CLASE8. Valuacion de Opciones Europeas y Estrategia de Cobertura Dinamica

Valuacion de Opciones Europeas.

Por simplicidad denotemos a los tiempos intermedios de un arbol binomial $(¢t, 2¢t, ..., (N-1)¢t, N¢t)$ simplemente por $1, 2, ..., N-1, N$

Denotemos a un nodo generico del arbol por:

$$S_i^j$$

es decir, el precio del activo al tiempo i y en el estado j donde el estado j corresponde al evento de que despues de i pasos intermedios el precio de la accion subio j veces y bajo $i-j$ veces $(j = 1, 2, ...i)$.

En el nodo i,j (asociado al precio S_i^j) la accion puede subir o bajar:

$$\boxed{S_{i+1}^j = S_i^j u} \quad \text{con probabilidad } Pu = \tfrac{1+r-d}{u-d}$$

$$\boxed{S_i^j}$$

$$\boxed{S_{i+1}^{j-1} = S_i^j d} \quad \text{con probabilidad } Pd = \tfrac{u-1-r}{u-d}$$

Esta informacion es suficiente para valuar cualquier opcion de tipo europeo que madure al tiempo $T = N¢t$. Recordemos que un derivado de tipo europeo esta definido por la relacion funcional que determina el flujo final al inversionista al tiempo final T :

$$I(S_T)$$

Podemos valuar una opcion de tipo europeo que pague $I(S_T)$ a la parte larga al final del periodo de dos maneras distintas:

1. Trabajando el arbol de adelante para atras.

Al tiempo final $T = N¢t$ nuestro arbol binomial tendra $N+1$ nodos:

$$\begin{bmatrix} S_0 u^N \\ S_0 u^{N-1} d \\ S_0 u^{N-2} d^2 \\ - \\ S_0 u^2 d^{N-2} \\ S_0 u d^{N-1} \\ S_0 d^N \end{bmatrix}$$

En cada uno de estos nodos sabemos lo que vale la opcion: simplemente el valor intrinseco estipulado en el contrato $I(6)$. Es decir $V_N^j = I(S_0 u^{N-j} d^j)$ donde V_N^j denota al valor del producto derivado al tiempo N y en el estado (nodo) j con $j = 0, 1, ...N+1$.

Podemos de manera recursiva obtener el valor del producto derivado para todos los tiempos intermedios:

$$V_i^j$$

para $i = 0, 1, ..., N, \ j = 0, 1, ..., i$

Por ejemplo: el valor del derivado en un nodo j al tiempo $N-1$ estara dado por el valor esperado descontado un periodo de los posibles dos valores al tiempo N (dos valores que se desprenden del nodo j):

$$V_{N-1}^j = \frac{1}{1+r}[PuV_N^j + PdV_N^{j-1}]$$

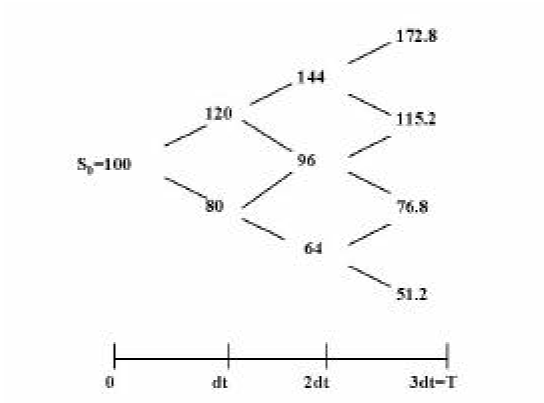
donde Pu y Pd son las probabilidades libres de riesgo y r es la tasa de interes nbo anualizada correspondeinete a un periodo de tamaño $¢t$. En general para un nodo cualquiera

$$V_i^j = \frac{1}{1+r}[PuV_{i+1}^j + PdV_{i+1}^{j-1}]$$

La logica de esta ultima formula es que si bien el contrato venze al tiempo final N, podemos valuar como el valor esperado del derivado en un tiempo inmediato $¢t$ porque es lo que obtendriamos en el mercadoi secundario si vendiesemos el producto derivado al tiempo $i+1$ en cualquiera de los dos posibles nodos.

