CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 1

1.Una urna contiene tres pelotas rojas, dos pelotas blancas y una pelota azul. Una segunda urna contiene una pelota roja, dos pelotas blancas y tres pelotas azules.

a) Una pelota es seleccionada al azar de cada urna.
a.1) Describa el espacio muestral para este experimento.
a.2) Encuentre la probabilidad de que ambas pelotas sean del mismo color
a.3) ¿La probabilidad de que ambas pelotas sean rojas es mayor que la probabilidad de que sean blancas?
b) Las pelotas de las dos urnas son mezcladas en una sola urna, y posteriormente se extrae una muestra de tres pelotas. Encuentre la probabilidad de que los tres colores estén representados en la muestra cuando i)la selección se hace con reemplazo, y ii)la selección se hace sin reemplazo.

2.Demostrar la verdad o falsedad de una de las siguientes afirmaciones.

a) Si P(A) = P(B) = p, entonces $P(A \cap B) \leq p^2$.
b) Si $P(A) = P(B^c)$, entonces $A^c = B$.
c) Si P(A) = 0, entonces $A = \varnothing$.
d) Si P(A) = 0, entonces $P(A \cap B) = 0$.

3.Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$, , eventos en un σ-álgebra $\mathcal{A}$. Demostrar lo siguiente,

$$P\left[\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right] = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j}\sum P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots\ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)$$

4.Si A y B son independientes con P(A) = P(B) = 1/2, encontrar $P[(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)]$.

5.Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, donde $\mathcal{A}$ es el σ-álgebra de todos los subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad que le asigna probabilidad $p > 0$ a cada punto de Ω.
a)Demuestre que Ω debe tener un número finito de puntos. Hint: demuestre que Ω no puede tener más de p^{-1} elementos.
b)Demuestre que si n es el número de elementos en Ω, entonces p debe ser n^{-1}.

6.Supóngase que un punto es escogido al azar en el cuadrado unitario. Sea A el evento de que el punto esté en el triángulo delimitado por las líneas y = 0, x = 1, y x = y, y sea B el evento de que el punto esté en el rectángulo con vértices (0,0), (1,0), (1,1/2), (0,1/2). Calcule $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.

7.Un modelo para un apuntador circular aleatorio puede construirse considerando un espacio de probabilidad uniforme sobre la circunferencia de un círculo de radio 1, de tal manera que la probabilidad de que el indicador caiga en un arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo está dividido en treinta y siete zonas idénticas numeradas 1,2,...,37. Calcule la probabilidad de que el apuntador pare en una zona con número par.

8.Supónga que las 6 caras de un dado tienen la misma probabilidad de ocurrir y que los lanzamientos sucesivos del dado son independientes. Defina un espacio de probabilidad para el experimento de lanzar el dado 3 veces.

9.Supónga que la probabilidad de acertarle a un blanco es 1/4. Si se disparan 8 tiros al blanco, ¿cuál es la probabilidad de que se acierte en por lo menos 2 ocasiones?

10.Un punto es seleccionado aleatoriamente en el cuadrado unitario, y se sabe que está en el triángulo delimitado por x = 0, y = 0, x + y = 1, encuentre la probabilidad que el punto también se encuentre en el triángulo delimitado por y = 0, x = 1, y x = y.

11. Un hombre tiene *n* llaves, y solamente una de ellas abre la cerradura de la puerta de su casa. Él intenta abrir con una llave a la vez y en cada intento escoge aleatoriamente una llave de las que no ha probado. Encuentre la probabilidad de que la *r*-ésima probada sea la llave correcta.

12. Un autobús empieza su recorrido con 6 personas y realiza 10 paradas en diferentes lugares. Suponga que todos los pasajeros tienen la misma probabilidad de bajarse en cualquier parada. Encuentre la probabilidad de que no bajen dos o más pasajeros en la misma parada.

13. Suponga que una persona tiene *r* cajas y que aleatoriamente coloca pelotas en las cajas, una por una, hasta que alguna caja tenga 2 pelotas. Encuentre la probabilidad de que ésto ocurra con la *n*-ésima pelota.

14. Si Samuel y Pedro están en una fila de *n* personas formadas aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente *k* personas estén en medio de ellos?

15.-Demuestre que:

$$\left(1-\frac{n-1}{s}\right)^{n-1} \leq \frac{{}_sP_n}{s^n} \leq \left(1-\frac{1}{s}\right)^{n-1}$$

16. Se seleccionan al azar, una por una, cartas de una baraja con 52 cartas, hasta que aparece el primer rey. Encuentre la probabilidad de que ésto ocurra con la *n*-ésima carta seleccionada.

