Cálculo de Probabilidades II
Preguntas Tema 1

1. Suponga que un experimento consiste en lanzar un par de dados, Sea $X \sim$ El número máximo de los puntos obtenidos y $Y \sim$ Suma de los puntos obtenidos. Obtenga la función de probabilidad conjunta de (X, Y).

2. Si $X|p \sim Binomial(n, p)$ y $p \sim Uniforme(0, 1)$. Encontrar $f_X(x)$ $E(X)$ y $Var(X)$.

3. Si la función de probabilidad conjunta de X,Y,Z está dada por

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = c(x + y)zI_{\{1,2,3,4\}}(x)I_{\{1,2,3,4,5\}}(y)I_{\{1,2\}}(z)$$

4. Un hombre y una mujer deciden reunirse en cierto lugar. Si el tiempo de llegada de cada individuo es independiente y tiene una distribución Uniforme entre las 12:00 y 13:00, encuentre la probabilidad de que la primera persona que llegue tenga que esperar al menos 10 min. a la otra persona.

5. Si $f(x, y) = 24xyI_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)I_{(0,1)}(x + y)$. Son X y Y v.a independientes?

6. Un sociólogo dice que los padres suelen mimar más a sus hijos aplicados que a sus hijos flojos. Para probarlo, preguntó a 3200 estudiantes cuántos viajes al extranjero habían realizado el año pasado y cuántas materias habían reprobado. los resultados fueron los siguientes

Y, X	0	1	2	3	4	Total
0	187	300	150	225	338	1200
1	156	250	125	189	280	1000
2	125	200	100	150	225	800
3	32	50	25	36	57	200

Donde $X \equiv$ No. de viajes y $Y \equiv$ No. de materias reprobadas. Obtenga:

(a) La función de probabilidad conjunta.
(b) Las distribuciones marginales.
(c) Las distribuciones condicionales.
(d) $P[Y < 2]$, $P[X < 2]$, $P[Y = 0 \mid X = 3]$, $P[Y < 3 \mid X = 3]$, $P[Y \geq 3 \mid X = 3]$.
(e) Son independeintes X y Y ?. Justifique.
(f) Qué puede concluir el sicólogo?

7. De una agencia que vende automóviles se seleccionaron al azar dos coches para ser inspeccionados. La agencia cuenta con 3 Volkswagen, 2 Ford y 4 Nissan. Sean X y Y las v.a que denotan el número de Volkswagen y el número de Nissan seleccionados, respectivamente.

(a) Obtenga la distribución de probabilidad conjunta de X y Y.

(b) Obtenga $P\left[X=2 \mid Y=0\right]$, $P\left[X+Y \leq 1\right]$, $P\left[Y \leq 1 \mid X=1\right]$.

(c) Obtenga $F_{X,Y}(\cdot,\cdot)$, $F_X(\cdot)$, $F_Y(\cdot)$, $F_{X|Y}(\cdot,\cdot)$, $f_{X|Y}(\cdot,\cdot)$, $f_X(\cdot)$, $f_Y(\cdot)$, $f_{Y|X}(\cdot,\cdot)$.

8. En cada caso obtener el valor de c, las densidades marginales, la distribución acumulada conjunta, las acumuladas marginales y averiguar independencia de las variables.

   (a) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{bmatrix} cy & 0 \leq x \leq y \leq 2 \\ 0 & e.o.c \end{bmatrix}$

   (b) $f_{X,Y}(x,y) = \begin{bmatrix} ce^{-x}e^{-2y} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & e.o.c \end{bmatrix}$

   (c) $f_{X,Y}(x,y) = c(x+y)I_{(0,2)}(x)I_{(0,1)}(y)$

9. Si $f(x,y) = \left[\left(e^{-x/y}e^{-y}\right)/y\right] I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$. Encuentre $P(X>1 \mid Y=y)$.

10. Si $f(x,y) = \frac{15}{2}x(2-x-y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$. Obtenga $f_{X|Y}(x \mid y)$.

11. Sea $f(x,y) = \frac{21}{4}x^2yI_{(-1,1)}(x)I_{(x^2,1)}(y)$. Encuentre:

   (a) $P(X \leq Y \mid X \geq 2Y)$.

