CLASE9. Calibracion de la volatilidad.

El modelo Binomial: una caminata aleatoria exponencial.

En el modelo Binomial pasamos del tiempo 0 al tiempo $1 = \Delta t$ con un choque aleatorio:

$$S_1 = S_0 H_0$$

donde H_0 tiene una distribucion discreta con dos posibles estados

$$H_0 = \begin{cases} u & \text{con probabilidad } Pu \\ d & \text{con probabilidad } Pd \end{cases}$$

De igual modo

$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 H_1 \\ &= S_0 H_0 H_1 \end{aligned}$$

donde H_0 y H_1 son independientes e identicamente distribuidas. En general

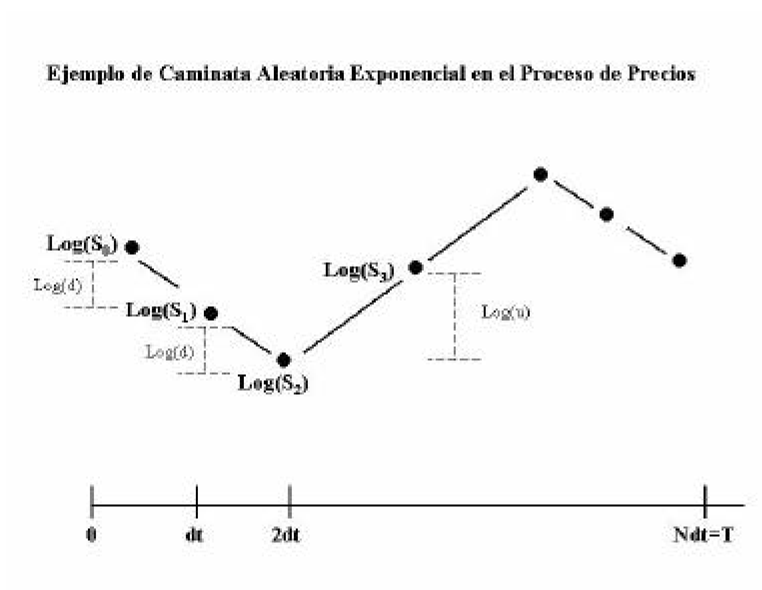
$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} H_{n-1} \\ &= S_{n-2} H_{n-2} H_{n-1} \\ &= S_0 H_0 H_1 \cdots H_{n-2} H_{n-1} \end{aligned}$$

donde $H_0, H_1, H_2, ..., H_{n-2}, H_{n-1}$ son independientes e identicamente distribuidas.

A pesar de la simplicidad del modelo este no es tan simple como quisieramos para hacer calculos relacionados con la varianza. Sin embargo el logaritmo del proceso de precios $\{S_0, S_1, S_2, ..., S_{n-2}, S_{n-1}\}$ asociado al arbol binomial resulta ser el modelo mas simple y que resultara mas conveniente.

En particular el logaritmo de este proceso realiza uuna caminata aleatoria con choques asimetricos donde el proceso puede subir $log(u)$ o bajar $log(d)$:

$$\begin{aligned} \log(S_n) &= \log(S_0 H_0 H_1 \cdots H_{n-2} H_{n-1}) \\ &= \log(S_0) + \log(H_0) + \log(H_1) + \cdots + \log(H_{n-2}) + \log(H_{n-1}) \\ &= \log(S_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \log(H_i) \end{aligned}$$



Calibracion de la volatilidad (varianza) de un arbol binomial

En el arbol binomial en realidad tenemos cuatro parametros libres Pu, Pd, u, d. Tanto la tasas} de interes r como el tiempo final T son depedientes del problema especifico que manejemos y los podemos pensar como dados. Por supuesto N (el numero de etapas intermedias del arbol) es un parametro pero este lo escogeremos por argumentos de convergencia: N lo suficientemente grande para garantizar que una N mayor no resulta en un cambio significativo en el precio de la opcion que estemos valuemos.

Asi pues postulamos que una manera sensata de escoger u, d, Pu, Pd es pedir un modelo libre de riesgo cuya varianza sea consistente con la varianza observada por la accion (o activo) que estemos modelando.

¿ Porque ?

