

TRIMESTRE 6:

MÉTODOS ESTADÍSTICOS BAYESIANOS

PROFESOR: LUIS E. NIETO BARAJAS

EMAIL: lnieto@itam.mx

URL: <http://allman.rhon.itam.mx/~lnieto>

Maestría en administración de riesgos



Métodos Estadísticos Bayesianos

- **OBJETIVO:** El estudiante conocerá los principios básicos de la teoría Bayesiana y se familiarizará con el concepto de modelado estadístico en general. Conocerá algunas de las familias de modelos más comunes y será capaz de realizar un análisis estadístico Bayesiano para estos modelos.

- **TEMARIO:**
 - 1. Introducción a la inferencia bayesiana**
 - 1.1 Fundamentos
 - 1.2 Proceso de aprendizaje y distribución predictiva
 - 1.3 Distribuciones iniciales informativas, no informativas y conjugadas
 - 1.4 Problemas de inferencia paramétrica
 - 2. Cómputo Bayesiano**
 - 2.1 Aproximaciones analíticas e integración numérica
 - 2.2 Métodos de Monte Carlo y simulación vía cadenas de Markov
 - 2.3 Medidas de comparación y ajuste de modelos.
 - 3. Algunos modelos estadísticos**
 - 3.1 Modelos de regresión lineal
 - 3.2 Modelos lineales generalizados
 - 3.3 Modelos lineales dinámicos
 - 3.4 Modelos jerárquicos

➤ REFERENCIAS BÁSICAS (Por tema):

1. Bernardo, J. M. (1981). *Bioestadística: Una perspectiva Bayesiana*. Vicens Vives: Barcelona. (<http://www.uv.es/bernardo/Bioestadistica.pdf>)
2. Gutiérrez-Peña, E. (1997). *Métodos computacionales en la inferencia Bayesiana*. Monografía IIMAS-UNAM Vol. 6, No. 15. (<http://www.dpye.iimas.unam.mx/eduardo/MCB/index.html>)
- 3.a. Congdon, P. (2001). *Bayesian Statistical Modelling*. Wiley: Chichester.
- 3.b. Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. & Rubin, D. (2002). *Bayesian Data Analysis*, 2a. edición. Chapman & Hall: Boca Raton.

➤ REFERENCIAS ADICIONALES:

- Antelman G. (1997). *Elementary Bayesian Statistics*. Edited by A. Madansky & R. McCulloch. Edward Elgar Publishing Limited: Cheltenham.
- Berger, J. O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* (2nd. Edition). Springer Verlag: New York.
- Bernardo J.M. and Smith, A.F.M. (2000), *Bayesian Theory*. Wiley: New York.
- Lee, P. M. (1997). *Bayesian Statistics (An Introduction)*. Arnold: Londres.
- O'Hagan, A. (1994). *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 2B: Bayesian Inference*. Edward Arnold: Cambridge.

- **PAQUETES ESTADÍSTICOS:** Durante el curso se manejarán varios paquetes estadísticos que nos servirán para entender mejor los conceptos y para realizar análisis Bayesianos.

1) R (<http://www.r-project.org/>)

Paquetes: R2OpenBUGS, r2jags

2) R Studio (<http://www.rstudio.com/>)

3) OpenBUGS (<http://www.openbugs.net/>)

4) JAGS (<http://sourceforge.net/projects/mcmc-jags/files/JAGS/>)

- **EVALUACIÓN:** El curso se evaluará de la siguiente manera:

- Examen Parcial - 40%
- Trabajo Final - 40%
- Exposición - 20%
- Tareas

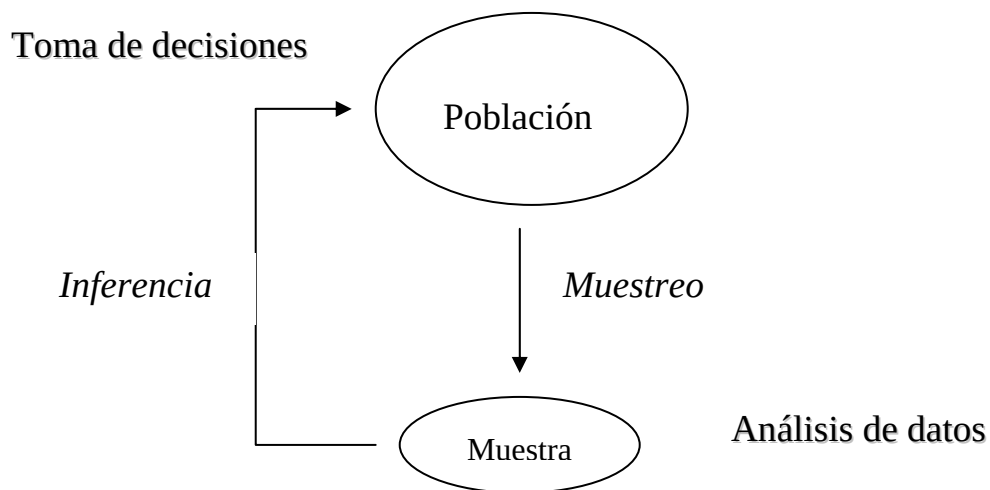
- **NOTA:** Tanto el trabajo final como la exposición se realizarán en equipos de a lo más 3 integrantes. El objetivo del trabajo es enfrentar al alumno a un problema real en el que tendrá que mostrar su conocimiento aprendido modelando de manera adecuada un conjunto de datos, resolviendo objetivos particulares y tomando decisiones.

1. Introducción a la inferencia bayesiana

1.1 Fundamentos

- El OBJETIVO de la estadística, y en particular de la estadística Bayesiana, es proporcionar una metodología para analizar adecuadamente la información con la que se cuenta (*análisis de datos*) y decidir de manera razonable sobre la mejor forma de actuar (*teoría de decisión*).

- DIAGRAMA de la Estadística:



- Tipos de INFERENCIA:

	Clásica	Bayesiana
Paramétrica	√√√	√√
No paramétrica	√√	√

- La estadística esta basada en la TEORÍA DE PROBABILIDADES. Formalmente la probabilidad es una función que cumple con ciertas condiciones

(*axiomas de la probabilidad*), pero en general puede entenderse como una medida o cuantificación de la incertidumbre.

