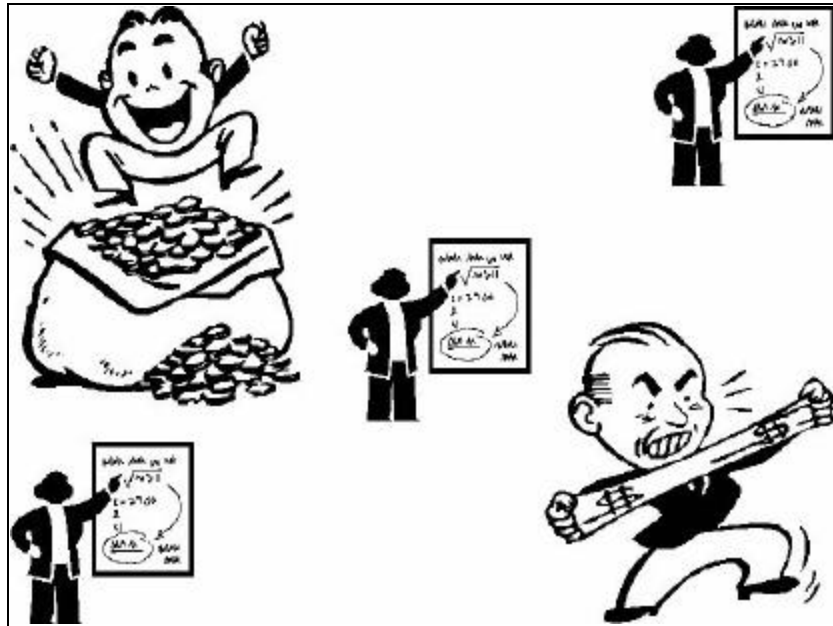


**Instituto Tecnológico Autónomo de México**  
**Matemáticas Aplicadas a la Teoría de Finanzas I**  
**Prof. Gabriel Gomez 2001-2002**

Este curso es una introducción a los métodos matemáticos que con mayor frecuencia son usados en el medio financiero actualmente. El curso se centrará en los dos paradigmas de las finanzas modernas: la Teoría de no Arbitraje (Arbitrage Pricing Theory) y la Teoría de Media-Varianza de Markovitz. Durante el curso aplicaremos esta teoría a los tres mercados mas importantes: El mercado de Productos Derivados, el de Instrumentos de Renta Fija y el de Acciones. A través de proyectos cortos de investigación se buscará someter estas teorías a datos reales para formar una opinión sobre la validez de las mismas.



# Productos Derivados: Una Introducción al APT

## Introducción

De acuerdo con Luenberger una *Inversión* es la disposición de Recursos Actuales con la finalidad de obtener una utilidad o ganancia en el futuro. En este curso nos centraremos en inversiones de tipo financiero.

Una *Inversión Financiera* es aquella inversión relacionada con la actividad que realiza una persona o una empresa para "financiarse", es decir, para hacerse de recursos. Al menos esta es la acepción original de financiamiento pues como veremos más adelante las inversiones financieras han sido sujetas a cierta "enajenación" en los mercados secundarios (Bolsa de valores) pues los participantes de estos ya no tienen por objetivo financiar o ser financiados sino el lucro directo con la apreciación o depreciación de los activos financieros.

Una empresa puede financiarse esencialmente de dos maneras:

1. Pidiendo prestado. (haciéndose de dinero bajo la promesa de regresarlo a un tiempo posterior). El activo financiero más común es el dinero. En principio la transacción debería beneficiar a ambas partes. La empresa se hace de recursos líquidos y el acreedor recibe en el futuro el total del préstamo más un premio (la tasa de interés)
2. Vendiendo un pedazo de la empresa (haciendo participe al acreedor de las utilidades que genere la empresa). Esta transacción también debería beneficiar a ambas partes. De nuevo, la empresa se hace de recursos líquidos y el inversionista (accionista en este caso) espera en un futuro participar de las utilidades que la empresa genere en el futuro a través de:
  - *Dividendos*: repartición equitativa de las utilidades de la empresa (menos lo que la dirección de la empresa decida reinvertir en la misma)
  - La parte correspondiente del valor de la empresa en caso de una posible adquisición por parte de una empresa mayor (*Merger and Acquisitions*)

