Matematicas Aplicadas a la Teoria de Finanzas I 2002
TEORIA DE MEDIA-VARIANZA. GUIA EXAMEN II. Prof. Gabriel Gomez

1. Supongamos que tenemos como datos la desviacion estandar $\sigma_i = E\left[\left(r_i - \overline{r}_i\right)^2 \right]^{1/2}$ y el precio hoy de una accion: S_t^i. Calcula la desviacion estandar del precio del activo al tiempo final (denotada por σ_i^P) en terminos de σ_i y S_t^i. Recuerda que el rendimiento esta dado por
$$r_i = \frac{S_T^i}{S_t^i} - 1$$
Hint: De la definicion de desviacion estandar
$$\sigma_i^P = E\left[\left(S_T^i - \overline{S}_T^i \right)^2 \right]^{1/2}$$
2. Supongamos que tenemos como datos la covarianza del rendimiento del activo i con el rendimiento del activo j: $\sigma_{ij} = E\left[\left(r_i - \overline{r}_i\right)\left(r_j - \overline{r}_j\right) \right]$, y las desviaciones estandar σ_i ,σ_j y los precios hoy de los activos: S_t^i, S_t^j. Calcula la correlacion del precio de los activos al tiempo final (denotada por σ_{ij}^P) en terminos de $\sigma_{ij}, \sigma_i, \sigma_j$ y S_t^i, S_t^j.
Hint: De la definicion de correlacion
$$\sigma_{ij}^P = E\left[\left(S_T^i - \overline{S}_T^i \right)\left(S_T^j - \overline{S}_T^j \right) \right]$$
3. Denotemos por $F(K)$ al precio de un forward con precio de ejercicio K que madura al tiempo T. (aqui $F(K)$ es un precio cualquiera, no necesariamente el obtenido por no arbitraje). Demuestra (usando los resultados de los dos ejercicios anteriores) que la correlacion entre el rendimiento del activo subyaciente r_i y el rendimiento obtendido por el forward r_f es igual a uno independeintemente de los valores de K y de $F(K)$.
4. Supongamos un portafolio de inversion con tres activos riesgosos con rendimientos promedio:
$$r_1 = 0.2 \quad r_2 = 0.4 \quad r_3 = 0.6$$
desviacion estandar de los rendimientos dadas por:
$$\sigma_1 = 0.1 \quad \sigma_2 = 0.2 \quad \sigma_3 = 0.3$$
y correlaciones ρ_{ij} del activo i con el j dados por:
$$\rho_{12} = 0.6 \quad \rho_{13} = 0.8 \quad \rho_{23} = 0.4$$
Encuentra:
   - **a**. El portafolio A de varianza minima asociado al rendimiento promedio $\overline{r}_p = 0.3$
   - **b**. El portafolio B de varianza minima asociado al rendimiento promedio $\overline{r}_p = 0.4$
   - **c**. El portafolio C de varianza minima asociado al rendimiento promedio $\overline{r}_p = 0.5$
   - **d**. Verifica que los pesos del portafolio B son el promedio de los pesos de los portafolios A y C
5. En el problema anterior supongamos que solo consideramos portafolios con el activo uno y el activo dos). Entonces:
   - **a**. Encuentra el portafolio P de varianza minima asociado al rendimiento promedio $\overline{r}_p$ donde $\overline{r}_p$ es un parametro libre. Para ello deberas resolver explicitamente usando algebra lineal, las ecuaciones de Lagrange de este problema. Entonces obtendras pesos optimos que se pueden escribir en funcion del parametro libre $\overline{r}_p$
   - **b**. Calcula la varianza de este portafolio optimo (esta sera una funcion cuadratica del parametro libre).
   - **c**. Supongamos que determinamos un umbral de riesgo que deseamos tomar σ^2. Para que valor del parametro $\overline{r}_p$ la varianza del portafolio optimo es igual a σ^2 ? Esto implica resolver la cuadratica igualada a σ^2
   - **d**. Como toda cuadratica, existen dos soluciones. Cual de ellas corresponde al rendimiento del portafolio que maximiza el rendimiento esperado dado el umbral de riesgo σ^2?