frondoso” con 2^N nodos finales denotado por $S^{i_1, i_2, \ldots, i_N}_{N\Delta t}$ donde los indices i_j con $j = 1, \ldots, N$ denotan variables binarias que toman los valores 1 o 2 describen el pasado del activo (como fue que llego al nodo en que se encuentra).

2^N puede ser un numero simplemente inmanejable de nodos. Con $N = 30$ tendremos aproximandamente mil millones de nodos. Por ello en la practica se usan arboles binomiales recombinantes, donde el precio a la baja de un nodo superior y el precio a la alza de un nodo inferior se tocan en el mismo punto:



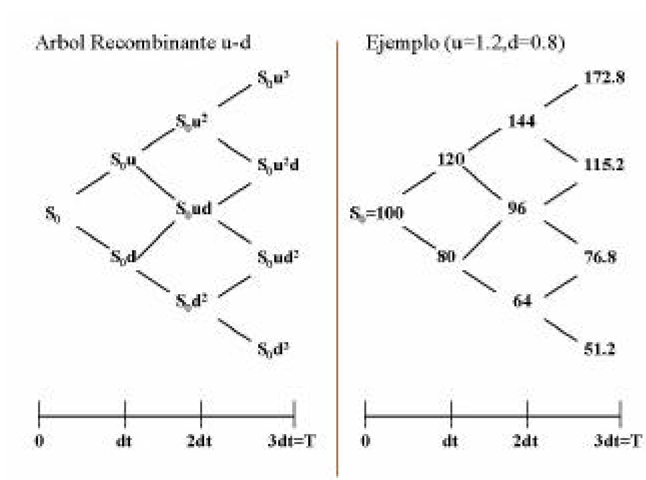
El numero de nodos se reduce dramaticamente. Al tiempo $T = N\Delta t$ tendremos $N + 1$ nodos en nuestro arbol. El numero de nodos crece de manera lineal con el numero de intervalos de tiempo.

Un caso particular de arbol recombinante se deriva del modo binomial que discutimos. En este modelo se permite que el activo suba en un periodo de tiempo dado por un porcentaje u o baje en un porcentaje d. Asi al tiempo $T = N\Delta t$. el activo pudo haber sido sujeto de j alzas y de $(N - j)$ bajas para obtener el valor

$$S_0 u^j d^{N-j}$$

Este arbol tiene la gran ventaja no solo de linearizar el numero de nodos, tambien simplifica enormemente el modelo pues la totalidad del modelo depende solamente de dos parametros u y d. Mientras que en el arbol recombinante general, los parametrso u y d podrian cambiar de nodo en nodo.

La situacion de este caso particular se describe esquematicamente de la siguiente manera:



A pesar de la simpleza de este modelo, resulta suficiente para la mayoria de las aplicaciones a finanzas que veremos. A continuacion cubriremos algunos puntos relevantes acerca del modelo:

1.
- **Valuacion de opciones europeas**. (**con probabilidades**)
- **Estrategia de Cobertura de opciones europeas**. (**portafolios replicantes**)
- **Como escoger los parametros u,d** (**Calibracion de la varianza del modelo**)
- **Opciones dependientes del pasado** (**path-dependent**)
- **Opciones Americanas** (**control estocastico** ?).