   (b) $P(X^2+Y^2 \leq 1)$.

   (c) $P(X^2+Y^2 \leq 1 \mid Y=1/2)$.

12. Sean $x_1,...,x_n$, n v.a independientes tal que $X_i|M=\mu \sim N(\mu,\sigma^2)$ con σ^2 conocida. Si $M \sim N(\mu_0,\sigma_0^2)$ con μ_0 y σ_0^2 conocidas, obtenga la distribución condicional de $M|(X_1,..,X_n)$.

13. Sean X,Y,Z variables aleatorias con función de densidad conjunta

$$f(x,y,z) = 8xyz\ I_{(0,1)^3}(x,y,z)$$

   (a) Encontrar $\mathrm{P}(X<Y<Z)$

   (b) ¿Cuáles son las funciones de densidad marginales de cada una de las tres variables aleatorias?

   (c) Calcular el coeficiente de correlación entre Y y Z.

14. En una caja se tienen tres bolas con números 1, 2 y 3. Dos bolas son seleccionadas al azar y sin reemplazo de la caja. Sea X el número de la primera bola y Y el mayor de los dos números seleccionados.

   (a) Obtener la función de densidad conjunta de X y Y.

   (b) Calcular $\mathrm{P}(X=1|Y=3)$

   (c) Calcular $\mathrm{COV}(X,Y)$ y $\rho_{X,Y}$.

15. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{8}e^{-x}(x^2 - y^2)I_{(0,\infty)}(x)I_{(-x,x)}(y)$$

   (a) Calcular $\mathrm{P}(X < 1, Y < 0)$
   (b) Encontrar la densidad condicional de Y dado que $X = x$.
   (c) Obtener el coeficiente de correlación entre X y Y.
   (d) Calcular el valor esperado y la desviación estándar de $W = 2X + Y$.

16. Suponga que el 15% de las familias en cierta comunidad no tienen hijos, 20% tienen uno, 35% tienen dos, y 30% tienen tres; además, suponga que en cada familia es igualmente probable que un hijo sea niña o niño. Si una familia se elige aleatoriamente de la comunidad y B es el número de niños, y G el número de niñas en dicha familia, ¿cuál es la distribución conjunta de B y G?.

17. Considere $n + m$ ensayos cada uno con una misma probabilidad de éxito. Además, suponga que esta probabilidad de éxito resulta de haber observado el valor de una variable aleatoria uniforme en (0,1). ¿Cuál es la distribución condicional de la probabilidad de éxito, dado que en los $n + m$ ensayos hubo n éxitos?

18. Sean X y Y dos v.a. con f.d.c dada por $f(x,y) = cxyI_{\{1,2,3\}}(x)I_{\{2,3,4\}}(y)$.

   (a) Obtenga el correspondeinte valor de c.
   (b) Calcule la $P(X \geq 2, Y \leq 3)$.
   (c) Obtenga la $Var(X)$.
   (d) Calcule $Cov(X,Y)$ y $\rho(X,Y)$.
   (e) Son X y Y independeintes?
   (f) Calcule $Var(5X - 3Y)$.

19. Se lanza un dado honesto. Sea X=No. de puntos observados, luego se lanza una moneda X veces. Sea Y=No. de soles obtenidos. Encontrar:

   (a) $E(Y \mid X = 1)$.
   (b) $E(Y \mid X = 2)$.
   (c) $E(Y \mid X = 3)$.
   (d) $E(Y)$.

20. Si $X \sim Poisson(\lambda)$. Obtener la $E(X \mid X \geq 2)$ y $E(X \mid |X| \leq 4)$.

21. Una urna I contiene 2 bolas negras y una blanca, una urna II contiene 2 rojas y 1 amarilla. Se eligen 2 bolas de la urna I, sin remplazo y sin orden. Sea Y el No. de bolas negras en la muestra. Por otro lado, se eligen Y bolas de la urna II, sea X el No. de bolas rojas en la muestra. Obtenga $E(X \mid Y)$, $E(X)$, $V(X \mid Y)$, $V(X)$.