EJEMPLO: Encontrar el valor de un Call con $S_0 = 100, K = 100, T = 1, r = 0, u = 1.2, d = 0.8$, $N = 3$

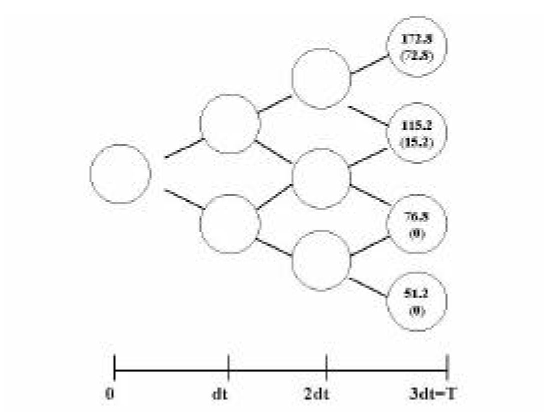
En este caso los valores que puede tomar la accion en los distintos nodos estan dados por:



Las probabilidades libres de riesgo estan dadas por:

$$\begin{aligned} Pu &= \frac{1 + r - d}{u - d} \\ &= \frac{1 - 0.8}{1.2 - 0.8} \\ &= 1/2 \\ Pd &= 1/2 \end{aligned}$$

Esto facilitara los calculos en nuestro arbol. Los valores en V_3^j de la opcion call en los nodo finales se ponen entre parentesis en la siguiente grafica



Trabajar la grafica hacia atras siginifa encontrar los valores del derivado progresivamente como valor esperado traido a valor presente asi:

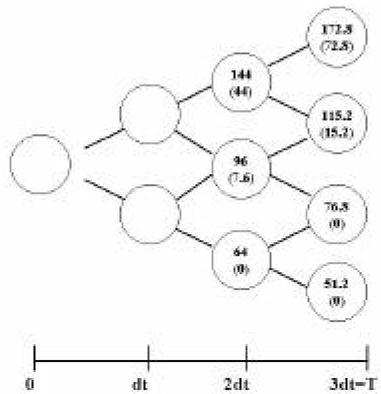
$$\begin{aligned} V_2^0 &= \frac{1}{1 + r}[PuV_2^0 + PdV_3^1] \\ &= 1/2[72.8 + 15.2] \\ &= 44 \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned} V_2^1 &= \frac{1}{1 + r}[PuV_2^1 + PdV_3^2] \\ &= 1/2[15.2 + 0] \\ &= 7.6 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V_2^2 &= \frac{1}{1+r}[PuV_2^2 + PdV_3^3] \\ &= 1/2[0+0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

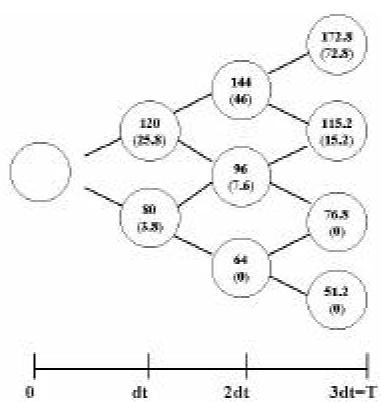


De igual modo obtenemos los valores

$$\begin{aligned} V_1^0 &= \frac{1}{1+r}[PuV_2^0 + PdV_2^1] \\ &= 1/2[44+7.6] \\ &= 25.8 \end{aligned}$$

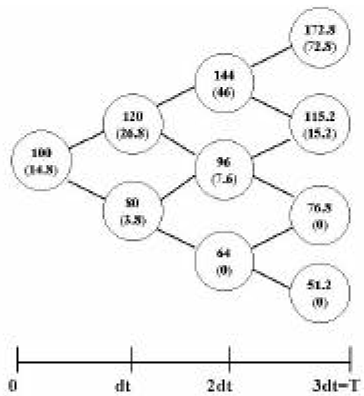
y

$$\begin{aligned} V_1^1 &= \frac{1}{1+r}[PuV_2^1 + PdV_2^2] \\ &= 1/2[7.6+0] \\ &= 3.8 \end{aligned}$$



y finalmente

$$\begin{aligned} V_0^0 &= \frac{1}{1+r}[PuV_1^0 + PdV_1^1] \\ &= 1/2[25.8+3.8] \\ &= 14.8 \end{aligned}$$