Nota: La primera vez que se realiza la venta de acciones de una empresa al público en general (es decir que cualquiera puede comprar un pedazo de la empresa) se le denomina IPO (Initial Public Offering). Durante el boom del internet se realizaron muchas de estas transacciones pues empresas formadas por dos o tres jóvenes emprendedores se volvieron atractivas para muchos inversionistas que con la ilusión de obtener una ganancia millonaria con una pequeña inversión, financiaron a estas empresas a través de IPO's

## ¿ Cuanto Vale una acción ?

En principio una acción debería reflejar los futuros flujos de dinero (utilidades) que le empresa es capaz de generar. A mayores futuras utilidades, se le debería asignar un mayor valor al hecho de poseer una acción de la misma. Sin embargo estos flujos son inciertos. Habrá quien tenga distintas opiniones sobre el valor de una acción, si dos opiniones coinciden sería posible (en caso de que ambas partes así lo deseen) realizar una transacción (en el llamado *Mercado Bursatil*) para comprar/vender dicha acción al precio acordado.

El *Mercado Bursatil* fue creado explícitamente para realizar este tipo de transacciones. No es forzoso que estas transacciones se realicen a través del mercado bursatil, pueden también realizarse entre particulares.

Dicho precio lejos de estar fijo cambia a lo largo del tiempo. Es decir que es variable y además de naturaleza aleatoria: su precio en el futuro no está determinado de manera determinística. Es lógico pensar que el precio dependerá de factores sujetos a incertidumbre (el descubrimiento de la cura del SIDA si se trata de una empresa farmacéutica, o el descubrimiento de un nuevo yacimiento para una empresa petrolera ).

Hay quien dice que el compartimiento de estos precios más que aleatorio es incierto. Es decir que ni siquiera sabemos cuál es la ley o modelo probabilístico que rige a los precios en el mercado bursatil. Por ejemplo, los participantes de la bolsa no pugnan con la finalidad de describir una distribución normal.

## Productos Derivados

Otro activo financiero menos obvio, pero sin embargo muy interesante y (al menos en los mercados financieros de mayor tamaño) muy usados son los llamados Productos Derivados.

Un *Producto Derivado* es un activo financiero cuyo flujo final al inversionista depende funcionalmente del precio de otro instrumento financiero, llamado instrumento de referencia.

Esta definición es un tanto vaga y carece de significado a menos que se vea a la luz de algunos ejemplos:

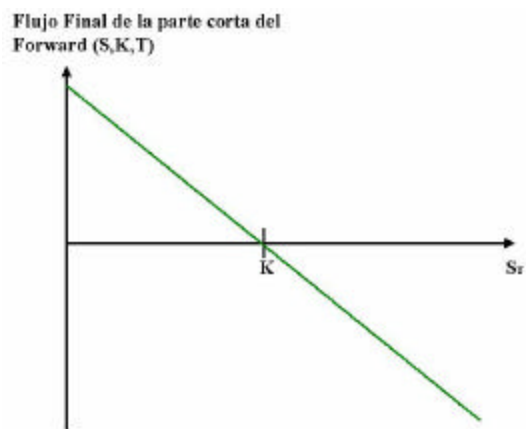
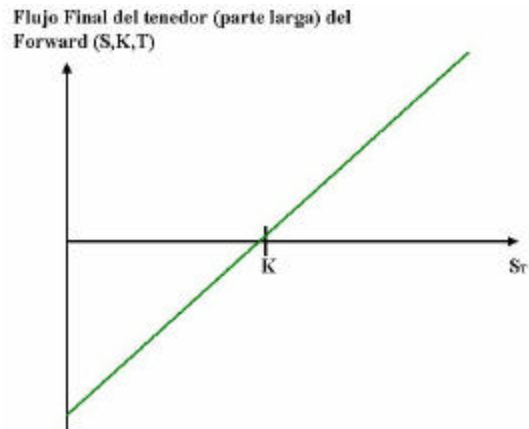
1. *Contrato Forward*: Este, como cualquier contrato, consta de dos participantes o actores denominados *partes*. La denominada parte larga del contrato quien se compromete a comprar de la parte corta un activo (típicamente una acción o una moneda y que actúa como instrumento de referencia) denotado por  $S$ , a una cantidad predeterminada  $K$  al tiempo  $T$ .