La varianza del arbol esta asociada con la apertura de las ramas del arbol, es decir con que tan dispersas estan las ramas y por consiguientes los nodos del arbol. Al pedir que esta dispersion sea consistente con la varianza observada del activo que estamos modelando aseguramos que la dispersion de nodos al tiempo $T = N\Delta t$ es similar a la dispersion del activo que modelamos.

En la practica esto quiere decir que poblamos el tiempo T en nuestro modelo con suficientes nodos para representar un numero de valores del activo al tiempo T lo suficientemente rico.

Por supuesto si esta varianza es o no adecuada es una pregunta dificil de contestar. Despues de todo solo tenemos una obervacion del activo al tiempo T. Sin embargo la cuestion de que tan "ancho" debe ser el arbol queda determinada de manera univoca con este planteamiento.

Sin embargo el calculo de la varianza del proceso original S_n no es trivial pues se trata de una caminata aleatoria exponencial. Sin embargo el calcular la varianza del proceso logaritmico de precios es mucho mas sencillo pues este sera una caminata aleatoria estandar.

Asi, nos avocaremos a calcular la varianza del proceso logaritmico para cualquier etapa del arbol. Es decir queremos calcular

$$var(\log(S_n))$$

Efectivamente

$$\begin{aligned}
var(\log(S_n)) &= var(\log(S_0 H_0 H_1 \cdots H_{n-2} H_{n-1})) \\
&= var(\log(S_0) + \log(H_0) + \log(H_1) + \cdots + \log(H_{n-1})) \\
&= var\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \log(H_j)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} var\big[\log(H_j)\big] \\
&= n * var(\log(H_0))
\end{aligned}$$

Con la finalidad de hacer la varianza del arbol y la varianza historica comparable estandarizamos ambas para obtener varianzas anualizadas. En el caso del arbol binomial la varianza anualizada es la que obtendriamos al observar el arbol al tiempo T=1. Mientras que la varianza historica anualizada se obtiene de estimar la varianza de una serie de tiempo historica con datos diarios para posteriormente anualizar la estimacion multiplicando por 252 (dias laborales en un año calendario).

En particular supongamos que tenemos una serie de tiempo historica de $N + 1$ precios

$$\overline{S}_0, \overline{S}_1, \overline{S}_2, ..., \overline{S}_N$$

a partir de esta obtenemos la serie de rendimientos logaritmicos con N elementos

$$\log(\overline{S}_1/\overline{S}_0), \log(\overline{S}_2/\overline{S}_1), ..., \log(\overline{S}_N/\overline{S}_{N-1})$$

calculamos la media de esta segunda serie: $\hat{\mu}$ y la varianza de la misma

$$\hat{\sigma}^2_d = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\Big[\log(\overline{S}_i/\overline{S}_{i-1})\Big]^2 - \hat{\mu}\right)$$

esta sera una varianza diaria para obtener la varianza anual simplemente multiplicamos la varianza diaria por el numero de dias laborales en un año: 252. ¿ Porque ?. Estamos suponiendo que los rendimientos diarios en el precio de las acciones son independientes unnos de otros (supuesto muy fuerte por cierto). Si este es el caso los rendimientos logaritmicos tambien son independientes, asi el rendimiento logaritmico en un año sera

$$
\begin{aligned}
\log(\frac{S_{252}}{S_0}) &= \log(\frac{S_{252}}{S_{251}} * \frac{S_{251}}{S_{250}} * \text{`} * \frac{S_2}{S_1} * \frac{S_1}{S_0}) \\
&= \sum_{i=1}^{252} \Big[\log(\overline{S}_{252-i+1}/\overline{S}_{252-i}) \Big]
\end{aligned}
$$

de este modo la varianza de $\log(\frac{S_{252}}{S_0})$, que por cierto es igual a la varianza de $\log(S_{252})$, sera igual a la varianza de la suma de 252 rendimientos logaritmicos diarios.

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= var\Big[\log(\frac{S_{252}}{S_0}) \Big] = var\big[\log(S_{252})\big] \\
&= \sum_{i=1}^{252} var\Big[\log(\overline{S}_{252-i+1}/\overline{S}_{252-i}) \Big] \\
&= 252 * var\big[\log(S_1/S_0)\big] \\
&= 252 * \hat{\sigma}^2{}_d
\end{aligned}
$$

donde $\log(S_1/S_0)$ es un rendimiento logaritmico diario.