Es decir el valor de la opcion Call bajo esos parametros es de $14.8

Otra manera de hacerlo, alternativa a trabajar el arbol de adelante hacia atras, es:

2. **Calculando las probabilidades finales** y obteniendo el valor presente del valor esperado de los flujos finales de acuerdo a estas probabilidades.

Al tiempo final $T = N$¢t nuestro arbol binomial tendra $N + 1$ nodos:

$$\begin{bmatrix} S_0 u^N \\ S_0 u^{N-1} d \\ S_0 u^{N-2} d^2 \\ - \\ S_0 u^2 d^{N-2} \\ S_0 u d^{N-1} \\ S_0 d^N \end{bmatrix}$$

si las probabilidades de terminar en cada uuno de estos nodos estan dadas por

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ - \\ P_{N-2} \\ P_{N-1} \\ P_N \end{bmatrix}$$

Proponemos como alternativa, calcular el valor de un derivado generico con pago final I(F) como:

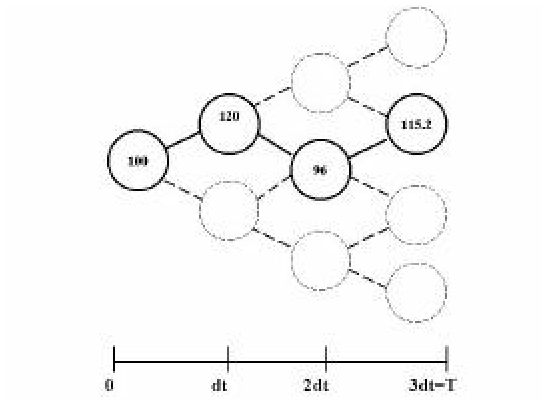
$$V_0^0 = \left[\frac{1}{1+r} \right]^N \sum_{j=0}^{N} PjI(S_0 u^{N-j} d^j)$$

donde $I(S_0 u^{N-j} d^j)$ es lo que paga el producto derivado si la accion adquiere el valor $S_0 u^{N-j} d^j$ al tiempo final y Pj es la probabilidad de que esto suceda. Para aplicar esta formuila solo basta conocer las probabilidades Pj los demas son parametros dados del modelo o del contrato.

En el ejemplo del arbol binomial anterior tenemos cuatro posibles valores finales para la accion:

$$\begin{bmatrix} 172.8 \\ 115.2 \\ 76.8 \\ 51.2 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo: Cual es la probabilidad de llegar al final del periodo y observar el valor 115.2 ?. Observariamos este valor si la accion primero subiera de precio al tiempo 1 (con probabilidad $Pu = 1/2$), luego bajara al tiempo 2 (con probabilidad $Pd = 1/2$) y luego subiera de nuevo al tiempo 3 (con probabilidad $Pu = 1/2$).

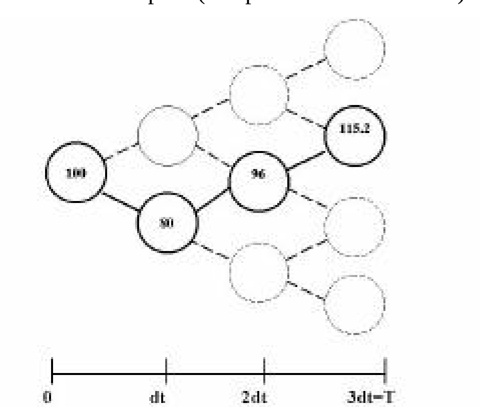


La probabilidad total de que esto suceda es de

$$\begin{aligned} Pu * Pd * Pu &= Pu^2 Pd \\ &= (1/2)^2(1/2) \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