- Aunque la definición de función de probabilidad es una, existen varias interpretaciones de la probabilidad: clásica, frecuentista y subjetiva. La METODOLOGÍA BAYESIANA está basada en la interpretación subjetiva de la probabilidad y tiene como punto central el Teorema de Bayes.



Reverendo *Thomas Bayes* (1702-1761).

- El enfoque bayesiano realiza *inferencia estadística* en un contexto de teoría de decisión.
- La TEORÍA DE DECISIÓN propone un método de tomar decisiones basado en unos principios básicos sobre la *elección coherente* entre opciones alternativas.
- ELEMENTOS DE UN PROBLEMA DE DECISIÓN en ambiente de incertidumbre:
Un problema de decisión se define por la cuarteta $(D, E, C, \leq)$, donde:
 - ❑ D : Espacio de opciones.
 - ❑ E : Espacio de eventos inciertos.
 - ❑ C : Espacio de consecuencias.
 - ❑ $\leq$: Relación de preferencia entre las distintas opciones.

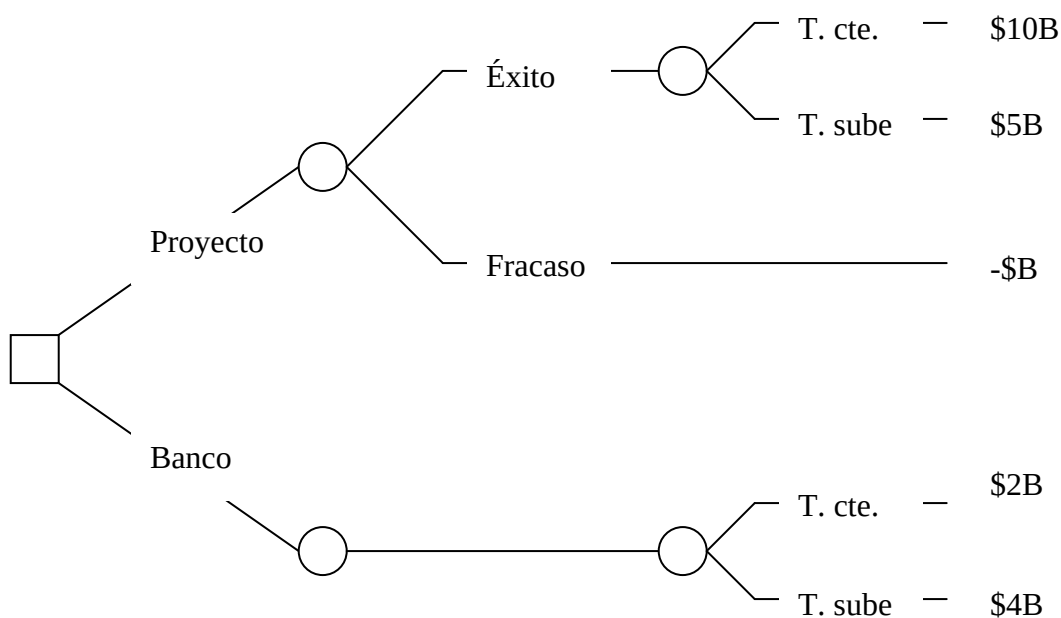
- **EJEMPLO 1:** Un gerente tiene $\$B$ pesos y debe decidir si invertir en un proyecto o guardar el dinero en el banco. Si guarda su dinero en el banco y si la tasa de interés se mantiene constante, al final del año tendría el doble, pero si la tasa sube tendría 3 veces más. Si invierte en el proyecto, puede ocurrir que el proyecto sea exitoso o que fracase. Si el proyecto es exitoso y la tasa de interés se mantiene constante, al final de un año tendría 10 veces la inversión inicial, pero si la tasa sube tendría únicamente 4 veces más de su inversión inicial. En caso de que el proyecto fracasara al final de un año habrá perdido su inversión inicial.



$D = \{d_1, d_2\}$, donde $d_1 = \text{proyecto}$, $d_2 = \text{banco}$

$E = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}\}$, donde $E_{11} = \text{éxito / tasa constante}$, $E_{12} = \text{éxito / tasa sube}$, $E_{13} = \text{fracaso}$, $E_{21} = \text{tasa constante}$, $E_{22} = \text{tasa sube}$

$C = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}\}$, donde $c_{11} = \$10B$, $c_{12} = \$5B$, $c_{13} = -\$B$, $c_{21} = \$2B$, $c_{22} = \$4B$



- CUANTIFICACIÓN de los sucesos inciertos y de las consecuencias.
 - La información que el decisor tiene sobre la posible ocurrencia de los eventos inciertos puede ser cuantificada a través de una *función de probabilidad* sobre el espacio E .
 - De la misma manera, es posible cuantificar las preferencias del decisor entre las distintas consecuencias a través de una *función de utilidad* de manera que $c_{ij} \leq c_{i'j'} \Leftrightarrow u(c_{ij}) \leq u(c_{i'j'})$.
- AXIOMAS DE COHERENCIA. Son una serie de principios que establecen las condiciones para tomar decisiones coherentemente y para aclarar las posibles ambigüedades en el proceso de toma de decisión.

o Teorema: Criterio de decisión Bayesiano.

Considérese el problema de decisión definido por $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$, donde $d_i = \{c_{ij} | E_j, j=1, \dots, m_i\}$, $i=1, \dots, k$. Sea $P(E_{ij}|d_i)$ la probabilidad de que suceda E_{ij} si se elige la opción d_i , y sea $u(c_{ij})$ la utilidad de la consecuencia c_{ij} . Entonces, la cuantificación de la opción d_i es su utilidad esperada, i.e.,

$$\bar{u}(d_i) = \sum_{j=1}^{m_i} u(c_{ij}) P(E_{ij}|d_i).$$

La decisión óptima es aquella d^* tal que $\bar{u}(d^*) = \max_i \bar{u}(d_i)$.