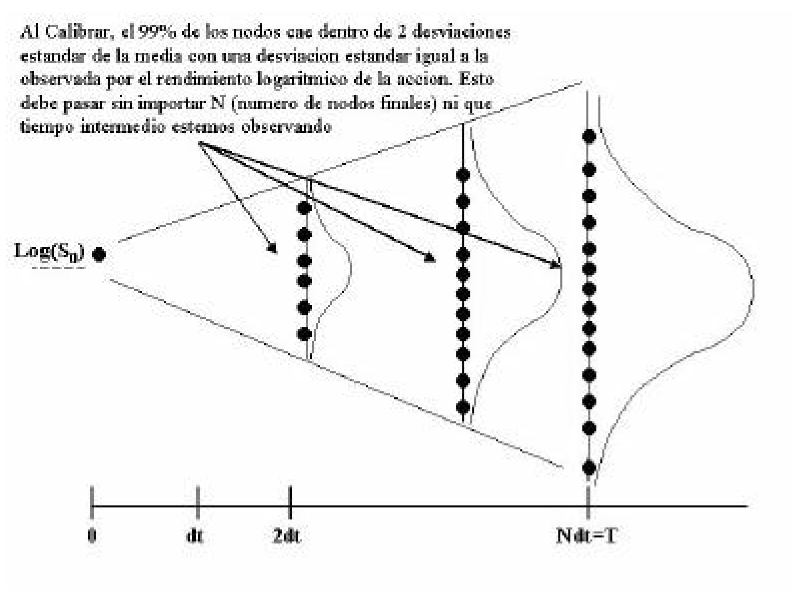
Por otro lado para calcular la varianza anualizada del proceso logaritmico en el arbol binomial simplemente debemos calcular la varianza de un incremento de tamaño $¢t$. Como para llegar a $T = 1$ necesitamos $1/¢t$ pasos de tamaño $¢t$ la varianza anualizada sera igual a la varianza del incremento de tamaño $¢t$. multiplicada por el factor $1/¢t$.

Asi, la varianza de un incremento (del proceso logaritmico) de tamaño $¢t$ esta dada por:

$$
\begin{aligned}
var(H_0) &= \big[\log(u)\big]^2 Pu + \big[\log(d)\big]^2 Pd - (\log(u)Pu + \log(d)Pd)^2 \\
&= \big[\log(u)\big]^2 Pu(1-Pu) + \big[\log(d)\big]^2 Pd(1-Pd) - 2\log(u)\log(d)PuPd \\
&= \big[\log(u)\big]^2 PuPd + \big[\log(d)\big]^2 PdPu - 2\log(u)\log(d)PuPd \\
&= (\log(u) - \log(d))^2 PuPd \\
&= PuPd * \big[\log(u/d)\big]^2
\end{aligned}
$$

Entonces, la varianza anualizada del proceso logaritmico en el arbol binomial esta dad por

$$
\frac{PuPd * \big[\log(u/d)\big]^2}{¢t}
$$



Entonces, calibrar el arbol binomial a la volatilidad del activo que estamos modelando significa reolver para Pu, Pd, u, d:

$$
\begin{cases}
Pu + Pd = 1 \\
uPu + dPd = 1 + r_{dt} \\
PuPd * \left[\log(u/d)\right]^2 = \Delta t\hat{\sigma}^2
\end{cases}
$$

Dado que tenemos tres ecuaciones y cuatro incognitas, es natural esperar que la solucion de este sistema no se auunica pues existe uunn grado de libertad. Para resolver el sistema definamos ρ tal que

$$\frac{u}{d} = \exp(2\rho\sqrt{\Delta t})$$

asi, el sistema de ecuaciones queda:

$$
\begin{cases}
Pu + Pd = 1 \\
uPu + dPd = 1 + r_{dt} \\
PuPd = \frac{\hat{\sigma}^2}{4\rho^2}
\end{cases}
$$

de la primera y la tercera ecuacion tenemos que

$$Pu(1 - Pu) = \frac{\hat{\sigma}^2}{4\rho^2}$$

$$(Pu)^2 - Pu + \frac{\hat{\sigma}^2}{4\rho^2} = 0$$

Aplicando la formula para resolver ecuaciones cuadraticas:

$$Pu = \frac{1}{2}\left(\pm\right)\sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}}$$

