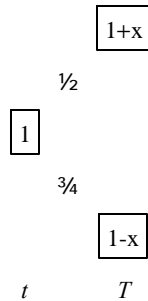


Matemáticas Aplicadas a Teoría de Finanzas I
Solucion Examen I. Otoño 2002
Prof Gabriel Gomez

1. Este es un mercado a un solo periodo del tipo Arrow-Debrew con un solo activo tal que:



a. La matriz D y el vector P son en este caso de tamaño 1×2 y 1×1 respectivamente y estan dados por:

$$P = [1] \\
 D = \left[\begin{array}{cc} (1+x) & (1-x) \end{array} \right]$$

b. El conjunto de pesos de Arrow-Debrew de este mercado esta dado por todos los pesos no negativos π_1, π_2 tales que:

$$1 = (1+x)\pi_1 + (1-x)\pi_2$$

Dejando que π_2 sea un parametro libre tenemos a π_1 en funcion de π_2 :

$$\pi_1 = \frac{1}{(1+x)} - \frac{(1-x)\pi_2}{(1+x)}$$

pedir positividad de ambos pesos implica que el parametro libre este acotado por:

$$0 \leq \pi_2 \leq \frac{1}{1-x}$$

c. El Call con precio de ejercicio $K = 1 - 2x$ tiene un precio hoy igual al promedio ponderado de sus flujos en el futuro usando los pesos de Arrow-Debrew igual a:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi_1(1+x - (1-2x))_+ + \pi_2(1-x - (1-2x))_+ \\
 &= \pi_1(3x) + \pi_2(x) \\
 &= \frac{3x}{(1+x)} - \frac{3x(1-x)\pi_2}{(1+x)} + \pi_2x \\
 &= \pi_2 \left[x - \frac{3x(1-x)}{(1+x)} \right] + \frac{3x}{1+x}
 \end{aligned}$$

Esta es una funcion lineal de π_2 . La funcion sera creciente si tiene pendiente positiva. En ese caso el minimo se alcanza en el extremo inferior del intervalo que acota al parametro π_2 y el maximo en el extremo superior. Si la funcion es decreciente el maximo y el minimo se alcanzan en los extremos opuestos del intervalo. La funcion sera creciente si:

$$\left[x - \frac{3x(1-x)}{(1+x)} \right] > 0 \\
 1+x > 3(1-x) \\
 x > \frac{1}{2}$$

En ese caso

$$\begin{aligned}
 V_- &= \frac{3x}{1+x} && \text{con } \pi_2 = 0 \\
 V^+ &= \frac{x}{1-x} && \text{con } \pi_2 = \frac{1}{1-x}
 \end{aligned}$$

Cuando $x \leq \frac{1}{2}$ los maximos y minimos se alcanzan en:

$$V^+ = \frac{3x}{1+x} \quad \text{con } \pi_2 = 0$$

$$V_- = \frac{x}{1-x} \quad \text{con } \pi_2 = \frac{1}{1-x}$$

2. Este es un mercado incompleto a un solo periodo en el que existen mas estados que activos (tal como es el caso del modelo trinomial). Tenemos un activo riesgoso tal que:

	$\frac{1}{2}$	$\boxed{140}$
	$\frac{1}{2}$	$\boxed{120}$
$\boxed{100}$	\rightarrow	$\boxed{100}$
	$\frac{3}{4}$	$\boxed{80}$
	$\frac{3}{4}$	$\boxed{60}$
t		T

tenemos tambien una cuenta bancaria con una tasa implicita en los pagos iniciales y finales:

$$90(1+r) = 100$$

$$1+r = \frac{9}{10}$$

- a. En este mercado no todos los productos derivados son replicables (por eso se llama mercado incompleto); esto se debe a que un portafolio replicable debe satisfacer de manera simultanea 5 ecuaciones (una por cada estado de la naturaleza) con solo dos grados de libertad (dos incognitas asociadas a las cantidades de dinero en el banco y el numero de acciones en el portafolio). Sin embargo si de estas 5 al menos 3 resultan redundantes podremos determinar el portafolio replicante requerido. En este caso buscamos θ_1 (dinero en el banco) y θ_2 (numero de acciones riesgosas) tales que

$$\text{Valor del portafolio al tiempo } T = \text{Valor del forward al tiempo } T = S_T - K$$

buscamos que esta igualdad se mantenga en cualquiera de los 5 posibles estados de la naturaleza al tiempo T :

$$\theta_1 \left(\frac{10}{9}\right) + \theta_2 * 140 = 140 - K$$

$$\theta_1 \left(\frac{10}{9}\right) + \theta_2 * 120 = 120 - K$$

$$\theta_1 \left(\frac{10}{9}\right) + \theta_2 * 100 = 100 - K$$

$$\theta_1 \left(\frac{10}{9}\right) + \theta_2 * 80 = 80 - K$$

$$\theta_1 \left(\frac{10}{9}\right) + \theta_2 * 60 = 60 - K$$

En notacion de algebra lineal, buscamos resolver el sistema asociado a la siguiente matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10/9 & 60 & 60 - K \\ 10/9 & 80 & 80 - K \\ 10/9 & 100 & 100 - K \\ 10/9 & 120 & 120 - K \\ 10/9 & 140 & 140 - K \end{array} \right]$$