Pero esa no es la unica manera de observar el valor 115.2

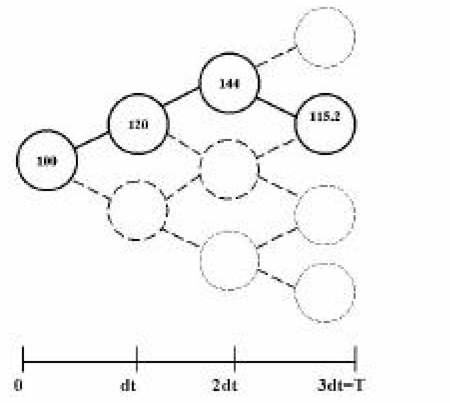
Observariamos este valor si la accion primero baja de precio al tiempo 1 (con probabilidad $Pd = 1/2$), luego sube al tiempo 2 (con probabilidad $Pu = 1/2$) y luego sube de nuevo al tiempo 3 (con probabilidad $Pu = 1/2$).



Este evento tiene probabilidad:

$$\begin{aligned} Pd * Pu * Pu &= Pu^2 Pd \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

La otra alternativa de llegar al precio de 115.2 es que la accion subiera de precio al tiempo 1 (con probabilidad $Pu = 1/2$), luego subiera al tiempo 2 (con probabilidad $Pu = 1/2$) y luego bajara al tiempo 3 (con probabilidad $Pd = 1/2$).



Este evento tiene probabilidad:

$$Pu * Pu * Pd = Pu^2 Pd$$
$$= 1/8$$

La probabilidad total de observar el valor 115.2 esta dada por

$$1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$$

en general la probabilidad Pj de observar un valor $S_0 u^{N-j} d^j$ esta dado por

$$Pj = (Pu)^{N-j}(Pd)^j * (\text{numero de formas de llegar al precio } S_0 u^{N-j} d^j)$$

En este caso

$$\begin{bmatrix} P_0 = 1/8 \\ P_1 = 3/8 \\ P_2 = 3/8 \\ P_3 = 1/8 \end{bmatrix}$$

asi la forma el valor de la opcion call del ejemplo (calculado de esta forma alternativa) es en este caso:

$$V_0^0 = \left[\frac{1}{1+r}\right]^3 \sum_{j=0}^{3} PjI(S_0 u^{3-j} d^j)$$
$$= \left[1/8 * 72.8 + 3/8 * 15.2 + 3/8 * 0 + 1/8 * 0\right]$$
$$= 14.8$$

La formual general para valuar un derivado de esta forma esta dada entonces por:

$$V_0^0 = \left[\frac{1}{1+r}\right]^N \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} (Pu)^{N-j} (Pd)^j I(S_0 u^{3-j} d^j)$$

donde $\binom{N}{j}$ denota el numero de combinaciones de N objetos en j casillas y

$$\binom{N}{j} = \frac{N!}{(N-j)!(j)!}$$

pues el numero de formas de llegar al precio $S_0 u^{N-j} d^j$ es precisamente el numero formas en que podemos escoger los j tiempos intermedios en que la accion baja (los $N-j$ tiempos intermedios restantes la accion subira). De cualquier modo debemos subir $N-j$ veces y bajar j veces para llegar a ese precio pero lo podemos hacer en tiempos distintos dando lugar a caminos distintos. En este caso los tiempos son las N casillas y debemos escoger j de ellas para determinar los tiempos en que la accion baja.

Estrategia de Cobertura Dinamica.

Al encontrara el valor de un producto derivado sobre el arbol binomianl trabajando de ”adelante hacia atras” no solo encontramos el valor de cualquier producto derivado al tiempo $t = 0$, el cual denotamos V_0^0. Tambien encontramos todos los valores intermedios del producto derivado (para cualquier tiempo intermedio y cualquier estado posible):

$$V_i^j = \text{ valor del derivado al tiempo} i \text{ en el estado} j$$

Es decir cuando la accion S toma el valor $S_0 u^{i-j} d^j$ con $i = 0,1,2,...,N$ y $j = 0,1,2,...,i$

El valor V_i^j es lo que nos pagaria en el mercado secundario una tercera parte por adquirir el contrato. Si bien el contrato solo puede ejercerse al final del periodo simempre podemos liquidar nuestra posicion cediendo los derechos del contrato a una tercera parte (venta en el mercado secundario).

