CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 2

1.Cierto programa de computadora opera usando alguna de dos subrutinas, A o B, dependiendo del trabajo que se realiza; la experiencia indica que la subrutina A se usa el cuarenta por ciento de las veces, y la B el sesenta por ciento de las veces. Si se utiliza A, se tiene una probabilidad de setenta y cinco por ciento de que el programa termine de ejecutarse antes de cierto tiempo límite; y si se utiliza B, hay una posibilidad de cincuenta por ciento de que el programa se ejecute antes del tiempo límite. ¿Cuál es la probabilidad de que un programa se ejecute sin excederse del tiempo límite?

2.Probar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Si $P(A \mid B) \geq P(A)$, entonces $P(B \mid A) \geq P(B)$.

b) Si $P(B \mid A^c) = P(B \mid A)$, entonces A y B son independientes.

c) Si $P(A) = a$ y $P(B) = b$, entonces $P(A \mid B) \geq (a+b-1) / b$.

3.Un dado es lanzado tantas veces como sea necesario hasta obtener un seis. ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más de cuatro lanzamientos para obtener un seis, dado que no se obtuvo un seis en el primer lanzamiento?

4.La urna A contienen dos pelotas blancas y dos negras, la urna B contiene tres pelotas blancas y dos negras. Una pelota es transferida de A a B; posteriormente se extrae una pelota de B y resulta ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que la pelota transferida haya sido blanca?

5.Dado que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, demostrar la verdad o falsedad de lo siguiente:

a) Si $P(A) = P(B)$, entonces $P(A \mid B) = P(B \mid A)$.
b) Si $P(A \mid B) = P(B \mid A)$, entonces $P(A) = P(B)$.

6.Si $P(B) = P(A \mid B) = P(C \mid A \cap B) =1/2$, encontrar $P(A \cap B \cap C)$.

7.Sean $B_1, B_2, \ldots , B_n$ eventos mutuamente excluyentes, y $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Supongamos que $P(B_j) > 0$ y que $P(A \mid B_j) = p$, para $j = 1, 2, \ldots , n$. Demostrar que $P(A \mid B) = p$.

8.En un experimento de laboratorio se intenta enseñar a un animal a dar vuelta a la derecha dentro de un laberinto A manera de incentivo, el animal es premiado si da vuelta a la derecha y castigado si la da a la izquierda. En el primer intento, la probabilidad de que el animal de vuelta a la izquierda es la misma que a la derecha. Si en cualquier intento el animal fue premiado, la probabilidad de que de vuelta a la derecha en el siguiente intento es $p_1 > 1/2$, y si el animal fue castigado, la probabilidad de que de vuelta a la derecha en el siguiente intento es $p_2 > p_1$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el animal de vuelta a la derecha en el tercer intento?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el animal de vuelta a la derecha en el tercer intento, dado que dio vuelta a la derecha en el primer intento?

9.Sean A y B dos eventos independientes en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Demostrar la independencia entre A y B^c, entre A^c y B, y finalmente entre A^c y B^c.

10.El proveedor de cierto aparato de prueba asegura que dicho aparato es altamente confiable ya que $P(A \mid B) = P(A^c \mid B^c) = 0.95$, donde A = {el aparato indica que el artículo que se prueba es defectuoso} y B = {artículo defectuoso}. El aparato se usará para localizar artículos defectuosos en un gran lote, en el cual existen cinco por ciento de artículos con algún defecto.

a) Encontrar $P(B \mid A)$

b) Se desea tener $P(B \mid A) = 0.9$. Sea $p = P(A \mid B) = P(A^c \mid B^c)$. ¿Qué tan grande debe ser el valor de p?

l1. Una caja tiene l0 pelotas rojas y 5 pelotas negras. Una pelota es seleccionada de la caja. Si la pelota es roja, se regresa a la caja. Si la pelota es negra, ésta y 2 pelotas adicionales negras se agregan a la caja.

a) Encuentre la probabilidad de que una segunda pelota seleccionada de la caja sea
  a.1) roja.
  a.2) negra.

b) Si la segunda pelota fue roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera pelota haya sido roja?

12. La caja I contiene 2 pelotas blancas y 2 pelotas negras, la caja II contiene 2 pelotas blancas y una pelota negra, y la caja III contiene una pelota blanca y 3 pelotas negras.

a) Una pelota es seleccionada de cada caja. Calcule la probabilidad de que todas las pelotas seleccionadas sean blancas.

b) Una caja es seleccionada al azar y una pelota extraída de ella. Calcule la probabilidad de que sea blanca.

c) En (b), calcule la probabilidad de que la primera caja haya sido seleccionada dado que se obtuvo una pelota blanca.

13.Suponga que los coches tienen la misma probabilidad de ser fabricados en lunes, martes, miércoles, jueves o viernes. Los coches hechos en lunes tienen una probabilidad del 4% de ser amarillos; los coches hechos en martes, miércoles o jueves tienen una probabilidad del l% de ser amarillos; y los coches hechos en viernes tienen una probabilidad del 2% de ser amarillos. Si se compra un coche y resulta ser amarillo, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en lunes?

14.Suponga que hay una prueba para detectar cáncer con la propiedad de que el 90% de aquellas personas con cáncer reaccionan positivamente y el 5% de aquellas sin cáncer reaccionan positivamente. Si el 1% de los pacientes en un hospital tienen cáncer, ¿cuál es la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar, que reacciona en forma positiva a la prueba, realmente tenga cáncer?