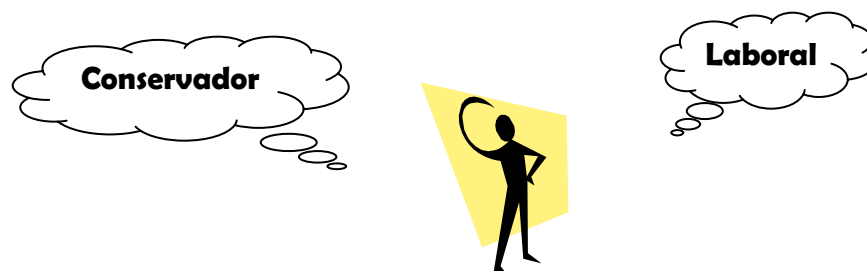
- RESUMIENDO: Si se aceptan los axiomas de coherencia, necesariamente se debe proceder de la siguiente manera:

- 1) Asignar una utilidad $u(c)$ para toda c en C .
- 2) Asignar una probabilidad $P(E)$ para toda E en E .
- 3) Elegir la opción (óptima) que maximiza la utilidad esperada.

➤ EJEMPLO 2: En unas elecciones parlamentarias en la Gran Bretaña competían los partidos Conservador y Laboral. Una casa de apuestas ofrecía las siguientes posibilidades:

- a) A quien apostara a favor del partido Conservador, la casa estaba dispuesta a pagar 7 libras por cada 4 que apostase si el resultado favorecía a los conservadores, en caso contrario el apostador perdía su apuesta.
- b) A quien apostase a favor del partido Laboral, la casa estaba dispuesta a pagar 5 libras por cada 4 que apostasen si ganaban los laboristas, en caso contrario el apostador perdía su apuesta.

¿A qué partido apostar?



o $D = \{d_1, d_2\}$

donde, d_1 = Apostar al partido Conservador

d_2 = Apostar al partido Laboral

o $E = \{E_1, E_2\}$

donde, E_1 = Que gane el partido Conservador

E_2 = Que gane el partido Laboral

o $C = \{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}\}$. Si la apuesta es de k libras

entonces, $c_{11} = -k + \frac{7}{4}k = \frac{3}{4}k$

$$c_{12} = -k$$

$$c_{21} = -k$$

$$c_{22} = -k + \frac{5}{4}k = \frac{1}{4}k$$

Supongamos que la utilidad es proporcional al dinero, i.e., $u(c_{ij}) = c_{ij}$

y sea $\pi = P(E_1)$, y $1 - \pi = P(E_2)$.

P(E)	π	$1 - \pi$
u(d,E)	E₁	E₂
d₁	$(3/4)k$	$-k$
d₂	$-k$	$(1/4)k$

Suponiendo que las utilidades son proporcionales al dinero, las utilidades esperadas son:

$$\bar{u}(d_1) = \pi(3/4)k + (1 - \pi)(-k) = \{(7/4)\pi - 1\}k$$

$$\bar{u}(d_2) = \pi(-k) + (1 - \pi)(1/4)k = \{(1/4) - (5/4)\pi\}k$$

Entonces, la mejor decisión sería:

$$\text{Si } \bar{u}(d_1) > \bar{u}(d_2) \Leftrightarrow \pi > 5/12 \Rightarrow d_1$$

$$\text{Si } \bar{u}(d_1) < \bar{u}(d_2) \Leftrightarrow \pi < 5/12 \Rightarrow d_2$$

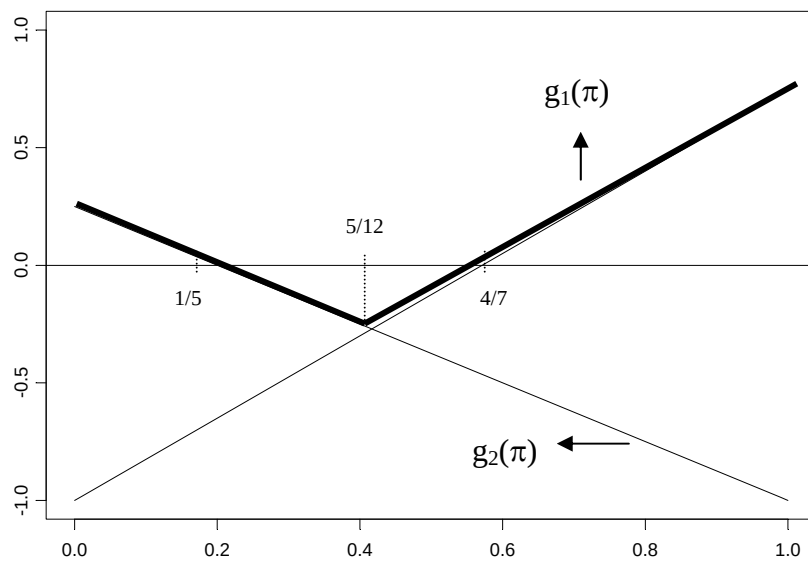
$$\text{Si } \bar{u}(d_1) = \bar{u}(d_2) \Leftrightarrow \pi = 5/12 \Rightarrow d_1 \text{ ó } d_2$$

Gráficamente, si definimos las funciones

$$g_1(\pi) = \left(\frac{7}{4}k\right)\pi - k = \bar{u}(d_1), \text{ y}$$

$$g_2(\pi) = \left(-\frac{5}{4}k\right)\pi + \frac{k}{4} = \bar{u}(d_2)$$

entonces, si $k = 1$,



La **línea gruesa** representa la mejor solución al problema de decisión dada por el criterio de la utilidad esperada.

Observación: Si $\pi \in [1/5, 4/7]$, la utilidad esperada de la mejor decisión es negativa!.

Pregunta 1: ¿Tu apostarías si $\pi \in [1/5, 4/7]$?

Pregunta 2: ¿Cuál es el valor que la casa esperaría tuviera π ?
Intuitivamente, la casa esperaría que $\pi \in [1/5, 4/7]$.