El que escribe el contrato incurre en un riesgo pues el pago final que se hara al tenedor del contrato es contingente sobre el valor del activo subyaciente al final del contrato. Quien escribe una opcion Call corre el reiesgo de perder grandes cantidades de dinero si la accion sube de manera desproporcionada.

El que escribe la opcion puede eliminar este riesgo con lo que se conoce como una estrategia de cobertura dinamica, la cual esta basada en el concepto de replicacion de portafolios. En un nodo cualquiera podemos construir un portafolio replicante. Es decir, que replique el valor en el mercado secundario del producto derivado en cualquiera de los dos nodos que se desprenden del nodo original.

En particular si nos encontramos al tiempo i en el estado j es decir en el nodo donde:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Valor del subyaciente} & \text{Valor del derivado} \\ & \boxed{S_{i+1}^j = S_0 u^{i-j+1} d^j} & \boxed{V_{i+1}^j} \\ \boxed{S_i^j = S_0 u^{i-j} d^j} & & \\ & \boxed{S_{i+1}^{j+1} = S_0 u^{i-j} d^{j+1}} & \boxed{V_{i+1}^{j+1}} \end{array}$$

podemos construir un portafolio replicante si encontramos θ_i^1 y θ_i^2 tales que

$$\theta_i^1(1+r) + \theta_i^2 S_{i+i}^j = V_{i+i}^j$$
$$\theta_i^1(1+r) + \theta_i^2 S_{i+i}^{j+1} = V_{i+i}^{j+1}$$

Al resolver las ecuaciones encontramos que la cantidad que debemos tener en nuestro portafolio del subyaciente (en numero de acciones) y de dinero en el banco.

$$\theta_i^2 = \frac{V_{i+i}^{j+1} - V_{i+i}^j}{S_{i+i}^{j+1} - S_{i+i}^j}$$

Si bien podemos facilmente despejar el valor de θ_i^1 es mas convenente expresar su valor en terminaos del valor del producto derivado en el nodo original, es decir, en terminos de V_i^j. Sabemos por no arbitraje que si el portafolio replica al producto derivado, entonces tanto el producto derivado como el portafolio valen lo mismo, por lo tanto tenemos que

$$V_i^j = \theta_i^1 + \theta_i^2 S_i^j$$

Por lo tanto las ecucaciones que definen al portafoilio replicante en ese nodo estan dadas por:

$$\theta_i^2 = \frac{V_{i+i}^{j+1} - V_{i+i}^j}{S_{i+i}^{j+1} - S_{i+i}^j}$$
$$\theta_i^1 = V_i^j - \theta_i^2 S_i^j$$

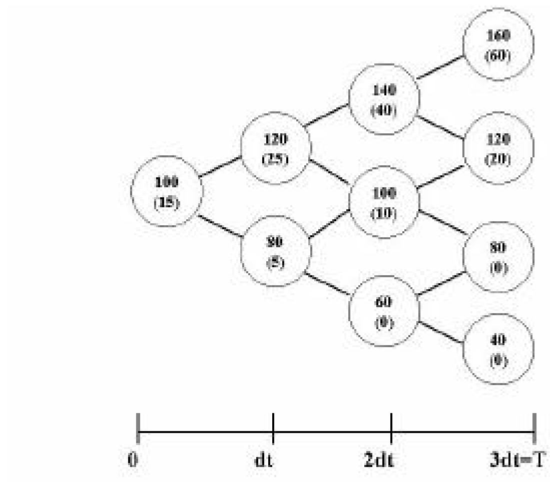
Algunas observaciones al respecto:

