Cálculo de Probabilidades II
Respuestas Tema 3

1. Sean X y Y v.a. con segundo momento finito

   (a) La desigualdad de Cauchy - Schwarz se da sii

   $$P(Y = a + bX) = 1$$

   para constantes a, b $\in \Re$, b $\neq$ 0.

   (b)

   $$|\rho_{X,Y}| = 1 \leftrightarrow \exists a, b \in \Re \quad con \quad b \neq 0$$

   tal que y = a + bx con probabilidad 1.

   (c)

   $$\begin{aligned} V(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i) &= \sum_{i=1}^{n} V(c_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 Var(x_i) + 2 \sum_{i<j} c_i c_j Cov(x_i, x_j) \end{aligned}$$

   $$\rho(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{j=1}^{m} b_j y_j) = \frac{cov(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{j=1}^{m} b_j y_j)}{\sigma_{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}, \sigma_{\sum_{j=1}^{m} b_j y_j}}$$

   $$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j cov(x_i, y_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a^2 Var(x_i) + 2 \sum_{i<j} a_i a_j Cov(x_j, x_i)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b^2 Var(y_i) + 2 \sum_{i<j} b_i b_j Cov(y_j, y_i)}}$$

2. Sea

   $$\bar{x_p} = 60 \qquad \sigma^2 = 64$$

   Una generacion de n = 100 tuvo $\bar{x_m} = 58$

   $$\begin{aligned} P(\bar{x_m} \leq 58) &= P(z_m \leq -0.5) \\ &= 1 - \phi(.25) \\ &= 0.4013 \end{aligned}$$

   Si se puede afirmar eso porque la probabilidad de que alguna generaccion tenga promedio menos o igual a 5.8 es poco menos que 0.5.

3. Sea X = sobrevivientes, Y = sobrevivir y P(Y) = 0.85

   (a)

   $$P(X \geq 50) = 1 - \phi(9.80)$$

   (b)

   $$P(X \geq 5) = 1 - \phi(5.60)$$

4. Sea X = numero de votantes

   (a)

$$P(X \geq 90) = P(Z \geq \frac{90 - 200(\frac{1}{2})}{\sqrt{200 * \frac{1}{2}\frac{1}{2}}})$$
$$= 1 - \phi(-1.41)$$
$$= \phi(1.41)$$

   (b)

$$P(X \geq 90) = P(Z \geq -0.4472)$$
$$= \phi(0.4472)$$

5. Sea Y = numero de reclamos. Obtener un estimador de probabilidad de Y.

$$P(Y = 0) = 0.8939$$
$$P(Y = 1) = 0.0728$$
$$P(Y = 2) = 0.03193$$
$$P(Y = 3) = 0.00128$$
$$E(Y) = 0.1405$$

   Sea

$$n = 100 \rightarrow 100 * E(Y) = 14.05$$

   (numero promedio de reclamos totales) Sea X = monto de reclamo

   (a)

$$F_X = 1 - e^{-0.001x} I_{\Re^+}(x)$$

   (b)

$$f_X = (0.001)e^{-0.001x}$$

   (c)

$$E(X) = \int_0^\infty (0.001)xe^{-0.001x}\mathrm{d}x = 1000$$

   (d)

$$El \quad costo \quad esperado \quad de \quad los \quad reclamos \quad es \quad 100 * 1000$$

   (e)

$$V(X) = 1000000$$
$$\sigma_X 1000, \quad 100 \quad casos = 100000$$

6. Por demostrar que

$$|\rho| = 1 \leftrightarrow \exists \quad a, \quad b \in \Re, b \neq 0$$

Y

$$P(Y = a + bx) = 1$$

Demostracion con la desigualdad de Cauchy Schwarz

Sea X_1 y X_2 v.a. con segundos momentos finitos.

$$|E(X_1 X_2)| \leq \sqrt{E(X_1^2)E(X_2^2)}$$

Sea

$$y_1 = x_1 - \mu_1 \quad y_2 = x_2 - \mu_2$$

$$\begin{aligned} \to E(y_1 y_2) &= E[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)] \\ &= Cov(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(y_1^2) &= Var(x_1) \\ E(y_2^2) &= Var(x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &|E(y_1 y_2)| \leq \sqrt{E(y_1^2)E(y_2^2)} \\ &\leftrightarrow |Cov(x_1, x_2)| \leq \sqrt{Var(x_1)Var(x_2)} \\ &\leftrightarrow \frac{|cov(x_1, x_2)|}{\sqrt{Var(x_1)Var(x_2)}} \leq 1 \\ &\leftrightarrow |\rho_{x_1, x_2}| \leq 1 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} &X_k \sim \chi_k^2 \\ &lim_{k \to \infty} \frac{\chi_k^2(x)}{k} = N(1, \sqrt{\frac{2}{k}})(x) \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} &P(|\bar{X}_n - \bar{X}| < \frac{\sigma}{4}) \leq 0.99 \\ &\leftrightarrow 1 - P(|\bar{X}_n - \bar{X}| \geq \frac{\sigma}{4}) = 1 - 0.99 \\ &\leftrightarrow P(|\sum x_i - \mu| \geq \frac{n\sigma}{4}) \leq 0.99 \end{aligned}$$

Como $0.99 = \frac{\sigma^2}{k^2}$ por la desigualdad de Chebyshev

$$\to n = 4$$

9. Sea n = 48, X = numero original y Y = numero redondeado

$$X = \sum x_i$$
$$Y = \sum y_i$$

$$\epsilon \sim U(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$
$$\sigma_\epsilon^2 = \frac{1}{12}$$

$$P(|X - Y| \leq 2) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}, k = 2$$
$$\rightarrow P(|X - Y| \geq 2) \leq \frac{1}{48}$$