1.2 Proceso de aprendizaje y distribución predictiva

- La reacción natural de cualquiera que tenga que tomar una decisión cuyas consecuencias dependen de la ocurrencia de eventos inciertos E , es intentar reducir su incertidumbre obteniendo más información sobre E .
- LA IDEA es entonces recolectar información que *reduzca* la incertidumbre de los eventos inciertos, o equivalentemente, que mejore el conocimiento que se tiene sobre E .
- ¿De dónde obtengo información adicional?
Encuestas, estudios previos, experimentos, etc.
- El problema central de la inferencia estadística es el de proporcionar una metodología que permita *asimilar* la información accesible con el objeto de mejorar nuestro conocimiento inicial.
- ¿Cómo utilizar Z para mejorar el conocimiento sobre E ?

$$P(E) \xrightarrow{! ?} P(E|Z)$$

Mediante el Teorema de Bayes.

O **TEOREMA DE BAYES:** Sean $\{E_j, j \in J\}$ una partición finita de Ω (E), i.e.,

$E_j \cap E_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$ y $\bigcup_{j \in J} E_j = \Omega$. Sea $Z \neq \emptyset$ un evento. Entonces,

$$P(E_i|Z) = \frac{P(Z|E_i)P(E_i)}{\sum_{j \in J} P(Z|E_j)P(E_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

➤ Comentarios:

1) Una forma alternativa de escribir el Teorema de Bayes es:

$$P(E_i|Z) \propto P(Z|E_i)P(E_i)$$

$P(Z)$ es llamada constante de proporcionalidad.

2) A las $P(E_j)$ se les llama probabilidades iniciales o a-priori y a las $P(E_j|Z)$ se les llama probabilidades finales o a-posteriori. Además, $P(Z|E_j)$ es llamada verosimilitud y $P(Z)$ es llamada probabilidad marginal de la información adicional.

➤ EJEMPLO 5: Un paciente va al médico con algún padecimiento y quiere que el médico le de un diagnóstico. Supongamos que la enfermedad del paciente cae en alguna de las siguientes tres categorías:

E_1 = enfermedad muy frecuente (resfriado)

E_2 = enfermedad relativamente frecuente (gripa)

E_3 = enfermedad poco frecuente (pulmonía)

El médico sabe por experiencia que

$$P(E_1)=0.6, P(E_2)=0.3, P(E_3)=0.1 \quad \textbf{(probabilidades iniciales)}$$

El médico observa y obtiene información adicional (Z = síntomas) acerca de la posible enfermedad del paciente. De acuerdo con los síntomas el doctor dictamina que

$$P(Z | E_1)=0.2, P(Z | E_2)=0.6, P(Z | E_3)=0.6 \quad \textbf{(verosimilitud)}$$

¿Qué enfermedad es más probable que tenga el paciente?

Usando el Teorema de Bayes, obtenemos:

$$P(Z) = \sum_{j=1}^3 P(Z|E_j)P(E_j) = (0.2)(0.6) + (0.6)(0.3) + (0.6)(0.1) = 0.36$$

$$P(E_1|Z) = \frac{(0.2)(0.6)}{0.36} = \frac{1}{3}$$

$$P(E_2|Z) = \frac{(0.6)(0.3)}{0.36} = \frac{1}{2}$$

$$P(E_3|Z) = \frac{(0.6)(0.1)}{0.36} = \frac{1}{6}$$

**(probabilidades
finales)**

Por lo tanto, es más probable que el paciente tenga una enfermedad relativamente frecuente (E_2).

- Recordemos que todo esto de la cuantificación inicial y final de los eventos inciertos es para reducir la incertidumbre en un problema de decisión.

Supongamos que para un problema particular se cuenta con lo siguiente:

$P(E_{ij})$: cuantificación inicial de los eventos inciertos

$u(c_{ij})$: cuantificación de las consecuencias

Z : información adicional sobre los eventos inciertos

Teo. Bayes

$$P(E) \rightleftarrows P(E|Z)$$

En este caso se tienen dos situaciones:

- 1) Situación inicial (a-priori):

$$P(E_{ij}), \quad u(c_{ij}), \quad \sum_j u(c_{ij})P(E_{ij}) \longleftarrow \text{Utilidad esperada inicial}$$

- 2) Situación final (a-posteriori):

$$P(E_{ij}|Z), \quad u(c_{ij}), \quad \sum_j u(c_{ij})P(E_{ij}|Z) \longleftarrow \text{Utilidad esperada final}$$

Problema de Inferencia.

- PROBLEMA DE INFERENCIA. Sea $F = \{f(x|\theta), \theta \in \Theta\}$ una familia paramétrica indexada por el parámetro $\theta \in \Theta$. Sea $X_1, \dots, X_n$ una m.a. de observaciones de $f(x|\theta) \in F$. El problema de inferencia paramétrico consiste en aproximar el verdadero valor del parámetro θ .
- El problema de inferencia estadístico se puede ver como un problema de decisión con los siguientes elementos:
 - D = espacio de decisiones de acuerdo al problema específico
 - $E = \Theta$ (espacio parametral)
 - $C = \{(d, \theta) : d \in D, \theta \in \Theta\}$
 - $\leq$: Será representado por una función de utilidad o pérdida.
- La muestra proporciona información adicional sobre los eventos inciertos $\theta \in \Theta$. El problema consiste en cómo actualizar la información.
- Por lo visto con los axiomas de coherencia, el decisor es capaz de cuantificar su conocimiento acerca de los eventos inciertos mediante una función de probabilidades. Definamos,
 - $f(\theta)$ *la distribución inicial (ó a-priori)*. Cuantifica el conocimiento inicial sobre θ .
 - $f(x|\theta)$ *proceso generador de información muestral*. Proporciona información adicional acerca de θ .

$f(\underline{x}|\theta)$ la función de verosimilitud. Contiene toda la información sobre θ proporcionada por la muestra $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$.

- Toda esta información acerca de θ se combina para obtener un conocimiento final o a-posteriori después de haber observado la muestra. La forma de hacerlo es mediante el *Teorema de Bayes*:

$$f(\theta|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\theta)f(\theta)}{f(\underline{x})},$$

donde $f(\underline{x}) = \int_{\Theta} f(\underline{x}|\theta)f(\theta)d\theta$ ó $\sum_{\theta} f(\underline{x}|\theta)f(\theta)$.