Haciendo operaciones elementales de renglon obtenemos:

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 10/9 & 60 & 60 - K \\ 0 & 20 & 20 \\ 0 & 40 & 40 \\ 0 & 60 & 60 \\ 0 & 80 & 80 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10/9 & 60 & 60 - K \\ 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El hecho de que los últimos tres renglones sean ceros implica que estas ecuaciones eran redundantes. El portafolio replicante se encuentra a partir de las primeras dos como:

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 1 \\ \theta_1 &= \frac{60 - K - 60 * \theta_2}{10/9} \\ &= -\frac{K}{10/9} \end{aligned}$$

- b. El valor hoy del portafolio hoy y por lo tanto el valor del forward esta dado por:

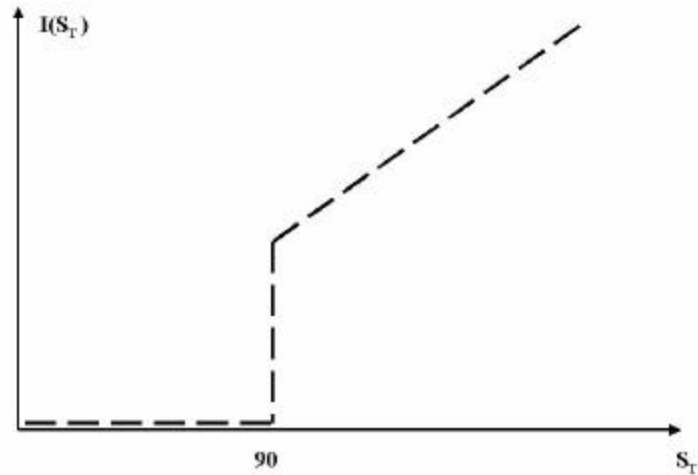
$$\theta_1 + \theta_2 * 100 = 100 - \frac{K}{10/9}$$

Lo cual es consistente con la formula encontrada por argumentos de no arbitraje:

$$F(K) = S_t - \frac{K}{(1+r)}$$

En general, en un mercado con M estados y dos activos incluyendo cuenta en el banco, un portafolio con una accion y un prestamo de $K/(1+r)$ replica al forward.

- a. El producto derivado descrito es una opcion digital que paga S_T si y solo si la accion termina por arriba de \$90. Es decir la funcion que determina el valor intrinseco de este producto es:

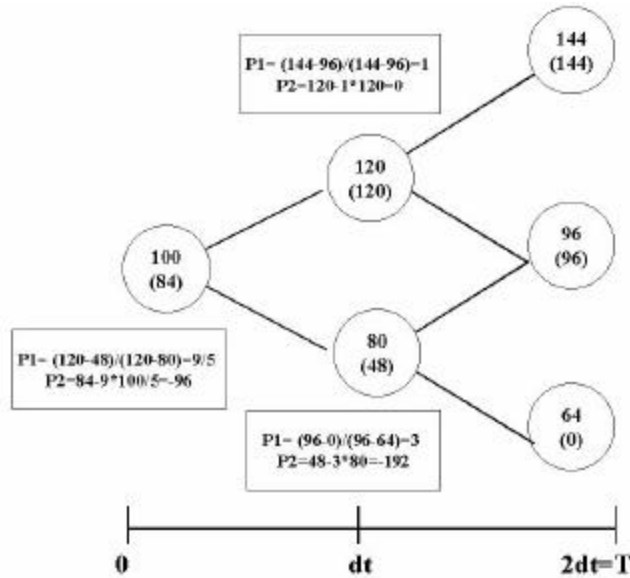


- b. A continuacion se presenta el arbol binomial con dos periodos ($N = 2$) asi como el valor de este producto derivado en cada uno de los nodos y los tres portafolios replicantes. Son tres portafolios pues en el ultimo periodo no hay nada que replicar (la replicacion es un portafolio que replica en el futuro el valor de un derivado, y en el ultimo periodo "ya no hay valor en el futuro" por replicar). La formula para encontrar el portafolio replicante en un nodo i, j es:

$$P1 = \frac{V_{i+1}^j - V_{i+1}^{j+1}}{S_{i+1}^j - S_{i+1}^{j+1}}$$

$$P2 = V_i^j - P1 * S_i^j$$

donde $P1$ es el numero de acciones en el portafolio y $P2$ es dinero en la cuenta de banco:



- c. El numero de acciones en un portafolio replicante es una aproximacion a la primera derivada del valor de la opcion con respecto al precio del subyacente. Dado que este derivado presenta una discontinuidad en el valor intrinseco al tiempo final T cuando $S_T = 90$ la derivada en ese punto se vuelve infinita y los portafolios replicantes cercanos al tiempo final y a ese valor del subyacente tenderan a ser exageradamente grandes en magnitud.
- a. Intuitivamente es claro que el valor de un Call denotado por C dependera del precio de ejercicio que se estipule en el contrato:

$$C = C(K)$$

Por el teorema de Arrow-Debrew sabemos que el precio del Call se puede escribir como:

$$C(K) = \frac{1}{1+r} E[(S_T - K)_+]$$

El valor de $C(0)$ deberia ser entonces

$$\begin{aligned}
 C(0) &= \frac{1}{1+r} E[(S_T)_+] \\
 &= \frac{1}{1+r} E[S_T] \\
 &= S_t
 \end{aligned}$$

la ultima igualdad se sigue por la propiedad de martingala de las acciones. De manera alternativa podemos pensar que el precio justo hoy por un producto que te paga S_T es precisamente el precio actual del activo: S_t (Precio determinado por el mercado, no por argumentos de no-arbitraje)

Por otra parte si interpretamos $C(\infty)$ como el limite conforme K tiende a infinito del precio del Call tenemos que la funcion de pago tiende a la funcion identicamente cero:

$$\begin{aligned}
 (S_T - K)_+ &= \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < K \\ S_T - K & \text{si } S_T > K \end{cases} \\
 \lim_{K \rightarrow \infty} (S_T - K)_+ &= \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < \infty \\ S_T - K & \text{si } S_T > \infty \end{cases} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

la ultima igualdad es cierta porque S_T siempre sera menor que ∞ . Entonces:

$$\begin{aligned}
 C(0) &= \frac{1}{1+r} E[0] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

o intuitivamente, el valor de un producto derivado que paga cero bajo cualquier circunstancia debe de ser cero.

- b. Para reproducir el pago final descrito por un triángulo tal como se describe en la pregunta del examen, es necesario construir un portafolio con una posición larga en un Call con precio de ejercicio $K - 1/N$ una posición corta en dos opciones Call con precio de ejercicio K y una posición larga en una opción Call con precio de ejercicio $K + 1/N$. Para que el triángulo tenga la altura correcta es necesario comprar N^2 veces este portafolio. Así el precio del portafolio requerido hoy es de

$$P = N^2 [C(K - 1/N) - 2C(K) + C(K + 1/N)]$$

Para verificar que este portafolio reproduce el pago final requerido podemos ver que:

$$P(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < 0 \\ N^2 [S_T - (K - 1/N)] & \text{si } K - \frac{1}{N} < S_T < K \\ N^2 [S_T - (K - 1/N) - 2\{S_T - K\}] = N^2 [(K + 1/N) - S_T] & \text{si } K < S_T < K + \frac{1}{N} \\ N^2 [\{S_T - (K - 1/N)\} - 2\{S_T - K\} + \{S_T - (K + 1/N)\}] = 0 & \text{si } S_T > K + \frac{1}{N} \end{cases}$$

que es precisamente la función representada por el triángulo descrito.

- c. Usando la fórmula para el área del triángulo tenemos que el área bajo la curva (es decir la integral de la función de pago final de este portafolio) es:

$$\frac{\text{base} * \text{altura}}{2} = \frac{2/N * N}{2} = 1$$

- d. Dado que una aproximación a la primera derivada de la función $C(K)$ (precio hoy del Call como función del precio de ejercicio) en el punto $K - 1/N$ está dado por su diferencia finita de tamaño $1/N$:

$$\left. \frac{\partial C(K)}{\partial K} \right|_{K-1/N} = \frac{C(K) - C(K - 1/N)}{1/N}$$

y una aproximación a la primera derivada en el punto K está dado por:

$$\left. \frac{\partial C(K)}{\partial K} \right|_K = \frac{C(K + 1/N) - C(K)}{1/N}$$

Tenemos que una aproximación a la segunda derivada se obtiene a partir de una diferencia finita de las aproximaciones de la primera derivada. (la segunda derivada es la derivada de la derivada) así:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2} \right|_{K-1/N} &= \frac{\frac{C(K+1/N)-C(K)}{1/N} - \frac{C(K)-C(K-1/N)}{1/N}}{1/N} \\ &= N^2 * [\{C(K + 1/N) - C(K)\} - \{C(K) - C(K - 1/N)\}] \\ &= N^2 * [C(K - 1/N) - 2C(K) + C(K + 1/N)] \end{aligned}$$

que es precisamente el valor del portafolio que habíamos encontrado en el inciso b)