1. Esta estrategia se denomina dinamica porque las cantidades que se deben tener de dinero en el banco y que se deben tener de acciones varian conforme vamos recorriendo el arbol, es decir, conforme el tiempo avanza y nos posicionamos en diferentes niveles para el precio de la accion (diferentes nodos. Es por eso que etiquetamos a los valores θ_i con el subindice i). Esto se denomina rebalancear el portafolio.
2. El rebalancear el portafolio de este modo asegura que con una inversion inicial de V_0^0 podemos replicar dinamicamente el valor del derivado y al final del periodo tener la misma ganancia que obtendra la parte larga del contrato (asegurando asi el pago de las obligaciones de la parte corta).
3. Este analisis no incluye costos de transaccion. En la practica los costos de transaccion pueden ser importantes y se debera encontrar un equilibrio entre eliminacion de riesgo y disposicion a pagar por ello (a traves de costos de transaccion).
4. El rebalancear el portafolio no implica un costo adicional en ningun tiempo inetermedio i porque en un nodo cualquiera construimos el portafolio de tal manera que pase lo que pase en el futuro inmediato el portafolio valdra lo mismo que el derivado (V_{i+1}). Rebalancear implica construir un portafolio que si bien seguira valiendo V_{i+i} tendra una composicion distinta

de acciones y dinero en el banco. Todo esto es mas sencillo de ver a traves de un ejemplo:

EJEMPLO

Para mantener la simplicidad en los calculos de los portafolios replicantes usaremos un arbol no homogeneo donde las proporciones u, d varian con el tiempo. Sin embargo escogeremos los nodos equidistantes en el sentido de que en un nodo cualquiera, si la accion vale S_i^j al tiempo $i+1$ la accion podra valer $S_{i+1}^j = S_i^j + x$ o bien $S_{i+1}^{j+1} = S_i^j - x$. En el siguiente ejemplo presentamos el valor de la accion en un arbol binomial con $N = 3$ tiempos intermedios. Como de costumbre presentamos entre parentesis el valor en el mercado secundario del producto derivado que estamos valuando (Call europeo con $K = 100$), valores obtenidos trabando el arbol binomial de "adelante hacia atras":



En particular, si consideramos una tasa de interes de $r = 0$ para simplificar los calculos, las probabilidades libres de riesgo valdran ambas 1/2. Efectivamente, si u es la proporcion en que la accion sube tenemos que, estando en un nodo cualquiera i,j (tiempo i estado j):

$$S_{i+1}^j = S_i^j u$$

$$u = \frac{S_{i+1}^j}{S_i^j}$$

$$u = \frac{S_i^j + x}{S_i^j}$$

De manera similar:

$$S_{i+1}^{j+1} = S_i^j d$$

$$d = \frac{S_{i+1}^{j+1}}{S_i^j}$$

$$d = \frac{S_i^j - x}{S_i^j}$$

por la tanto la probabilidad libre de riesgo de que la accion suba si nos encontramos en el nodo i,j es:

$$Pu = \frac{1 + r - d}{u - d}$$

$$Pu = \frac{1 - \frac{S_i^j - x}{S_i^j}}{\frac{S_i^j + x}{S_i^j} - \frac{S_i^j - x}{S_i^j}}$$

$$Pu = \frac{S_i^j - (S_i^j - x)}{S_i^j + x - (S_i^j - x)}$$

$$Pu = \frac{x}{2x} = 1/2$$

Al tiempo final (3) es irrelevante definir un portafolio replicante pues el producto derivado madura y ya no hay producto por replicar en un tiempo mas adelante. Las cantidades de dinero invertido en el banco y el numero de acciones que contiene el portafolio replicante en cada uno de los nodos en los tiempos 0,1 y 2 estan dados por:

$$\theta_2^2 = \frac{60-20}{160-120} = 1$$
$$\theta_2^1 = 40 - 140 = -100$$

½

tiempo2 nodo 0

$$\theta_1^2 = \frac{40-10}{140-100} = \frac{3}{4}$$
$$\theta_1^1 = 25 - \frac{3}{2}120 = -65$$