Como $f(\theta|\underline{x})$ es función de θ , entonces podemos escribir

$$f(\theta|\underline{x}) \propto f(\underline{x}|\theta)f(\theta)$$

Finalmente,

$f(\theta|\underline{x})$ la distribución final (ó a-posteriori). Proporciona todo el conocimiento que se tiene sobre θ (inicial y muestral).

- NOTA: Al tomar θ el carácter de aleatorio, debido a que el conocimiento que tenemos sobre el verdadero valor θ es incierto, entonces la función de densidad que genera observaciones con información relevante para θ es realmente una función de densidad condicional.
- o Definición: Llamaremos una muestra aleatoria (m.a.) de tamaño n de una población $f(x|\theta)$, que depende de θ , a un conjunto $X_1, \dots, X_n$ de variables aleatorias condicionalmente independientes dado θ , i.e.,

$$f(x_1, \dots, x_n|\theta) = f(x_1|\theta) \cdots f(x_n|\theta).$$

En este caso, la función de verosimilitud es la función de densidad (condicional) conjunta de la m.a. vista como función del parámetro, i.e.,

$$f(\underline{x}|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta).$$

- **DISTRIBUCIÓN PREDICTIVA:** La distribución predictiva es la función de densidad (marginal) $f(x)$ que me permite determinar qué valores de la v.a. X resultan más probables.
- Lo que conocemos acerca de X esta condicionado al valor del parámetro θ , i.e., $f(x|\theta)$ (su función de densidad condicional). Como θ es un valor desconocido, $f(x|\theta)$ no puede utilizarse para describir el comportamiento de la v.a. X .
- Distribución predictiva inicial. Aunque el verdadero valor de θ sea desconocido, siempre se dispone de cierta información sobre θ (mediante su distribución inicial $f(\theta)$). Esta información puede combinarse para poder dar información sobre los valores de X . La forma de hacerlo es:

$$f(x) = \int f(x|\theta)f(\theta)d\theta \quad \text{ó} \quad f(x) = \sum_{\theta} f(x|\theta)f(\theta)$$

- Supongamos que se cuenta con información adicional (información muestral) $X_1, X_2, \dots, X_n$ de la densidad $f(x|\theta)$, por lo tanto es posible tener un conocimiento final sobre θ mediante su distribución final $f(\theta|\underline{x})$.

- Distribución predictiva final. Supongamos que se quiere obtener información sobre los posibles valores que puede tomar una nueva v.a. X_F de la misma población $f(x|\theta)$. Si X_F es independiente de la muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$, entonces

$$f(x_F|\underline{x}) = \int f(x_F|\theta)f(\theta|\underline{x})d\theta \quad \text{ó} \quad f(x_F|\underline{x}) = \sum_{\theta} f(x_F|\theta)f(\theta|\underline{x})$$

- EJEMPLO 6: *Lanzar una moneda.* Se tiene un experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda. Sea X la v.a. que toma el valor de 1 si la moneda cae sol y 0 si cae águila, i.e., $X \sim \text{Ber}(\theta)$. En realidad se tiene que $X|\theta \sim \text{Ber}(\theta)$, donde θ es la probabilidad de que la moneda caiga sol.

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x).$$

El conocimiento inicial que se tiene acerca de la moneda es que puede ser una moneda deshonesto (dos soles).

$$P(\text{honesta}) = 0.95 \text{ y } P(\text{deshonesta}) = 0.05$$

¿Cómo cuantificar este conocimiento sobre θ ?

$$\left. \begin{array}{l} \text{moneda honesta} \Leftrightarrow \theta = 1/2 \\ \text{moneda deshonesto} \Leftrightarrow \theta = 1 \end{array} \right\} \theta \in \{1/2, 1\}$$

por lo tanto,

$$P(\theta = 1/2) = 0.95 \text{ y } P(\theta = 1) = 0.05$$

es decir,

$$f(\theta) = \begin{cases} 0.95, & \text{si } \theta = 1/2 \\ 0.05, & \text{si } \theta = 1 \end{cases}$$

Supongamos que al lanzar la moneda una sola vez se obtuvo un sol, i.e., $X_1=1$. Entonces la verosimilitud es

$$P(X_1 = 1|\theta) = \theta^1(1 - \theta)^0 = \theta.$$

Combinando la información inicial con la verosimilitud obtenemos,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(X_1 = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2) + P(X_1 = 1|\theta = 1)P(\theta = 1) \\ &= (0.5)(0.95) + (1)(0.05) = 0.525 \end{aligned}$$

$$P(\theta = 1/2|X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2)}{P(X_1 = 1)} = \frac{(0.5)(0.95)}{0.525} = 0.9047$$

$$P(\theta = 1|X_1 = 1) = \frac{P(X_1 = 1|\theta = 1)P(\theta = 1)}{P(X_1 = 1)} = \frac{(1)(0.05)}{0.525} = 0.0953$$

es decir,

$$f(\theta|x_1 = 1) = \begin{cases} 0.9047, & \text{si } \theta = 1/2 \\ 0.0953, & \text{si } \theta = 1 \end{cases}$$