15.Supónga que una fábrica tiene 2 máquinas, A y B, que hacen el 60% y el 40% de la producción total respectivamente. La máquina A produce un 3% de artículos defectuosos, mientras que la máquina B produce un 5% de artículos defectuosos.

a) Construya el espacio muestral asociado a observar la máquina que produce un artículo.

b) Construya el espacio muestral asociado a observar el tipo de artículo que produjeron las máquinas.

c) Construya el espacio muestral que especifique la máquina que produjo el artículo y el tipo de artículo producido.

d) Para cada uno de los incisos anteriores calcule las probabilidades de cada uno de los eventos simples.

16.Demuestre que si A,B y C son tres eventos tales que $P(A \cap B \cap C) \neq 0$ y $P(C \mid A \cap B) = P(C \mid B)$, entonces $P(A \mid B \cap C) = P(A \mid B)$.

17.Una máquina consiste de 4 componentes que funcionan en paralelo, de tal forma que la máquina falla si por lo menos tres componentes fallan. Suponga que las fallas en los componentes son independientes entre si. Si los componentes tienen probabilidades 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 de fallar cuando la máquina se pone a funcionar, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina funcione correctamente cuando empiece a funcionar?

18.En una baraja de 52 cartas hay 4 reyes. Una carta es extraída al azar de la baraja y se anota su valor; luego la carta es regresada. Este procedimiento se realiza 4 veces. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 2 reyes en las 4 cartas seleccionadas si se sabe que hay por lo menos 1 rey en ellas.

19.Una caja tiene 10 pelotas de las cuales 6 son negras y 4 son blancas.

a) Tres pelotas se extraen de la caja, pero no se sabe su color. Encuentre la probabilidad de que una cuarta pelota extraída de la caja sea blanca. Suponga que las pelotas son extraídas aleatoriamente.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres pelotas extraídas de la caja sean negras, si se sabe que al menos una de ellas es negra?

20. La experiencia indica que el 20% de las personas que reservan una mesa en algún restaurante nunca asisten. Si el restaurante tiene 50 mesas y acepta 52 reservaciones, ¿cuál es la probabilidad de que se pueda acomodar a todas las personas que lleguen?

21. Un blanco circular de radio 1 es dividido en cuatro zonas anulares determinadas por círculos concéntricos de radios 1/4, 1/2, 3/4 y 1 respectivamente. Suponga que 10 tiros son lanzados independiente y aleatoriamente en el blanco.
   a) Encuentre la probabilidad de que a lo más 3 tiros caigan en la zona delimitada por el círculo de radio 1/2 y por el de radio 1.
   b) Si 5 tiros caen dentro del círculo de radio 1/2, encuentre la probabilidad de que al menos un tiro haya caído dentro del círculo de radio 1/4.

22. Un cierto componente de la máquina de un cohete falla 5% de las veces cuando el cohete es lanzado. Para lograr una mejoría en el funcionamiento de la máquina, este componente es duplicado n veces. La máquina falla solo si todos los n componentes fallan. Supongamos que las fallas de los componentes ocurren independientemente. ¿Cuál es el mínimo valor de n que puede usarse para garantizar que la máquina trabaje al menos el 99% de las veces?

23. Encuentre la probabilidad de que una mano de póker de 5 cartas incluya cartas no menores a 7, dado que contiene al menos una carta mayor a 10 (los ases son considerados mayores a 10)

24. La probabilidad de que al lanzar una moneda deshonesta se obtenga sol es p. Hugo, Paco y Luis tiran la moneda sucesivamente y Hugo es el que comienza los lanzamientos. El primero que obtenga un sol gana. Encuentre la probabilidad de ganar de cada uno de ellos.

25. Suponga que 1% de la población en una ciudad tiene tuberculosis (TB). Una prueba para detectar tuberculosis se comporta de la siguiente manera: si la persona tiene TB, la prueba lo detecta con una probabilidad de 0.999. Si no tiene TB, existe una probabilidad de 0.002 de que la prueba indique erróneamente que sí tiene.
   a) Para una persona seleccionada aleatoriamente, la prueba indica que tiene TB, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga TB?
   b) Si esta persona se realiza la prueba por segunda vez y vuelve a indicar que tiene TB, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tenga TB?

26. Considere una urna que contiene 10 pelotas, de las cuales 5 son negras. Escoja al azar un número entero n en $\{1,...,6\}$, y después seleccione una muestra de n pelotas sin reemplazo de la urna. Encuentre la probabilidad de que todas las pelotas en la muestra sean negras.

27. Un distribuidor de semillas de sandía determinó, después de muchas pruebas, que el 4% de una gran cantidad de semillas no germina. Él vende las semillas en paquetes de 50, y garantiza al menos un 90% de germinación. ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete no cumpla la garantía?

28. Mr. Stoneguy, un experimentado comerciante de diamantes, decide recompensar a su hijo permitiéndole escoger una de dos cajas. Cada caja contiene 3 diamantes. En una de las cajas 2 de los diamantes son reales y el otro es una excelente imitación; en la otra caja uno es real y los otros dos son imitaciones. Si el hijo escoge aleatoriamente entre las dos cajas, su oportunidad de conseguir 2 diamantes verdaderos es 1/2, por lo que Mr. Stoneguy decide ayudarlo de la siguiente manera: permite a su hijo sacar un diamante de una de las cajas y examinarlo para ver si es un verdadero diamante; si el diamante examinado es real, el hijo se queda con esa caja, y se queda con la otra caja en el otro caso. ¿Cuál es la probabilidad de que el hijo se quede con 2 diamantes verdaderos?

29. Un jugador tira un par de dados dos veces. Él gana si los dos totales obtenidos no difieren en más de dos con las siguientes excepciones: si obtiene un 3 en el primer tiro, debe obtener un 4 en el segundo tiro; si obtiene un 11 en el primer tiro, debe obtener un 10 en el segundo. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?