Este es un producto derivado porque el flujo final del inversionista depende del valor que tenga la acción  $S$  al tiempo  $T$  denotado  $S_T$ . En particular el flujo final del inversionista está dado por  $(S_T - K)$  para el tenedor del lado largo del contrato y por  $(K - S_T)$  para el tenedor del lado corto del contrato.

Supongamos que al tiempo  $T$  el valor de la acción es mayor que el precio de ejercicio  $S_T > K$ . El tenedor de la parte larga del contrato podrá comprar la acción por  $K$  e inmediatamente ir a la Bolsa Mexicana de Valores para vender la acción que acaba de comprar por  $S_T$  (El precio de mercado de la acción en ese momento) haciéndose de una ganancia instantánea de  $(S_T - K)$ . En este caso la parte corta que vendió la acción por un precio inferior al de mercado registra una pérdida de  $(K - S_T)$ .

De igual modo si al tiempo  $T$  el valor de la acción es menor que el precio de ejercicio  $S_T < K$ . El tenedor de la parte corta puede comprar la acción en el mercado por  $S_T$  y venderla a la parte larga por  $K$  haciéndose de una ganancia instantánea de  $(K - S_T)$ .

La relación funcional que define el flujo final del forward para la parte larga es  $f(x) = (x - K)$



2. *Contrato Call*: La parte larga del contrato (o "tenedor" del contrato) se compromete a comprar de la parte corta (o quien "escribe" el contrato) un activo (típicamente una acción o una moneda y que actúa como instrumento de referencia) denotado por  $S$ , por una cantidad predeterminada  $K$  a un tiempo predeterminado  $T$ .

Este es un producto derivado porque el flujo final del inversionista depende del valor de  $S_T$ . En particular el flujo final del inversionista esta dado por  $\max((S_T - K), 0)$  donde  $\max(a, b)$  es el máximo entre  $a$  y  $b$  mientras que el flujo para el lado corto del contrato es  $-\max((S_T - K), 0)$  para el tenedor del lado corto del contrato.

$\max((S_T - K), 0)$  tambien se denota  $(S_T - K)_+$  y esta es la notación que usaremos.

Supongamos que al tiempo  $T$  el valor de la acción es mayor que el precio de ejercicio  $S_T > K$ . El tenedor de la parte larga del contrato podra comprar la acción por  $K$  e inmediatamente ir a la Bolsa Mexicana de Valores para vender la acción que acaba de comprar por  $S_T$  (El precio de mercado de la acción en ese momento) haciendose de una ganancia instantanea de  $(S_T - K)$ . En este caso la parte corta que vendio la acción por un precio inferior al de mercado registra una pérdida de  $(K - S_T)$

De igual modo si al tiempo  $T$  el valor de la acción es menor que el precio de ejercicio  $S_T < K$ . El tenedor de la parte larga optará por no hacer efectivo el contrato y comprar la acción por  $K$  pues puede comprarla en el mercado por un precio menor.

La relación funcional que define el flujo final del call para la parte larga es  $f(x) = (x - K)_+$