La distribución predictiva inicial es

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2) + P(X = 1|\theta = 1)P(\theta = 1) \\ &= (0.5)(0.95) + (1)(0.05) = 0.525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(X = 0|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2) + P(X = 0|\theta = 1)P(\theta = 1) \\ &= (0.5)(0.95) + (0)(0.05) = 0.475 \end{aligned}$$

es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 0.525, & \text{si } x = 1 \\ 0.475, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La distribución predictiva final es

$$\begin{aligned} P(X_F = 1|x_1 = 1) &= P(X_F = 1|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2|x_1 = 1) + P(X_F = 1|\theta = 1)P(\theta = 1|x_1 = 1) \\ &= (0.5)(0.9047) + (1)(0.0953) = 0.54755 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_F = 0|x_1 = 1) &= P(X_F = 0|\theta = 1/2)P(\theta = 1/2|x_1 = 1) + P(X_F = 0|\theta = 1)P(\theta = 1|x_1 = 1) \\ &= (0.5)(0.9047) + (0)(0.0953) = 0.45235 \end{aligned}$$

es decir,

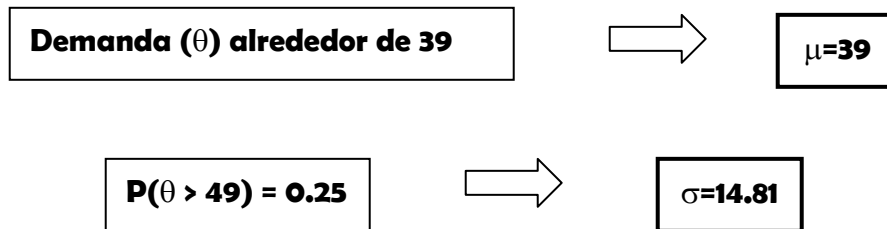
$$f(x_F | x_1 = 1) = \begin{cases} 0.548, & \text{si } x_F = 1 \\ 0.452, & \text{si } x_F = 0 \end{cases}.$$

- **EJEMPLO 7: Proyectos de inversión.** Las utilidades de un determinado proyecto pueden determinarse a partir de la demanda (θ) que tendrá el producto terminal. La información inicial que se tiene sobre la demanda es que se encuentra alrededor de \$39 millones de pesos y que el porcentaje de veces que excede los \$49 millones de pesos es de 25%.

De acuerdo con la información proporcionada, se puede concluir que una distribución normal modela “adecuadamente” el comportamiento inicial, entonces

$$\theta \sim N(\mu, \sigma^2),$$

donde $\mu = E(\theta)$ = media y $\sigma^2 = \text{Var}(\theta)$ = varianza. Además



¿Cómo?

$$P(\theta > 49) = P\left(Z > \frac{49 - 39}{\sigma}\right) = 0.25 \Rightarrow Z_{0.25} = \frac{49 - 39}{\sigma},$$

$$\text{como } Z_{0.25} = 0.675 \text{ (valor de tablas)} \Rightarrow \sigma = \frac{10}{0.675}$$

Por lo tanto, $\theta \sim N(39, 219.47)$.

Para adquirir información adicional sobre la demanda, se considerarán 3 proyectos similares cuyas utilidades dependen de la misma demanda.

Supongamos que la utilidad es una variable aleatoria con distribución Normal centrada en θ y con una desviación estándar de $\sigma=2$.

$$X|\theta \sim N(\theta, 4) \quad \text{y} \quad \theta \sim N(39, 219.47)$$

Se puede demostrar que la distribución predictiva inicial toma la forma

$$X \sim N(39, 223.47)$$

¿Qué se puede derivar de esta distribución predictiva?

$$P(X > 60) = P\left(Z > \frac{60 - 39}{\sqrt{223.47}}\right) = P(Z > 1.4047) = 0.0808,$$

lo cual indica que es muy poco probable tener una utilidad mayor a 60.

Suponga que las utilidades de los 3 proyectos son: $x_1=40.62$, $x_2=41.8$, $x_3=40.44$.

Se puede demostrar que si

$$X|\theta \sim N(\theta, \sigma^2) \quad \text{y} \quad \theta \sim N(\theta_0, \sigma_0^2) \Rightarrow \theta|\underline{x} \sim N(\theta_1, \sigma_1^2)$$

$$\text{donde, } \theta_1 = \frac{\frac{n}{\sigma^2} \bar{x} + \frac{1}{\sigma_0^2} \theta_0}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}} \quad \text{y} \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\bar{x}=40.9533, \theta_0 = 39, \sigma^2 = 4, \sigma_0^2 = 219.47, n=3$$

$$\theta_1 = 40.9415, \sigma_1^2 = 1.3252 \therefore \theta|\underline{x} \sim N(40.9415, 1.3252)$$

1.3 Distribuciones iniciales informativas, no informativas y conjugadas

- Existen diversas clasificaciones de las distribuciones iniciales. En términos de la cantidad de información que proporcionan se clasifican en *informativas* y *no informativas*.
- **DISTRIBUCIONES INICIALES INFORMATIVAS:** Son aquellas distribuciones iniciales que proporcionan información relevante e importante sobre la ocurrencia de los eventos inciertos θ .
- **DISTRIBUCIONES INICIALES NO INFORMATIVAS:** Son aquellas distribuciones iniciales que no proporcionan información relevante o importante sobre la ocurrencia de los eventos inciertos θ .
- Existen varios criterios para definir u obtener una distribución inicial no informativa:

1) *Principio de la razón insuficiente:* Bayes (1763) y Laplace (1814, 1952). De acuerdo con este principio, en ausencia de evidencia en contra, todas las posibilidades deberían tenerla misma probabilidad inicial.

- o En particular, si θ puede tomar un número finito de valores, digamos m , la distribución inicial no informativa, de acuerdo con este principio es:

$$f(\theta) = \frac{1}{m} I_{\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}}(\theta)$$

- o ¿Qué pasa cuando el número de valores (m) que puede tomar θ tiende a infinito?

$$f(\theta) \propto \text{cte.}$$

En este caso se dice que $f(\theta)$ es una distribución inicial impropia, porque no cumple con todas las propiedades para ser una distribución inicial propia.

