

## PREGUNTA1 (Mercados Incompletos)

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1+x) & (1+x) & (1-x) & (1-x) \\ (1+x) & (1-x) & (1+x) & (1-x) \end{bmatrix}$$

b) Por el Teorema de Arrow Debreu las probabilidades libres de riesgo se obtienen normalizando el vector de pesos positivos  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$  tal que:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1+x) & (1+x) & (1-x) & (1-x) \\ (1+x) & (1-x) & (1+x) & (1-x) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{bmatrix}$$

Encontramos tales vectores  $\Pi$  resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1+x) & (1+x) & (1-x) & (1-x) & 1 \\ (1+x) & (1-x) & (1+x) & (1-x) & 1 \end{array} \right]$$

haciendo eliminación de gauss en este sistema con operaciones elementales obtenemos:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1+x) & (1+x) & (1-x) & (1-x) & 1 \\ (1+x) & (1-x) & (1+x) & (1-x) & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2x & -2x & -x \\ 0 & -2x & 0 & -2x & -x \end{array} \right]$$

$$\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{array} \right]$$

con lo cual obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_4 \\ \pi_2 &= 1/2 - \pi_4 \\ \pi_3 &= 1/2 - \pi_4 \end{aligned}$$

En este caso los pesos normalizados (las probabilidades) son iguales a los pesos sin normalizar pues en este caso tenemos por la primera ecuación que:

$$\sum_{i=1}^4 \pi_i = 1$$

pedir positividad de las probabilidades implica en este caso que el parametro libre  $\pi_4$  debe estar acotado por

$$0 \leq \pi_4 \leq 1/2$$

c) Maximo y Minimo para el Call escrito sobre el promedio aritmetico de las dos acciones con precio de ejercicio  $1-x$ : Si valuamos el producto derivado como valor esperado descontado con probabilidades libres de riesgo obtenemos

$$\begin{aligned} V_C &= 2x * \pi_1 + x * \pi_2 + x * \pi_3 + 0 * \pi_4 \\ &= 2x * \pi_4 + 2x * (1/2 - \pi_4) \\ &= x \end{aligned}$$

es decir el valor del Call no depende del parametro libre  $\pi_4$  por lo tanto el valor minimo y maximo coinciden (pues hay un valor unico) y en ambos casos es igual a  $x$

d,e) Un producto derivado queda completamente determinado en este mercado por los flujos que paga en cada uno de los cuatro estados, digamos  $x_1, x_2, x_3, x_4$  en los estados 1,2,3,4 respectivamente. Un portafolio replicante de un producto derivado

de este tipo se obtiene con posiciones  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  en cuenta en el banco, accion 1, accion2 tales que

$$\begin{bmatrix} \theta_1(1+r) + \theta_2(1+x) + \theta_3(1+x) = x_1 \\ \theta_1(1+r) + \theta_2(1+x) + \theta_3(1-x) = x_2 \\ \theta_1(1+r) + \theta_2(1-x) + \theta_3(1+x) = x_3 \\ \theta_1(1+r) + \theta_2(1-x) + \theta_3(1-x) = x_4 \end{bmatrix}$$

Es decir que en cada uno de los estados de la naturaleza el valor del portafolio sea igual al flujo generado por el derivado. Este es un sistema de ecuaciones lineales que en general no tiene solucion pues tenemos mas ecuaciones que incognitas. Sin embargo si alguna de las ecuaciones es redundante, el sistema si podra resolverse pues nos quedaria un sistema de 3x3; este sera el caso dependiendo del producto derivado.

Resolviendo el sistema con operaciones elementales de renglon:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} (1+r) & (1+x) & (1+x) & x_1 \\ (1+r) & (1+x) & (1-x) & x_2 \\ (1+r) & (1-x) & (1+x) & x_3 \\ (1+r) & (1-x) & (1-x) & x_4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} (1+r) & (1+x) & (1+x) & x_1 \\ 0 & 0 & -2x & x_2 - x_1 \\ 0 & -2x & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & -2x & -2x & x_4 - x_1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} (1+r) & (1+x) & (1+x) & x_1 \\ 0 & -2x & -2x & x_4 - x_1 \\ 0 & -2x & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & -2x & x_2 - x_1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} (1+r) & (1+x) & (1+x) & x_1 \\ 0 & -2x & -2x & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 2x & x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & -2x & x_2 - x_1 \end{array} \right] \sim \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} (1+r) & (1+x) & (1+x) & x_1 \\ 0 & -2x & -2x & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 2x & x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - x_1 + x_3 - x_4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

