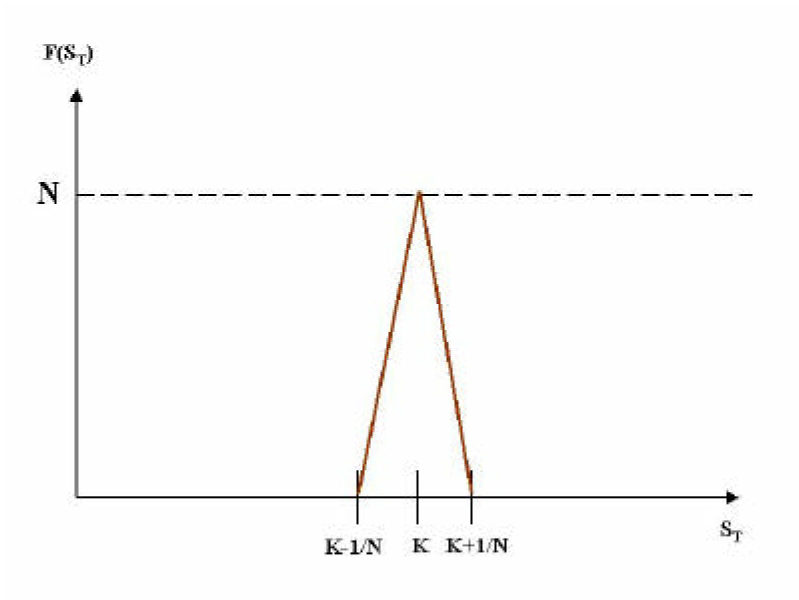
Matematicas Aplicadas a la Teoria de Finanzas I 2001-2002
EXAMEN I. Prof. Gabriel Gomez. 25/ Octubre/ 2002

1. **Arrow Debrew** (**El Mercado Monopolico que nunca existio**). Supongamos un mercado con un solo activo, la accion A. En este mercado no existe acceso a cuenta en el banco ($N = 1$), la accion A vale hoy \$1 y puede subir de precio al tiempo T y tomar el valor $1 + x$ o bien bajar de perecio y tomar el valor $1 - x$ donde $0 < x < 1$.
   a. Describe la matriz D y el vector P de precios de este mercado
   b. Encuentra el conjunto de pesos de Arrow-Debrew de este mercado.
   c. Supongamos que escribimos un Call sobre esta accion con precio de ejercicio $K = 1 - 2x$. Si este mercado no permite arbitraje, cuales son los valores maximos y minimos que se deben pagar por este Call hoy.
2. **El Forward**. Supongamos un Mercado $M - N$ con un activo riesgoso que hoy vale \$100 y cuenta en el banco que por un pago al tiempo final de \$1 hay que depositar hoy \$0.9. El activo riesgoso puede tomar cualquiera de los 5 valores ente $60, 80, 100, 120, 140$. ($M = 5$). Este es un mercado altamente incompleto sin embargo al menos un producto derivado es siempre replicable: **El Forward**.
   a. Encuentra a traves de un sistema de ecuaciones lineales un portafolio replicante para el forward con precio de ejercicio K
   b. Dado que el forward tiene un portafolio replicante su precio hoy esta univocamente determinado. Cual es el valor del forward hoy ? o lo que es lo mismo, Cuanto vale hoy el portafolio replicante ?
3. **Cobertura Dinamica**.
   a. Sea I una opcion de tipo europeo que paga S_T si la accion termina por arriba de \$90 y no paga nada si termina por debajo.
   b. Encuentra el valor en cada nodo de esta opcion y los tres portafolios de cobertura dinamica sobre un arbol binomial con las siguientes cracteristicas:
      ¾ $S_0 = 100$
      ¾ $N = 2$ (solo son tres portafolios, pues al tiempo final no hay portafolio de cobertura)
      ¾ $T = 1$
      ¾ $r = 0$
      ¾ $u = 1.2$
      ¾ $d = 0.8$
      ¾ $Pu = 0.5$
   c. Describe las caracteristicas de estos portafolio en particular de la cantidad de acciones en ellos.
4. **Butterfly Spread** (**una aproximacion a la convexidad de la Opcion Call**)
   a. El precio de una opcion Call Europea depende obviamente del Precio de Ejercicio K. Es decir el precio de un Call es funcion del Precio de Ejercicio:

$$C = C(K)$$

      a partir de la grafica del valor intrinseco del Call, cual es tu intuicion acerca de cual deberia ser el valor del Call cuando K tiende a infinito ($C(\infty)$) y cual deberia ser el valor del Call cuando K tiende a cero ($C(0)$) ?
   b. Sea K un numero cualquiera con $K > 0$, y Sea N un numero entero.Construye un portafolio de Opciones de Tipo Call Europeo (pueden ser opciones con distintos precios de ejercicio) tales que el pago final al inversionista este descrito por la siguiente grafica:



(Este portafolio con tal esquema final de pago se conoce como Butterfly Spread ”normalizado”)

c. Cual es el area bajo la curva de esta funcion $F(S_T)$?

d. **CREDITO EXTRA** !!! (**VALE UN PUNTO APLICABLE A CALQUIER EXAMEN/ TRABAJO**):

Demuestra que el valor de este portafolio es una aproximacion a la segunda derivada del precio del Call con respecto al precio de ejercicio. Es decir:

$$\text{Precio hoy del Butterfly Spread Normalizado} \sim \left.\frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2}\right|_K$$

Hint: una aproximacion a la primera derivada del Call con respecto al precio de ejercicio esta dada por:

$$\left.\frac{\partial C(K)}{\partial K}\right|_{K-1/N} \sim \frac{C(K) - C(K-1/N)}{1/N}$$