2) *Distribución inicial invariante*: Jeffreys (1946) propuso una distribución inicial no informativa invariante ante reparametrizaciones, es decir, si $\pi_\theta(\theta)$ es la distribución inicial no informativa para θ entonces, $\pi_\varphi(\varphi) = \pi_\theta(\theta(\varphi)) |J_\theta(\varphi)|$ es la distribución inicial no informativa de $\varphi = \varphi(\theta)$. Esta distribución es generalmente impropia.

o La regla de Jeffreys consiste en lo siguiente: Sea $\mathbf{F} = \{f(\mathbf{x}|\theta) : \theta \in \Theta\}$, $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ un modelo paramétrico para la variable aleatoria $\mathbf{X}$. La distribución inicial no informativa de Jeffreys para el parámetro θ con respecto al modelo $\mathbf{F}$ es

$$\pi(\theta) \propto |\det\{I(\theta)\}|^{1/2}, \quad \theta \in \Theta,$$

donde $I(\theta) = -E_{\mathbf{X}|\theta} \left\{ \frac{\partial^2 \log f(\mathbf{X}|\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right\}$ es la matriz de información de Fisher

o EJEMPLO 9: Sea $\mathbf{X}$ una v.a. con distribución condicional dado θ , $\text{Ber}(\theta)$, i.e., $f(\mathbf{x}|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$, $\theta \in (0,1)$.

$$\log f(\mathbf{x}|\theta) = x \log(\theta) + (1-x) \log(1-\theta) + \log I_{\{0,1\}}(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\mathbf{x}|\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{1-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(\mathbf{x}|\theta) = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{1-x}{(1-\theta)^2}$$

$$I(\theta) = -E_{X|\theta} \left\{ -\frac{X}{\theta^2} - \frac{1-X}{(1-\theta)^2} \right\} = \frac{E(X|\theta)}{\theta^2} + \frac{1-E(X|\theta)}{(1-\theta)^2} = \dots = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$\pi(\theta) \propto \left\{ \frac{1}{\theta(1-\theta)} \right\}^{1/2} = \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2} I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\therefore \pi(\theta) = \text{Beta}(\theta|1/2, 1/2).$$

3) *Criterio de referencia*: Bernardo (1986) propuso una nueva metodología para obtener distribuciones iniciales mínimo informativas o de referencia, basándose en la idea de que los datos contienen toda la información relevante en un problema de inferencia.

- o La distribución inicial de referencia es aquella distribución inicial que maximiza la distancia esperada que hay entre la distribución inicial y la final cuando se tiene un tamaño de muestra infinito.
- o Ejemplos de distribuciones iniciales de referencia se encuentran en el formulario.

➤ **DISTRIBUCIONES CONJUGADAS**: Las distribuciones conjugadas surgen de la búsqueda de cuantificar el conocimiento inicial de tal forma que la distribución final sea fácil de obtener de “manera analítica”. Debido a los avances tecnológicos, esta justificación no es válida en la actualidad.

- o Definición: Familia conjugada. *Se dice que una familia de distribuciones de θ es conjugada con respecto a un determinado modelo probabilístico $f(x|\theta)$ si para cualquier distribución inicial perteneciente a tal familia, se obtiene una distribución final que también pertenece a ella.*

- o EJEMPLO 10: Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una m.a. de $\text{Ber}(\theta)$. Sea $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$ la distribución inicial de θ . Entonces,

$$f(\mathbf{x}|\theta) = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n-\sum x_i} \prod_{i=1}^n I_{\{0,1\}}(x_i)$$

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1} I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\Rightarrow f(\theta|\mathbf{x}) \propto \theta^{a+\sum x_i-1} (1-\theta)^{b+n-\sum x_i-1} I_{(0,1)}(\theta)$$

$$\therefore f(\theta|\mathbf{x}) = \frac{\Gamma(a_1+b_1)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b_1)} \theta^{a_1-1} (1-\theta)^{b_1-1} I_{(0,1)}(\theta),$$

donde $a_1 = a + \sum x_i$ y $b_1 = b + n - \sum x_i$. Es decir, $\theta|\mathbf{x} \sim \text{Beta}(a_1, b_1)$.

- o Más ejemplos de familias conjugadas se encuentran en el formulario.

1.4 Problemas de inferencia paramétrica

- Los problemas típicos de inferencia son: estimación puntual, estimación por intervalos y prueba o contraste de hipótesis.
- ESTIMACIÓN PUNTUAL. El problema de estimación puntual visto como problema de decisión se describe de la siguiente manera:
 - o $D = E = \Theta$.
 - o $v(\tilde{\theta}, \theta)$ la pérdida de estimar mediante $\tilde{\theta}$ el verdadero valor del parámetro de interés θ . Considérense tres funciones de pérdida:

1) *Función de pérdida cuadrática:*

$$v(\tilde{\theta}, \theta) = a (\tilde{\theta} - \theta)^2, \text{ donde } a > 0$$

En este caso, la decisión óptima que minimiza la pérdida esperada es

$$\tilde{\theta} = E(\theta).$$

La mejor estimación de θ con pérdida *cuadrática* es la *media* de la distribución de θ al momento de producirse la estimación.

2) *Función de pérdida absoluta:*

$$v(\tilde{\theta}, \theta) = a |\tilde{\theta} - \theta|, \text{ donde } a > 0$$

En este caso, la decisión óptima que minimiza la pérdida esperada es

$$\tilde{\theta} = \text{Med}(\theta).$$

La mejor estimación de θ con pérdida *absoluta* es la *mediana* de la distribución de θ al momento de producirse la estimación.

3) *Función de pérdida vecindad:*

$$v(\tilde{\theta}, \theta) = 1 - I_{B_\varepsilon(\tilde{\theta})}(\theta),$$

donde $B_\varepsilon(\tilde{\theta})$ denota una vecindad (bola) de radio ε con centro en $\tilde{\theta}$.

En este caso, la decisión óptima que minimiza la pérdida esperada cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ es

$$\tilde{\theta} = \text{Moda}(\theta).$$

La mejor estimación de θ con pérdida *vecindad* es la *moda* de la distribución de θ al momento de producirse la estimación.

- EJEMPLO 11: Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ una m.a. de una población $\text{Ber}(\theta)$. Supongamos que la información inicial que se tiene se puede describir mediante una distribución Beta, i.e., $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$. Como demostramos en el ejemplo pasado, la distribución final para θ es también una distribución Beta, i.e.,

$$\theta|\underline{x} \sim \text{Beta}\left(a + \sum_{i=1}^n X_i, b + n - \sum_{i=1}^n X_i\right).$$

La idea es estimar puntualmente a θ ,

- 1) Si se usa una función de pérdida cuadrática:

$$\tilde{\theta} = E(\theta|\underline{x}) = \frac{a + \sum x_i}{a + b + n},$$

- 2) Si se usa una función de pérdida vecindad:

$$\tilde{\theta} = \text{Moda}(\theta|\underline{x}) = \frac{a + \sum x_i - 1}{a + b + n - 2}.$$

- ESTIMACIÓN POR INTERVALO. El problema de estimación por intervalo visto como problema de decisión se describe de la siguiente manera:

- o $\mathbf{D} = \{D : D \subset \Theta\}$,

donde, D es un *intervalo de probabilidad* al $(1-\alpha)$ si $\int_D f(\theta) d\theta = 1 - \alpha$.

