CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 3
(Respuestas)

1. $f_X(x) = \begin{cases} 1/10 & , \text{ si } x \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \\ 0 & , \text{ e.o.c.} \end{cases}$

2. a) $f(x) = \dfrac{\binom{6}{x}\binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}} I_{\{0,1,2,3,4,5,6\}}(x)$

b) $f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{n-x} I_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x)$

3. Para que sea función de densidad tiene que sumar 1 en todos sus puntos y además tiene que ser mayor igual a cero, entonces

$c = \dfrac{1}{2^{n+1}-2}$

4. a) P(X es negativa) = 0.3
   b) P(X es impar) = 0.7
   c) $P(1 \le X \le 8) = 0.55$
   d) $P(X = -3 \mid X \le 0) = 0.222$ (Usar definición de probabilidad condicional).
   e) $P(X \ge 3 \mid X > 0) = 0.4545$.

5. a) $f(x) = (2x-1)\left(\frac{1}{12}\right)^2 I_{\{1,2,\ldots,12\}}(x)$

b) $f(x) = 2(x-1)\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{11}\right) I_{\{2,3,\ldots,12\}}(x)$

6. a) $P(Y \le y) = F_Y(y) = \begin{cases} 0 & , \ y < n \\ \dfrac{{}_yC_n}{{}_rC_n} & , \ n \le y \le r \\ 1 & , \ y \ge r \end{cases}$

b) $P(Z \ge z) = \dfrac{(r-z+1)(r-z)\cdots(r-z-n+2)}{r(r-1)\cdots(r-n+1)} \quad , \quad z = 1,2,\ldots, r-n+1$

7. a) P(a lo más se tire el dado 6 veces) = 0.6651
   b) con 4 o más tiros la P(un 6) $\ge$ 0.5.

8. $P(|X - 1| \ge 2) = 1 - F_X(3) + F_X(-1)$

9.

$F_X(x) = \dfrac{x}{R^2} I_{[0,R^2]}(x) + I_{[R^2,\infty]}(x)$

$f_X(x) = \dfrac{1}{R^2} I_{[0,R^2]}(x)$

10.

$$F_X(x) = \frac{2\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}s^2}}{s} I_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}s,s\right]}(x) + I_{(s,\infty)}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{4x}{s\sqrt{4x^2 - 3s^2}} I_{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}s,s\right]}(x)$$

11. a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 - \dfrac{(2-x)^2}{2} & , \quad 1 < x \le 2 \\ 1 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & , \quad 1 < x \le 2 \\ 0 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

12. a) $P(1/2 \le X \le 3/2) = 7/12$
b) $P(1/2 \le X \le 1) = 1/3$
c) $P(1/2 \le X < 1) = 1/6$
d) $P(1 \le X \le 3/2) = 5/12$
e) $P(1 < X < 2) = 1/2$
f) $f(x) = \frac{1}{3} I_{(0,1)}(x) + \frac{1}{2} I_{(1,2)}(x) + \frac{1}{6} I_{\{1\}}(x)$

13. a) Encuentre $P(1 \le |x| \le 2) = 0.2325$
b) $F(x) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{-x}\right) I_{[0,\infty)}(x) + \frac{1}{2}e^{x} I_{(-\infty,0)}(x)$

14. $f(x) = \dfrac{1}{2(|x|+1)^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty$

$F'(x) = f(x)\ \forall x$.

15. $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} I_{(-1,1)}(x)$

16. Las condiciones en términos de la distribución acumulada de X son:
$F(a+x) + F(a-x) = 1$.

17. a) Hay que demostrar que:

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

ii) $f(x) \ge 0 \quad \forall x$

b) La afirmación es falsa porque para que sea verdadera θ_1 y θ_2 tienen que ser mayores o iguales a cero.

18. Demostrar las condiciones de la pregunta anterior inciso a).

19. $k = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} = 1.1067$

20. a)

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0\\ 9/16 & , \ 0\le x<1\\ 15/16 & , \ 1\le x<2\\ 1 & , \ x\ge 2\end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases}9/16 & , \ x=0\\ 3/8 & , \ x=1\\ 1/16 & , \ x=2\\ 0 & , \ \text{e.o.c.}\end{cases}$$

21. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x} I_{\{1,2,\ldots\}}(x)$

22. a) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x} I_{\{1,2,\ldots\}}(x)$

b) P(B gane) = P(X sea par) = 1/3.

23. a) Demuestre las 2 condiciones que debe cumplir cualquier función de densidad,

b)

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x\le \alpha-\beta\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta}+\dfrac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2}+\dfrac{1}{2} & , \ \alpha-\beta\le x<\alpha\\ \dfrac{x-\alpha}{\beta}-\dfrac{(x-\alpha)^2}{2\beta^2}+\dfrac{1}{2} & , \ \alpha\le x<\alpha+\beta\\ 1 & , \ x\ge \alpha+\beta\end{cases}$$

24. k=3/4.

25. a) $P(X\le 40)=0.64$

b) Sea Y=v.a que cuenta el número de intentos necesarios para obtener un éxito.

$P(Y\ge 1) = 1 - P(Y=0) = 0.953$

26.

$$f(x)=\begin{cases}7/24 & , \ x=0\\ 11/24 & , \ x=1\\ 5/24 & , \ x=2\\ 1/24 & , \ x=3\\ 0 & , \ \text{e.o.c.}\end{cases}$$

27. a) $F(x)=\left(x^2+0.2\right) I_{[0,0.5)}(x)+x\, I_{[0.5,1)}(x)+I_{[1,\infty)}(x)$

b) $f(x)=2x\, I_{[0,0.5)}(x)+I_{[0.5,1)}(x)+0.2 I_{\{0\}}(x)+0.05 I_{\{0.5\}}(x)$

c) Calcule $P(0.25 < X < 0.75) = 0.4875$

d) Calcule $P(0.25 < X < 0.5) = 0.1875$.

28. Demostrar los 4 puntos que debe de cumplir cualquier función de distribución acumulada.

29. Demostrar los dos puntos que debe de cumplir cualquier función de densidad.

30. a) $P(X\ge 2) = 0.7$

b) $P(X\le 3 | X\ge 1) = 2/3$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & , \quad w = 0 \\ 0.2 & , \quad w = 1 \\ 0.4 & , \quad w = 2 \\ 0.3 & , \quad w = 4 \\ 0 & , \quad e.o.c. \end{cases}$$