El ultimo renglon resulta en una consistencia a menos de que

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = 0$$

En ese caso la ultima ecuacion es redundante y podemos resolver el sistema de 3x3 siguiente para encontrar el portafolio replicante:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} (1+r) & (1+x) & (1+x) & x_1 \\ 0 & -2x & -2x & x_4 - x_1 \\ 0 & 0 & 2x & x_3 - x_4 \end{array} \right]$$

Nota que en el caso del Call con precio de ejercicio 1-x los flujos son

$$x_1 = 2x$$

$$x_2 = x$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = 0$$

y en este caso:

$$x - 2x + x - 0 = 0$$

lo cual dice que el call si puede replicarse. Esto es consistente con lo encontrado en el inciso anterior pues todo producto derivado replicable tiene en valor univoco completamente determinado (como fue el caso del Call en este mercado que vale x)

## PREGUNTA2 (Arbitraje)

a) Para encontrar el conjunto de probabilidades libres de riesgo, por el Teorema de Arrow Debrew se obtienen normalizando el vector de pesos positivos  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  tal que:

$$P = \begin{bmatrix} 90 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 90 & 110 & 120 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$$

Encontramos tales vectores  $\Pi$  resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 100 & 100 & 100 & 90 \\ 90 & 110 & 120 & 100 \end{array} \right]$$

haciendo eliminacion de gauss en este sistema con operaciones elementales obtenemos:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9/10 \\ 9 & 11 & 12 & 100/10 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9/10 \\ 0 & 2 & 3 & 19/10 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9/10 \\ 0 & 1 & 3/2 & 19/20 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -1/20 \\ 0 & 1 & 3/2 & 19/20 \end{array} \right]$$

con lo cual obtenemos las ecuaciones:

$$\pi_1 = \frac{\pi_3}{2} - \frac{1}{20}$$

$$\pi_2 = \frac{19}{20} - \frac{3}{2}\pi_3$$

$\pi_3 =$  parametro libre

pedir positividad de los pesos  $\pi_i$  implica en este caso que el parametro libre  $\pi_3$  debe estar acotado por :

$$1/10 \leq \pi_3 \leq 19/30$$

En este caso los pesos normalizados (las probabilidades) **NO** son iguales a los pesos sin normalizar pues en este caso tenemos por la primera ecuacion que :

$$\sum_{i=1}^3 \pi_i = 9/10$$

Para obtener las probabilidades  $\pi_i^*$  dividimos los pesos entre la suma de todos para normalizar su suma a uno:

$$\pi_1^* = \frac{1}{9/10} \pi_1 = \frac{10}{9} \left( \frac{\pi_3}{2} - \frac{1}{20} \right)$$

$$\pi_2^* = \frac{1}{9/10} \pi_2 = \frac{10}{9} \left( \frac{19}{20} - \frac{3}{2}\pi_3 \right)$$

$$\pi_3^* = \frac{1}{9/10} \pi_3 = \frac{10}{9} (\pi_3)$$

donde:

$$3/27 \leq \pi_3^* \leq 19/27$$

entonces las ecuaciones para las probabilidades en termino del parametro libre  $\pi_3^*$  son:

$$\pi_1^* = \left( \frac{\pi_3^*}{2} - \frac{1}{18} \right)$$

$$\pi_2^* = \left( \frac{19}{18} - \frac{3}{2}\pi_3^* \right)$$

$\pi_3^* =$  parametro libre acotado

c) Si el Put con  $K = 115$  vale \$7 debe ser posible hacer un arbitraje pues de acuerdo con el rango de probabilidades libres de riesgo (consistentes con unmercado que no permite arbitraje) los valores del Put en terminos del parametro libre estan dados por

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{1+r} [\pi_1^* * 25 + \pi_2^* * 5 + \pi_3^* * 0] \\
&= \frac{9}{10} \left[ \left( \frac{\pi_3^*}{2} - \frac{1}{18} \right) * 25 + \left( \frac{19}{18} - \frac{3}{2} \pi_3^* \right) * 5 \right] \\
&= \frac{9}{10} \left[ \frac{10}{2} \pi_3^* + \frac{70}{18} \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto los valores maximos y minimos que puede tomar el Call en un mercado que no admite arbitraje son

$$\begin{aligned}
V_- &= \frac{9}{10} \left[ \frac{10}{2} \frac{3}{27} + \frac{70}{18} \right] \\
&= \frac{1}{10} \left[ \frac{10}{2} + \frac{70}{2} \right] \\
&= 4 \\
V^+ &= \frac{9}{10} \left[ \frac{10}{2} \frac{19}{27} + \frac{70}{18} \right] \\
&= \frac{1}{10} \left[ \frac{10}{2} \frac{19}{3} + \frac{70}{2} \right] \\
&= \left[ \frac{1}{2} \frac{19}{3} + \frac{7}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{19}{3} + \frac{21}{3} \right] = \frac{40}{6} = \$6.66
\end{aligned}$$

Por lo tanto si el PUT vale \$7 debemos ser capaces de construir un arbitraje con el Put.