Nota: para un $\alpha \in (0, 1)$ fijo no existe un único intervalo de probabilidad.

- o $\mathbf{E} = \Theta$.

- o $v(D, \theta) = \|D\| - I_D(\theta)$ la pérdida de estimar mediante D el verdadero valor del parámetro de interés θ .

Esta función de pérdida refleja la idea intuitiva que para un α dado es preferible reportar un intervalo de probabilidad D^* cuyo tamaño sea mínimo. Por lo tanto,

**La mejor estimación por intervalo de θ
es el intervalo D^* cuya longitud es mínima.**

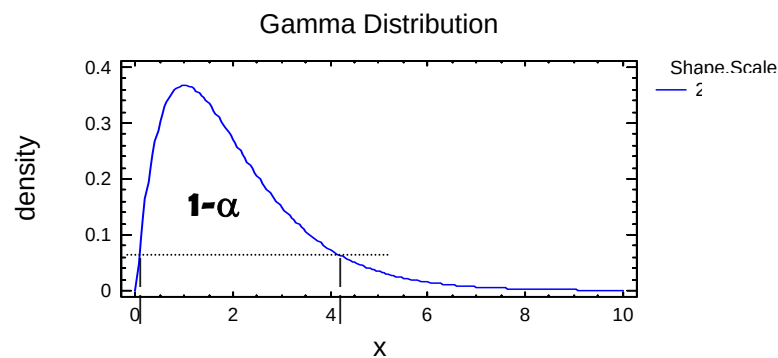
- El intervalo D^* de longitud mínima satisface la propiedad de ser un *intervalo de máxima densidad*, es decir

$$\text{si } \theta_1 \in D^* \text{ y } \theta_2 \notin D^* \Rightarrow f(\theta_1) \geq f(\theta_2)$$

- ¿Cómo se obtiene el intervalo de mínima longitud (máxima densidad)?

Los pasos a seguir son:

- o Localizar el punto más alto de la función de densidad (posterior) de θ .
- o A partir de ese punto trazar líneas rectas horizontales en forma descendiente hasta que se acumule $(1-\alpha)$ de probabilidad.



θ

- CONTRASTE DE HIPÓTESIS. El problema de contraste de hipótesis es un problema de decisión sencillo y consiste en elegir entre dos modelos o hipótesis alternativas H_0 y H_1 . En este caso,

- o $D = E = \{H_0, H_1\}$
- o $v(d, \theta)$ la función de pérdida que toma la forma,

$v(d, \theta)$	H_0	H_1
H_0	v_{00}	v_{01}
H_1	v_{10}	v_{11}

donde, v_{00} y v_{11} son la pérdida de tomar una decisión correcta (generalmente $v_{00} = v_{11} = 0$),

v_{10} es la pérdida de rechazar H_0 (aceptar H_1) cuando H_0 es cierta y

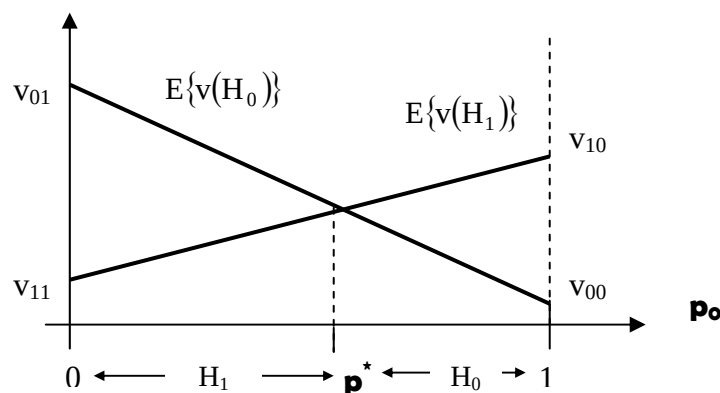
v_{01} es la pérdida de no rechazar H_0 (aceptar H_0) cuando H_0 es falsa.

Sea $p_0 = P(H_0)$ = probabilidad asociada a la hipótesis H_0 al momento de tomar la decisión (inicial o final). Entonces, la pérdida esperada para cada hipótesis es:

$$E\{v(H_0)\} = v_{00}p_0 + v_{01}(1 - p_0) = v_{01} - (v_{01} - v_{00})p_0$$

$$E\{v(H_1)\} = v_{10}p_0 + v_{11}(1 - p_0) = v_{11} - (v_{11} - v_{10})p_0$$

cuya representación gráfica es de la forma:



$$\text{donde, } p^* = \frac{V_{01} - V_{11}}{V_{10} - V_{11} + V_{01} - V_{00}}.$$

Finalmente, la solución óptima es aquella que minimiza la pérdida esperada:

$$\text{si } E\{v(H_0)\} < E\{v(H_1)\} \Leftrightarrow \frac{p_0}{1-p_0} > \frac{V_{01} - V_{11}}{V_{10} - V_{00}} \Leftrightarrow p_0 > p^* \Rightarrow H_0$$

H_0 si p_0 es suficientemente grande comparada con $1-p_0$.

$$\text{si } E\{v(H_0)\} > E\{v(H_1)\} \Leftrightarrow \frac{p_0}{1-p_0} < \frac{V_{01} - V_{11}}{V_{10} - V_{00}} \Leftrightarrow p_0 < p^* \Rightarrow H_1$$

H_1 si p_0 es suficientemente pequeña comparada con $1-p_0$.

$$\text{si } p_0 = p^* \Rightarrow H_0 \text{ ó } H_1$$

Indiferente entre H_0 y H_1 si p_0 no es ni suficientemente grande ni suficientemente pequeña comparada con $1-p_0$.