22. Si $X \sim Poisson(\Lambda)$ y $\Lambda \sim Exponencial(1)$. Obtener $E(X)$ y $V(X)$.

23. Si $X \sim Exponencial(\lambda)$. Obtener $E(X \mid X > a)$, $\forall\ a > 0$

24. Sean X y Y v.a. con segundo momento finito.

    (a) Existe alguna condición necesaria y suficiente para que $|\rho(X, Y)| = 1$?

25. Si X y Y son variables aleatorias, es razonable pensar que si $X = x$, entonces la esperanza y la varianza condicionales de Y, dado $X = x$, son en general funciones del valor específico x. Si ahora se piensa en la esperanza condicional de Y dado X, pero sin especificar un valor particular de ésta última variable, resulta que $E_Y(Y|X)$ es una variable aleatoria pues es función de X. Lo mismo puede decirse de la varianza condicional $V_Y(Y|X)$.

26. En clase se dieron las cuatro condiciones que debe cumplir una funcin para ser una funcin de distribucin acumulada en R2. Demostrar que la funcin

$$F_{X,Y} = \begin{cases} 0 & x + y < 0, \\ 1 & x + y \geq 0. \end{cases}$$

    satisface las tres condiciones 1,2 y 4 pero no as la tercera.

27. Sea

$$f_X = \begin{cases} 1 & \text{c.p.}\frac{1}{2}, \\ 2 & \text{c.p.}\frac{1}{4}, \\ 3 & \text{c.p.}\frac{1}{4}. \end{cases}$$

    (a) Calcula su funcion generadora de momentos.
    (b) Calcula su esperanza con la FGM.
    (c) Calcula el segundo momento.
    (d) Calcula la varianza.

28. Sean X y Y v.a. continuas con funcin de densidad dada por

$$f_{X,Y} = \begin{cases} 0 & \text{e.o.c}, \\ \lambda^2 e^{\lambda y} & 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

    (a) Encuentra las densidades marginales de X y Y.
    (b) Encuentra la funcin de distribucin conjunta de X y Y.
    (c) Encuentra la densidad condicional de Y dado X

29. Demostrar que

$$|\rho| = 1 \leftrightarrow \exists \quad a, \quad b \in \Re, b \neq 0$$

    tales que

$$P(Y = a + bx) = 1$$

30. Sean ahora $X_1, X_2, ..., X_n$ v.a.i.i.d. con distribucin χ^2_2,. Determinar la densidad de $W = (X_1 - X_2)/2$. Nota: esta densidad se denomina doble exponencial.

31. La fuerza magntica H de un punto P situado a X unidades de distancia de un alambre que transporta una corriente W, est dada por $H = 2X/W$. Si $X \sim U(3,5)$ y $W \sim U(10,20)$, calcular el valor esperado de H. Suponer que X y W son independientes.

32. Si $X \sim Exponencial(\lambda)$ y $\lambda \sim Exponencial(\theta)$.Encontrar $f_X(x)$.

33. Muestre que una condición necesaria y suficiente para que dos v.a X y Y sean independientes es que $f(x,y) = h(x)g(y)$. Es decir, que la función de densidad conjunta se pueda factorizar como un producto de dos funciones, una que sólo dependa de X y otra que sólo dependa de Y.

34. Si $f(x,y) = 4e^{-2x}e^{-2y}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$. Obtenga $P(X > 1, Y < 1)$, $P(X < Y)$ y $P(X < a)$ para cualquier a $\in \Re$.

35. Sea $f(x,y) = 3xI_{(0,x)}(y)I_{(y,1)}(x)$. Encuentre:

    (a) $P(X \geq 1/2 \mid Y \leq 2X)$.
    (b) $P(X^2 + Y^2 \leq 1/2)$.
    (c) $P(X^2 \geq 1/2 \mid X + Y \leq 1)$.
    (d) $P\left[(X \geq 1/2) \cup (Y \leq 1/2)\right]$.