17. En una población compuesta de r elementos se tiene k elementos con cierta característica A. De esta población se selecciona una muestra aleatoria de tamaño n.
   a) Encuentre la probabilidad de que ninguno de los elementos con la característica A se encuentre en la muestra, si la selección se realiza: a.1) con reemplaza y a.2) sin reemplazo.
   b) Si la selección se realiza sin reemplazo, ¿cuál es la probabilidad de que todos los elementos con la característica A se incluyan en la muestra?

18. Una caja contiene 50 fusibles de los cuales 10 están defectuosos. Si se seleccionan al azar 10 fusibles de la caja, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los fusibles sea defectuoso?

19. ¿Cuál es la probabilidad de que las manos de bridge correspondientes a una pareja de jugadores (un total de 26 cartas) tengan exactamente 3 ases?

20. Usted posee 3 boletos de una rifa en la cual se vendieron *n* boletos. Si se van a dar 5 premios, ¿cuál es la probabilidad de que usted gane al menos un premio?

21. Se tienen dos cajas y cada una contiene *r* bolas numeradas 1,2,...,r. Una muestra aleatoria de tamaño $n \leq r$ es tomada sin reemplazo de cada caja. Encuentre la probabilidad de que las muestras contengan exactamente *k* bolas con los mismos números.

22. Cuatro bebedores (I, II, III y IV) van a catalogar 3 diferentes marcas de cerveza (A, B y C) en una prueba ciega. Cada bebedor califica las 3 cervezas asignando 1 a la que considera la mejor, 2 a la siguiente y 3 a la menos preferida. Posteriormente se suman las calificaciones de los cuatro bebedores para cada marca. Suponga que los bebedores no pueden en realidad discriminar entre las cervezas, es decir, cada calificación es asignada aleatoriamente.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la cerveza A reciba una calificación total de 4?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba una calificación total de 4?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que alguna cerveza reciba una calificación total de 5 o menos?

23. Los siguientes 3 problemas son considerados problemas clásicos en probabilidad.
   a) (Galileo y Duque of Toscani) Compare la probabilidad de un total de 9 con un total de 10 cuando 3 dados honestos son lanzados una vez.

b) (Chevalier de Méré) Compare la probabilidad de que se obtenga al menos un 6 en 4 lanzamientos de un dado honesto con la probabilidad de que se obtenga al menos un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados honestos.

c) (Correspondencia a Newton) Compare la probabilidad de obtener al menos un 6 cuando seis dados son lanzados con la probabilidad de obtener al menos dos seises cuando doce dados son lanzados.

24. Un vendedor tiene una docena de pequeños motores eléctricos, dos de los cuales no funcionan. Un cliente está interesado en la docena de motores. El vendedor puede empaquetar los 12 motores en una caja o bien poner 6 en cada una de dos cajas. Él sabe que el cliente va a inspeccionar 2 de los 12 motores si todos están una caja, o uno de cada caja si están en dos cajas. El vendedor tiene 3 estrategias para vender los dos motores fallidos: i) empacar los 12 en una caja; ii) poner uno de los motores fallidos en cada caja chica; o iii) poner ambos motores fallidos en una caja chica y en la otra ningún motor fallido. ¿Cuál es la probabilidad de que el cliente no encuentre los motores fallidos en cada una de las estrategias?

25. La tradición nos dice que en ciertas áreas rurales de Rusia el matrimonio de una joven se determinaba de la siguiente manera: La joven sostenía en su mano 6 listones por la parte media, de manera que las puntas se encontraran por arriba y por abajo de la mano. El joven pretendiente debía amarrar por pares las 6 puntas que salían por arriba, y después amarrar las 6 puntas de abajo, también en pares. Si el joven amarró los 6 listones en un solo círculo, entonces la boda se realizaría en menos de un año.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se forme un solo círculo si los listones fueron amarrados aleatoriamente?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que se formen dos o más círculos?

26. Mr. Bandit, un bien conocido ranchero, pero no bien conocido ladrón de ganado, tiene 20 cabezas de ganado listas para vender. Dieciséis de estas cabezas son suyas y consecuentemente llevan su propia marca. Las otras cuatro llevan marcas ajenas. Mr. Bandit sabe que el inspector de marcas revisa el 20% del ganado de cualquier cargamento. Él tiene dos camiones, uno de los cuales puede cargar a las 20 cabezas a la vez, y el otro puede cargar sólo 10 cabezas. Mr. Bandit considera 4 estrategias en su intento de llevar el ganado al mercado para venderlo sin que sea descubierto: 1) enviar en un solo cargamento las 20 cabezas, 2) enviar dos cargamentos de 10 cabezas cada uno, en donde las 4 cabezas robadas se encuentran en uno de los viajes, 3) se envían dos cargamentos de 10, uno con 3 cabezas robadas y el otro con una, y 4) se envían dos cargamentos de 10, cada uno con dos cabezas robadas. ¿Qué estrategia minimiza la probabilidad de que Mr. Bandit sea descubierto?.