ESTADISTICA MATEMATICA

Tarea 1

1. Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una m.a. de la densidad $N(0,\sigma^2)$.
   a) Encuentra una estadística suficiente para σ^2.
   b) ¿Será $T(\underline{X})=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ una estadística suficiente para σ^2?.
   c) Si n =1, ¿Será $T(\underline{X})=|X|$ una estadística suficiente para σ^2?.

2. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.a.i. con función de densidad
$$f(x_i|\theta)=e^{i\theta-x_i}I_{[i\theta,\infty)}(x_i).$$
   Prueba que $T(\underline{X})=\min_i\left(\frac{X_i}{i}\right)$ es una estadística suficiente para θ.

3. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.a.i. con función de densidad
$$f(x_i|\theta)=\frac{1}{2i\theta}I_{[-i(\theta-1),i(\theta+1)]}(x_i),\ \theta>0.$$
   Encuentra una estadística suficiente bidimensional para θ.

4. Sea $f(x,y|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ una función de densidad bivariada de una distribución uniforme en el rectángulo formado por la esquina inferior izquierda (θ_1,θ_2) y por la esquina superior derecha (θ_3,θ_4) en $\Re^2$. Los parámetros satisfacen $\theta_1<\theta_3$ y $\theta_2<\theta_4$. Sean $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ una muestra aleatoria de esta densidad. Encuentra una estadística suficiente para $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$.

5. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad
$$f(x|\theta)=I_{[\theta,\theta+1]}(x),\ \ \theta\ge 0.$$
   a) Encuentra una estadística suficiente para θ.
   b) Demuestra que $T_1(\underline{X})=(X_{(1)},X_{(n)})$ es una estadística suficiente para θ.
   c) Demuestra que $T_2(\underline{X})=(X_{(n)}-X_{(1)},(X_{(1)}+X_{(n)})/2)$ es también una estadística suficiente para θ.
   d) Demuestra que $T_1(\underline{X})$ no es una estadística completa.
   e) Una estadística ancilaria es aquella cuya distribución no depende del parámetro. Pruebe que el rango $R=X_{(n)}-X_{(1)}$ es una estadística ancilaria. *Sugerencia*: Encuentra la distribución conjunta de $(X_{(1)},X_{(n)})$ y realiza la transformación $R=X_{(n)}-X_{(1)},\ M=(X_{(1)}+X_{(n)})/2$.

6. Para cada una de las siguientes distribuciones, sean $X_1,X_2,...,X_n$ una m.a. Encuentra las estadísticas suficientes y determina si las estadísticas suficientes son completas.
   a) $f(x|\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}I_{\{0,1\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$ (Bernoulli)
   b) $f(x|\theta)=\binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x}I_{\{0,1,\ldots,m\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$ (Binomial)
   c) $f(x|\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$, $\lambda>0$ (Poisson)
   d) $f(x|\theta)=\theta(1-\theta)^x I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$ (Geométrica)
   e) $f(x|\theta)=\frac{1}{\theta}I_{\{1,2,\ldots,\theta\}}(x)$, $\theta=1,2,\ldots$ (Uniforme discreta)
   f) $f(x|\alpha,\theta)=(1-\theta)\theta^{x-\alpha}I_{\{\alpha,\alpha+1,\ldots\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$, $\alpha\in\Re$
   g) $f(x|\theta)=\frac{1}{\theta}I_{[\theta,2\theta]}(x)$, $\theta>0$ (Uniforme)
   h) $f(x|\theta)=\theta e^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta>0$ (Exponencial)
   i) $f(x|\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\mu\in\Re$, $\sigma^2>0$ (Normal)
   j) $f(x|a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}I_{(0,1)}(x)$, $a>0$, $b>0$ (Beta)
   k) $f(x|\alpha,\beta)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}I_{(0,\infty)}(x)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (Gamma)
   l) $f(x|\mu)=e^{-(x-\mu)}I_{[\mu,\infty)}(x)$, $\mu\in\Re$ (Exponencial trasladada)
   m) $f(x|\mu)=\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\mu\in\Re$ (Doble exponencial)
   n) $f(x|\theta)=\frac{e^{-(x-\theta)}}{\{1+e^{-(x-\theta)}\}^2}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta\in\Re$ (Logística)
   o) $f(x|\theta)=\frac{1}{\pi\{1+(x-\theta)^2\}}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta\in\Re$ (Cauchy)
   p) $f(x|\alpha,\beta)=\frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}I_{[\alpha,\infty)}(x)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (Pareto)
   q) $f(x|a,b)=abx^{a-1}e^{-bx^a}I_{(0,\infty)}(x)$, $a>0$, $b>0$ (Weibull)
   r) $f(x|a,b)=abe^{ax}\exp\{-b(e^{ax}-1)\}I_{(0,\infty)}(x)$, $a>0$, $b>0$ (Gompertz)
   s) $f(x|\theta)=\frac{\theta}{x^2}I_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta>0$
   t) $f(x|\theta)=\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta>0$
   u) $f(x|\theta)=e^{-(x-\theta)}\exp\{-e^{-(x-\theta)}\}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta\in\Re$