½ tiempo1 nodo 0 ¾

$$\theta_0^2 = \frac{25-5}{120-80} = \frac{1}{2}$$
$$\theta_0^1 = 15 - \frac{1}{2}100 = -35$$

$$\theta_2^2 = \frac{20-0}{120-80} = \frac{1}{2}$$
$$\theta_2^1 = 10 - \frac{1}{2}100 = -40$$

tiempo0 nodo 0 ¾ ½ tiempo2 nodo 1

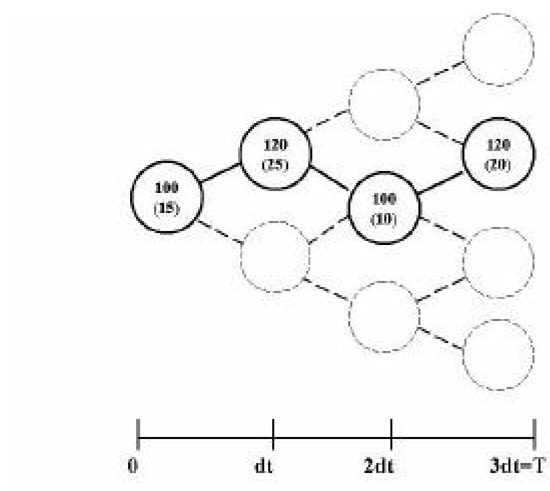
$$\theta_1^2 = \frac{10-0}{100-60} = \frac{1}{4}$$
$$\theta_1^1 = 5 - \frac{1}{4}80 = -15$$

tiempo1 nodo 1 ¾

$$\theta_2^2 = \frac{0}{100-60} = 0$$
$$\theta_2^1 = 0 - 0 = 0$$

tiempo2 nodo 2

Una vez que hemos establecido el portafolio replicante en cada uno de los nodos, la estrategia dinamica de cobertura dependera del ”camino” que efectivamente se recorra sobre el arbol. Por ejemplo, supongamos que del tiempo t al tiempo T se observo el siguiente comportamiento del precio de la accion:



Es decir al tiempo cero la accion vale \$100 el tiempo uno la accion sube de precio y adquiere el valor de \$120 al tiempo 2 la accion baje de precio y vuelve a tomar el valor de \$100 y al tiempo 3 sube de precio para tomar el valor final de \$120.

En este caso nuestra estrategia de cobertura dinamica, desde el punto de vista del que escribe la opcion y quiere cubrir el riesgo asociado es:

1. Al tiempo cero vendo la opcion en $15 (precio justo de no arbitraje) con ello construyo un portafolio de cobertura:
    a. Compro 1/2 accion por $50
    b. Para completar dicha compra pido prestado al banco $35 adicionales
2. Al tiempo uno debo rebalancear mi portafolio:
    a. Ahora al tiempo uno debo tener 3/4 de accion por lo que debo adquirir 1/4 mas por un costo adicional de $30 (la accion al tiempo uno vale $120)
    b. Para hacerlo pido esa cantidad adicional ($30) al banco
    c. Ahora mi portafolio es de 3/4 de acciones (numero de acciones) y una deuda de $65 en el banco
3. Al tiempo dos debo rebalancear mi portafolio nuevamente:
    a. Ahora al tiempo dos debo tener 1/2 de acciones por lo que debo vender 1/4 de accion obteniendo una ganancia de $25 (la accion al tiempo uno vale $100)
    b. Con mi ganancia en la venta de la accion pago $25 ahora mi deuda al banco es de $40
4. Al tiempo final, si nuestro portafolio es de alguna manera replicante nuestro portafolio debe valer lo mismo que el flujo que debemos pagar a la parte larga del contrato Call. Efectivamente como la accion subio y al tiempo final vale $120 mi portafolio vale:
    a. 1/2 de acciones con valor de $60
    b. Una deuda en el banco de $40
    c. Valor final del portafolio $20. Lo mismo que el valor intrinseco de la opcion Call con $K = 100$.Cantidad que debemos pagar a la parte larga del contrato

El lector podra verificar que el resultado de esta estrategia (eliminacion del riesgo asociado al pago contingente a la parte larga del contrato) es independiente del ”camino” que observemos en el arbol. Obviamente debemos esperar a ver que estado de la naturaleza observamos en cada periodo para saber como debemos rebalancear el portafolio.