Asi, para que las probabilidades sumen uno, tenemos dos opciones

$$
\begin{cases}
Pu = 1/2 + \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}} \\
Pd = 1/2 - \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}}
\end{cases}
$$

$$
\text{o bien}
\begin{cases}
Pu = 1/2 - \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}} \\
Pd = 1/2 + \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}}
\end{cases}
$$

determinando las probabilidades libres de rieasgo en funcion del parametro ρ.
Por supuesto estas soluciones existiran si y solo si el radicando es positivo, es decir:

$$\hat{\sigma}^2 \leq \rho^2$$

Ahora bien, de la segunda ecuacion (del sistema original) tenemos que

$$uPu + dPd = 1 + r_{dt}$$

$$u = (1 + r_{dt} - dPd)/Pu$$

pero de acuerdo con nuestra definicion de ρ, $d = u * exp(-2\rho\sqrt{\Delta t})$, entonces la ecuacion anterior queda

$$u = \left(1 + r_{dt} - \left[u * exp(-2\rho\sqrt{\Delta t})\right]Pd\right)/Pu$$

$$1 + r_{dt} = u(Pu + exp(-2\rho\sqrt{\Delta t}) * Pd)$$

$$u = \frac{1 + r_{dt}}{(Pu + exp(-2\rho\sqrt{\Delta t}) * Pd)}$$

$$u = \frac{exp(\rho\sqrt{\Delta t}) * (1 + r_{dt})}{Pu * exp(\rho\sqrt{\Delta t}) + exp(-\rho\sqrt{\Delta t}) * Pd}$$

determinando la variable u en funcion del parametro ρ y de las probabilidades libres de riesgo, las cuales tambien ya fueron determinadas en funcion del parametro ρ.

De la igualdad $d = u * exp(-2\rho\sqrt{\text{¢}t})$ obtenemos la variable d en funcion del parametro ρ

$$d = \frac{exp(-\rho\sqrt{\text{¢}t}) * (1 + r_{dt})}{Pu * exp(\rho\sqrt{\text{¢}t}) + exp(-\rho\sqrt{\text{¢}t}) * Pd}$$

En resumen, para calibrar el arbol a la volatilidad historica observada, escogemos un parametro ρ mayor o igual que $\hat{\sigma}^2$.

Posteriormente definimos las probabilidades libres de riesgo como

$$\begin{cases} Pu = 1/2 + \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}} \\ Pd = 1/2 - \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}} \end{cases}$$

$$\text{o bien} \begin{cases} Pu = 1/2 - \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}} \\ Pd = 1/2 + \sqrt{1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{\rho^2}} \end{cases}$$

una vez hecho esto determinamos los parametros u, d como:

$$u = \frac{exp(\rho\sqrt{\text{¢}t}) * (1 + r_{dt})}{Pu * exp(\rho\sqrt{\text{¢}t}) + exp(-\rho\sqrt{\text{¢}t}) * Pd}$$

$$d = \frac{exp(-\rho\sqrt{\text{¢}t}) * (1 + r_{dt})}{Pu * exp(\rho\sqrt{\text{¢}t}) + exp(-\rho\sqrt{\text{¢}t}) * Pd}$$

¿ Cual es la diferencia de tomar distintas ρ´s ?

ρ es una medida de la asimetria de la caminata aleatoria en el proceso logaritmico mientras mas grande sea ρ, mas grande sera la diferencia entre los incrementos hacia arriba y hacia abajo:

$$\log(u) - \log(d) = c * \rho$$

para alguna constante c.

Una mayor o menor asimetria no afecta la media ni la varianza del arbol pues estan son controlados por las probabilidades Pu y Pd, que son a su vez funciones de ρ

Notese que la diferencia en el tamaño de los incrementos logaritmicos depende del tamaño de los pasos intermedios en el arbol binomial:

$$\log(u) - \log(d) = d * \sqrt{\text{¢}t}$$

lo cual hace sentido, pues al tomar incrementos cada vez mas pequeños en el tiempo debemos tambien tomar incrementos cada vez mas pequeños en los saltos $\log(u), \log(d)$.

Ademas la escala en que hacemos esto no es lineal. Si el incremento en el tiempo disminuye linealmente, el incremento en el espacio (saltos $\log(u), \log(d)$) decrece como la raiz cuadrada del incremento en el tiempo. Este es el principio de escala que rigue al movimiento browniano, lo cual no es de sorprenderse pues el movimiento browniano es la version continua de una caminata aleatoria.