

Matematicas Aplicadas a la Teoria de Finanzas I  
 Proyecto I. Profesor: Gabriel Gomez  
 Valuacion de No Arbitraje y Arboles Binomiales

1. Mercados Incompletos

- Supongamos un Mercado M-N a un solo periodo con N=3 (activos) M=4 (cuatro estados de la naturaleza)
  - x El activo uno es una cuenta de banco que paga \$1 al final del periodo (T) y cuesta hoy (t) \$1 (, es decir r=0)
  - x El activo dos es una accion con precio hoy (t) de \$1 y que al tiempo T puede tomar el valor de  $d$  o bien el valor de  $u$ , con  $d < 1 < u$
  - x El activo tres es una accion cuyo precio hoy (t) tambien es de \$1 y que al tiempo T puede tomar el valor de  $d$  o bien el valor de  $u$ , con  $d < 1 < u$  (mismos valores  $u, d$  que los que puede tomar el activo dos)
  - x Por simplicidad supongamos que  $u = 1 + x$  y  $d = 1 - x$  para algun numero  $x > 0$ .
  - x Los cuatro estados se caracterizan de la siguiente manera:
    - § ESTADO UNO: Ambas acciones suben
    - § ESTADO DOS: Activo dos sube y el activo tres baja
    - § ESTADO TRES: Activo dos baja y el activo tres sube
    - § ESTADO CUATRO: Ambas acciones bajan

**PREGUNTAS**

- 1.
  - a. Escribe la matriz "D" de valor de los activos en el futuro asociada a este mercado idealizado.
  - b. Existe un unico vector de probabilidades libres de riesgo ? o no es unico ? o no existe ?. Describe (explicitamente) el conjunto de probabilidades libres de riesgo.
  - c. Considera un Call con strike  $K = 1 - x$  escrito sobre el promedio de las acciones riesgosas, es decir con valor intrinseco al vencimiento igual a:

$$\left[ \frac{(S_T^1 + S_T^2)}{2} - K \right]_+$$

donde  $S_T^1$  denota el valor al tiempo  $T$  del activo dos (accion uno) y  $S_T^2$  denota el valor al tiempo  $T$  del activo tres (accion dos). Cuales son los valores maximo y minimo para el precio hoy de esta opcion consistentes con el principio de no arbitraje.

- d. Podemos replicar cualquier producto derivado en este mercado ? Es decir, es este un mercado completo ?
- e. Que productos derivados son replicables ?. En particular, un producto derivado en este mercado queda completamente definido por el pago que se hace al tenedor del contrato en cada uno de los cuatro estados. Esto es, por un vector  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de flujos en cada uno de los estados. Existen condiciones sobre  $x_1, x_2, x_3$  y  $x_4$  para que el producto derivado asociado sea replicable con un portafolio de los tres activos del mercado ?

1. Arbitraje

- Supongamos un Mercado  $M - N$  con dos activos y tres estados con los siguientes vectores de precios hoy ( $t$ ) y posibles precios en el futuro ( $T$ )

$$P = \begin{matrix} \text{activo uno} \\ \text{activo dos} \end{matrix} \begin{bmatrix} 90 \\ 100 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 90 & 110 & 120 \end{bmatrix}$$

**PREGUNTAS**

- 1.
  - a. Encuentra el conjunto de probabilidades libres de riesgo.
  - b. Supongamos que existe en el mercado una Opcion Put con precio de ejercicio  $K = 115$  escrita sobre el segundo activo. Supongamos que la Opcion Put vale \$7. Es posible encontrar una estrategia de arbitraje en este mercado que incluye a la opcion Put ?
  - c. Supongamos que la Opcion Put vale \$3. Es posible encontrar una estrategia de arbitraje en este mercado que incluye a la opcion Put en este caso?

1. Arbol Binomial

- El objetivo es encontrar el valor de 1,000 opciones Put de Tipo Europeo y de la misma cantidad de opciones Put pero de tipo Americano con las siguientes características:
  - x  $K = 110$
  - x  $r_A = 0.05$
  - x  $T = 1$
  - x  $S_0 = 100$

Hint: Para calcular la tasa de interes asociada a un periodo de tamaño ( $\mathbb{C}t$ ), denotada  $r_{dt}$  usa la formula:

$$1 + r_{dt} = (1 + r_A)^{1/n}$$

### PREGUNTAS

- 1. a. **Varianza:** Encuentra probabilidades libres de riesgo  $Pu, Pd$  y parametros  $u, d$  para un arbol binomial consistentes con la volatilidad (varianza) historica de la accion de la serie L de Telmex. Para ello deberas obtener una serie historica de Telmex de un año calendario (del 20 de septiembre del 2001 al 22 de septiembre del 2002 por ejemplo). Con ella calcula la varianza diaria (varianza de la serie de tiempo) y para obtener la varianza anual multiplica la varianza diaria por el numero de observaciones en tu serie de tiempo.
  - Deberas entregar una tabla con los parametros  $Pu, Pd$  y parametros  $u, d$  asi como la varianza historica que estimaste.
- b. **Incremento de tiempo ( $\mathbb{C}t$ ):** Valua la opcion europea usando 4 tiempos intermedios ( es decir tiempos  $t = 0 < 0.25 < 0.5 < 0.75 < 1 = T$ ) en tu arbol binomial. Denotemos al valor obtenido para la opcion por  $V_4$ . Dobra el numero de tiempos intermedios haciendo 8 para obtener un valor del put asociado  $V_8$ . Observa la diferencia en valor absoluto de  $|V_8 - V_4| * 1000$ . Continua doblando el numero de tiempos intermedios hasta que la diferencia  $|V_{2^n} - V_{2^{n-1}}| * 1000$  sea menor a 10. Es decir el error al aproximar el precio de la transaccion de 1000 opciones con un modelo discreto es de menos de \$10.
  - Deberas entregar una tabla con los valores intermedios  $V_{2^n}$
- c. **Opcion Americana:** con los parametros encontrados en los incisos a) y b) (usa el incremento de tiempo que te resultado en una diferencia menor a \$10 en el inciso b)) calcula el valor de la opcion de tipo americano