36. Sea $f(x, y \mid \theta_1, \theta_2) = C(\theta_1, \theta_2) \exp\{\theta_1 x + \theta_2 y\} I_A(x,y)$ una función de densidad conjunta. Obtenga el valor de la constante $C(\theta_1, \theta_2)$ si el conjunto A es:

    (a) El círculo unitario.
    (b) El cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$.

    - **Nota**: Se puede obtener el valor de la constante numéricamente, recomendación: usar Maple V.

37. Con el objeto de mejorar la información sobre una magnitud θ, se realizan n mediciones independientes $X_1, ..., X_n$, condicionadas en θ cada una de las cuales tiene una distribución Bernoulli con parámetro θ. Si la distribución sobre θ es una distribución Beta, con parámetros α y β. Obtenga la distribución condicional de θ dado $X_1, ..., X_n$.

38. Ahora suponga que el parámetro de interés es la precisión τ (el inverso de la varianza) de una distribución Normal, con parámetros μ y $\tau = 1/\sigma^2$, con μ conocida, y además suponga que la distribución de r puede modelarse por medio de una distribución Gamma, con parámetros α y β. Con el objeto de mejorar la apreciación inicial de τ, se obtiene una muestra aleatoria $X_1, ..., X_n$ de la distribución $N(x \mid \mu, \tau)$. Observe como se mejora la apreciación inicial, obteniendo la correspondiente distribución final de τ dado $X_1, ..., X_n$.

- Note que la f.d.p de una $Normal$, en términos de la precisión $\tau = 1/\sigma^2$, se ve de la siguiente manera:

$$f_X(x \mid \mu, \tau) = \frac{\tau^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau(x-\mu)^2}{2}} I_{\Re}(x) I_{\Re}(\mu) I_{\Re^+}(\tau) \tag{1}$$

39. Un juego al que llamaremos 3-bin se realiza en dos etapas. En la primera se elige al azar una de tres bolas numeradas del uno al tres. Sea X la v.a. que denota el número de la bola seleccionada. En la segunda parte del juego se lanza una moneda (honesta) tantas veces como lo indica el valor observado de X. Un jugador gana cierta cantidad si al lanzar la moneda obtiene sol. Sea Y la v.a. que corresponde al número de veces que un jugador gana al participar en el juego.

    (a) Obtener la distribución conjunta y las distribuciones marginales de X y Y.

    (b) ¿Existe alguna relación lineal entre X y Y?

    (c) Supongamos que por \$100 se puede jugar 6 veces, y que la cantidad que se gana al obtener un sol es de \$20. Con estas condiciones, ¿estaría usted dispuesto a pagar los \$100?

40. Tres monedas se lanzan diez veces. Sea X_i el número de veces que se obtuvieron i soles, i = 0,1,2,3. Claramente $\sum X_i = 10$. Encontrar $P(X_0 = 2, X_1 = 4, X_2 = 3, X_3 = 1)$, $P(X_2 < 2), P(X_2^2 < 5)$, $P(X_0 + X_1 = 8), P(X_2 < 2 \mid X_1 = 5, X_0 = 3)$.

41. Sea $\mathbf{Y}$ un vector aleatorio de dimensión k con distribución $N(\mu, \Sigma)$. Consideremos la siguiente partición del vector $\mathbf{Y}$ y las correspondientes particiones de μ y Σ,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \sum = \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{pmatrix}$$

Demostrar lo siguiente: la distribución condicional de $\mathbf{Y}_1$ dado que $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2$, es una distribución normal multivariada con media y matriz de covarianzas dadas, respectivamente, por

$$\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{y}_2 - \mu_2) \quad , \quad \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Ojo: En algún momento se tendrá que utilizar el siguiente resultado: sea A una matriz cuadrada tal que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}_{22}$ es no singular, entonces $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{22}| \left|\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right|$

42. Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con distribución $N(\mu, \Sigma)$, en donde

$$\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Mostrar que $\mathbf{\Sigma}$ es no singular.

(b) Calcular el coeficiente de correlación entre X_1 y X_3.

(c) Sea $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{d}$, en donde,

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calcular el valor esperado y la varianza del vector $\mathbf{Y}$.