

CLASE2. Valuacion de No arbitraje y Portafolios Equivalentes.

Existen tres tipos de participantes en el mercado de derivados:

I. Administradores de riesgo. (Hedgers) este es el caso de aquellos que quieren eliminar riesgo de sus posiciones o compromisos financieros. El caso típico es el de una empresa con una deuda en dolares que quiere eliminar el riesgo de una devaluacion comprando un contrato call que le permite comprar dolares a un precio predeterminado si el asi lo desea.

II. Especuladores. Estos seran aquellos que tengan una vision u opinion no necesariamente consistente con el mercado acerca de las fluctuaciones de un activo. Si alguien piensa tener una razon fuerte para pensar que un activo subira drasticamente querra entonces para comprar un Call o un Forward, simepre que el mercado le asigne una probabilidad a esta alza de precios menor que la que el especulador le asigna (y por consiguiente le asigne un precio menor que lo que el especulador piensa que vale dicho instrumento)

III. Arbitrageurs (Los que buscan oportunidades de arbitraje). Por supuesto, debemos definir primero lo que es el arbitraje:

El arbitraje Financiero se define como una ganancia instantanea libre de riesgo.

El principio de no-arbitraje se basa en el muy razonable postulado de que en un mercado eficiente no existen oportunidades de arbitraje. Este postulado, aunque poco lucrativo parece ser por demas razonable en un mercado que se precie de poseer algun tipo de equidad economica. Sin embargo el corroborar la certeza de este postulado escapa en la mayoria de los casos a las pruebas empiricas. No es posible probar mas alla de toda duda que este postulado sea cierto.

En el postulado de no arbitraje esta implicitamente definido el concepto de mercado eficiente. Un mercado sera eficiente cuando no existan oportunidades de arbitraje. A pesar de que existe una definicion formal de mercado eficiente que tiene que ver con la divulgacion oportuna y equitativa de la informacion que obtienen las participantes del mercado, basta para nuestros fines esta definicion circular entre no arbitraje y mercados eficientes.

Mas aun, existen participantes del mercado bursartil que se dedican unica y exclusivamente

a la búsqueda de estas oportunidades. Una ganancia instantánea libre de riesgo no es poca cosa para un comprador de activos financieros. Si estos participantes logran fectivamente arbitrajes o solo han gozado de "buena suerte" es también algo difícil de comprobar.

Sin embargo los últimos desastres financieros tienden a contradecir a estos "habiles" inversionistas: Enron, WorldCom, Long Term Capital, el Gobierno Argentino, etc.

Como veremos más adelante este postulado tiene implicaciones importantísimas para la determinación del valor de algunos activos financieros, en particular de los productos derivados.

Para entender mejor el concepto de arbitraje daremos dos ejemplos. Uno en el mercado de venta de alimentos y otro del mercado de dinero:

1. *Antojitos Licha (un ejemplo poco serio):*

Los ya concidos tacos y tortas de Licha (enfrente de la entrada del ITAM) desplegaron durante algún tiempo una aberración financiera en su lista de precios de tacos de bistec con queso. De acuerdo con el pizarrón de precios los comenzales podían degustar de un taco de bistec con queso por tan solo \$7 pesos. Sin embargo si el comenzal prefería ordenar un alambre de bistec con queso que consta de 3 tacos, el precio especificado era de \$22 pesos. Esto constituye una oportunidad de arbitraje pues quien quisiera ser intermediario en el mercado de tacos podría adquirir 3 tacos por separado (costo de \$21) y venderlos a algún hambriento incauto por \$22 (precio de la orden de tres) ganando instantáneamente \$1.

Si no tomamos en cuenta la imposibilidad de relizar esta transacción a gran escala y el costo de oportunidad de hacer cola para adquirir tacos, el que realiza esta transacción podría ganar cuanto dinero quisiera realizando una y otra vez la compra-venta.

Afortunadamente a nadie le interesa el mercado negro de tacos de bistec (Sin embargo la oportunidad de arbitraje ya ha sido corregida). MORALEJA: Las oportunidades de arbitraje no duran por mucho tiempo.