El Teorema de Arrow Debreu dice que en un mercado de accion, cuenta de banco y Put como el descrito previamente debe existir una posibilidad de arbitraje. Sin embargo el teorema no dice como construirlo. En general NO es trivial desde el punto de vista algebraico pues hay que resolver un problema de programacion lineal.

El siguiente portafolio de arbitraje se encontro usando el Solver de excel. Pidiendo que el valor del portafolio hoy fuera cero (funcion objetivo) sujeto a las restricciones de que el valor del portafolio fuera no negativo (tres restricciones) y en uno de los nodos, por ejemplo en el que  $S_T = 120$  el portafolio valiera 1 (lo importante es que valga algo positivo).

El portafolio de arbitraje donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  son las cantidades de dinero en el banco, numero de acciones y puts que tengo respectivamente, esta dado por:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= -168.3 \\
\theta_2 &= 1.55 \\
\theta_3 &= 1.9
\end{aligned}$$

Es decir

1. Escribo 1.9 Puts (ingreso positivo de  $1.9 * 7$ ) Puts, vendo en corto 1.55 acciones (ingreso positivo de 155) y meto todo el dinero (\$168.3) al banco (ingreso negativo de \$168.3). El costo de adquirir este portafolio es de  $13.3 + 155 - 168.3 = 0$
2. Al final del periodo mi portafolio vale :  $168.3 * 10/9 - 1.55 * S_T - 1.9 * \left\{ \frac{110 - S_T}{2} \right\}_+$ 
  - a. Si la accion sube a 120 mi portafolio vale  $168.3 * 10/9 - 1.55 * 120 = 1$
  - b. Si la accion sube a 110 mi portafolio vale  $168.3 * 10/9 - 1.55 * 110 - 1.9 * \left\{ \frac{5}{2} \right\} = 7$
  - c. Si la accion baja a 90 mi portafolio vale  $168.3 * 10/9 - 1.55 * 90 - 1.9 * \left\{ \frac{25}{2} \right\} = 0$

Esto constituye un portafolio de arbitraje pues con costo inicial cero tengo un portafolio que en ningun caso pierde dinero y con probabilidad positiva puede ganar dinero.

d) De igual forma si el PUT cuesta \$3 esta por debajo de cualquier valor de no arbitraje y debemos ser capaces de construir un arbitraje con el Put.

En este caso el portafolio de arbitraje donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  son las cantidades de dinero en el banco, numero de acciones y puts que tengo respectivamente, esta dado por:

$$\theta_1 = 32.4$$

$$\theta_2 = -0.3$$

$$\theta_2 = -0.8$$

Es decir:

1. Compro 0.8 Puts (ingreso negativo de  $0.8 \cdot 3$ ) Puts, compro 0.3 acciones (costo de 30) y para financiar la operacion pido ( $0.8 \cdot 3 + 30 = 32.4$ ) al banco (ingreso positivo de \$32.4). El costo de adquirir este portafolio es de  $-0.8 \cdot 3 - 30 + 32.4 = 0$
2. Al final del periodo mi portafolio vale :  $0.3 \cdot S_T + 0.8 \cdot \left( \begin{matrix} 110 - S_T \\ + \end{matrix} \right) - 32.4 \cdot 10/9$ 
  - a. Si la accion sube a 120 mi portafolio vale  $0.3 \cdot 120 - 32.4 \cdot 10/9 = 0$
  - b. Si la accion sube a 110 mi portafolio vale  $0.3 \cdot 110 + 0.8 \cdot \left( \begin{matrix} 5 \\ + \end{matrix} \right) - 32.4 \cdot 10/9 = 7$
  - c. Si la accion baja a 90 mi portafolio vale  $0.3 \cdot 90 + 0.8 \cdot \left( \begin{matrix} 25 \\ + \end{matrix} \right) - 32.4 \cdot 10/9 = 11$

Esto de nuevo constituye un portafolio de arbitraje pues con costo inicial cero tengo un portafolio que en ningun caso pierde dinero y con probabilidad positiva puede ganar dinero.