2. *Tasas de Interés Bancarias (un ejemplo más serio):*

Un ejemplo menos pintoresco y más financiero es el de las tasas de interés bancarias.

Distintos bancos prestan y reciben dinero a distintas tasas de interés dependiendo de su calidad crediticia y metas de captación. La tasa a la que prestan los bancos se le llama **tasa activa** (por tratarse de un activo del banco que el que recibe el préstamo les debe) y la tasa que te pagan por poner tus ahorros en el banco es la **tasa pasiva** (por tratarse de una deuda que el banco tiene contigo).

La tasa activa de un banco debe ser mayor que la tasa pasiva, o de lo contrario no sería negocio la intermediación bancaria. A la diferencia entre la tasa activa y la tasa pasiva se le llama **spread**. El principio de no arbitraje indica que la tasa activa de un banco debe ser mayor que la tasa pasiva de todos los bancos de un mismo mercado. Es decir si existen "n" bancos en el mercado y denominamos a la tasa activa del i-ésimo banco t_i^a y a la tasa pasiva t_i^p , la siguiente relación debe satisfacerse entre las tasas:

$$\max_{1 \leq i \leq n} t_i^p \leq \min_{1 \leq i \leq n} t_i^a$$

Si esto no fuera cierto es decir si existieran bancos j, k tales que $t_j^a < t_k^p$ (es decir la tasa activa de un banco fuera menor que la tasa pasiva de otro banco), un inversionista podría

pedir dinero prestado a la tasa activa t_j^a e invertirlo inmediatamente e invertirlo inmediatamente ganando la tasa pasiva t_k^p y embolsándose inmediatamente el diferencial de tasas $t_k^p - t_j^a > 0$.

El valor de un contrato forward.

En principio el valor de un contrato forward depende de la probabilidad de que el activo subyacente suba o baje de precio. Determinar la distribución de probabilidad que rigiere el comportamiento del activo al tiempo de maduración determinaría por completo el precio del forward. Bastaría con traer a valor presente el valor esperado (bajo la distribución de probabilidad correcta) de los flujos para el inversionista asociados al forward.

Desafortunadamente dicha distribución de probabilidad es desconocida y no hay razón para pensar que los activos siguen distribuciones de probabilidad determinadas de antemano. La tarea de encontrar "La" distribución de probabilidad está destinada al fracaso. Distintos participantes del mercado podrán proponer distintas distribuciones, trayendo subjetividad al proceso de valuación.

Afortunadamente el principio de no arbitraje nos permite determinar el precio de un contrato forward de manera inequívoca como veremos a continuación.

Postulado. El valor hoy (tiempo t) de un contrato forward $F(t, T, S, K)$ que madura al tiempo T ($t < T$) sobre un activo S y con precio de ejercicio K , está dado por:

$$F(t, T, S, K) = S_t - \frac{K}{(1+r)}$$

donde r es la tasa de interés neta que cobra el banco por un préstamo al tiempo T (es decir por un préstamo de \$1 debemos pagar al tiempo T la cantidad de $(1+r)$).

P: Porque es esto cierto ?.

R: Por el principio de no arbitraje.

Supongamos que no es así.

Supongamos que el precio del forward es mayor es decir

$$F(t, T, S, K) > S_t - \frac{K}{(1+r)}$$

si así fuera, podríamos hacer una ganancia instantánea libre de riesgo, es decir un arbitraje, con la siguiente estrategia:

1. Escribimos un contrato forward. Es decir hacemos un contrato forward con otra parte bajo la cual somos la parte corta del contrato (nos comprometemos a vender el activo S al precio K al tiempo T).
2. Pedimos prestado al banco la cantidad de $\frac{K}{(1+r)}$
3. Tenemos ahora en nuestro bolsillo $F(t, T, S, K) + \frac{K}{(1+r)}$
4. Compramos una acción por S_t
Notese que no hemos hecho ninguna erogación pues $F(t, T, S, K) + \frac{K}{(1+r)} - S_t > 0$
5. La cantidad que sobra, es decir $F(t, T, S, K) + \frac{K}{(1+r)} - S_t$ es nuestra ganancia instantánea libre de riesgo.
6. Al tiempo T liquidamos nuestros compromisos:

- Al madurar el contrato forward tenemos un flujo (que puede ser positivo o negativo) de $-(S_T - K) = K - S_T$
- Tenemos también una deuda con el banco de K
- y poseemos el activo S que en ese momento vale S_T
- El valor de nuestro portafolio es de $K - S_T - K + S_T = 0$

7. Es decir, liquidamos nuestros compromisos sin tener ganancia o pérdida y nos embolsamos al inicio, sin necesidad de hacer ninguna erogación, la cantidad de $F(t, T, S, K) + \frac{K}{(1+r)} - S_t > 0$

Supongamos por otra parte que el precio del forward es menor, es decir

$$F(t, T, S, K) < S_t - \frac{K}{(1+r)}$$

en ese caso podríamos hacer un arbitraje con la siguiente estrategia:

1. Vendemos la acción S a través de una venta en corto, es decir:
 - Pedimos prestada a una tercera parte la acción S .
 - Nos comprometemos a regresar la acción S a la tercera parte al tiempo T (que valdrá S_T)
 - Vendremos inmediatamente la acción que nos prestaron para obtener un ingreso de S_t
 - Nota: si la operación en corto no se pudiera realizar por restricciones regulatorias en la bolsa, se podría financiar la transacción de manera interna (siempre comprometiéndose con la empresa a regresar S_T al final de la transacción).
2. Con parte de ese ingreso entramos en un contrato forward. Es decir compramos el contrato forward (que está barato) y nos comprometemos a comprar el activo S al precio K al tiempo T .
3. Otra parte de nuestro ingreso por la venta en corto: $\frac{K}{(1+r)}$ la metemos al banco
4. Tenemos ahora en nuestro bolsillo $S_t - F(t, T, S, K) - \frac{K}{(1+r)} > 0$
5. La cantidad que sobra, es decir $S_t - F(t, T, S, K) - \frac{K}{(1+r)}$ es nuestra ganancia instantánea libre de riesgo.
6. Al tiempo T liquidamos nuestros compromisos:
 - Al madurar el contrato forward tenemos un flujo (que puede ser positivo o negativo) de $(S_T - K)$
 - Tenemos también un ingreso por el dinero que metimos al banco de K
 - Tenemos una deuda generada por la venta en corto de S_T (tenemos que comprar el activo al tiempo T para regresarlo a la tercera parte participante en la venta en corto)
 - El valor de nuestro portafolio es de $S_T - K + K - S_T = 0$
7. Es decir, liquidamos nuestros compromisos sin tener ganancia o pérdida y nos embolsamos al inicio, sin necesidad de hacer ninguna erogación, la cantidad de $S_t - F(t, T, S, K) - \frac{K}{(1+r)} > 0$

Por lo tanto, el único precio consistente con el principio de no arbitraje es el de

$$F(t, T, S, K) = S_t - \frac{K}{(1+r)}$$

Que el precio de un forward este determinado no quiere decir que estos contratos se hayan vuelto aburridos para el mercado bursátil ni mucho menos, simplemente quiere decir que estos

contratos son solo atractivos para los inversionistas del tipo I y II, es decir que buscan o bien cubrirse de riesgo o bien que tienen una posición en el mercado y que no obstante el precio actual del mercado, creen tener bases sólidas para pensar que habrá un movimiento fuerte en el precio del activo al tiempo T .

Paridad Put-Call.

Otro ejemplo en el que el principio de no arbitraje afecta de manera importante el precio de los productos derivados es la llamada paridad Put-Call, de acuerdo con la cual, Si $C(t, T, S, K)$ denota el precio actual de un Call sobre el activo subyacente S que vence al tiempo T y tiene precio de ejercicio K ; y $P(t, T, S, K)$ denota el precio de un Put escrito sobre el mismo activo subyacente, con misma maduración y precio de ejercicio, debe sostenerse la siguiente relación entre los dos precios:

$$C(t, T, S, K) - P(t, T, S, K) = S_t - \frac{K}{(1+r)}$$

recordando que el precio del forward con misma maduración y precio de ejercicio está dado por el lado derecho de la ecuación tenemos que:

$$C(t, T, S, K) - P(t, T, S, K) = F(t, T, S, K)$$