Cálculo de Probabilidades II
Preguntas Tema 2

1. Demuestre que la suma de n v.a. Bernuolli(p) independientes tiene una distribución Binomial con parametros (n, p).

2. Se dice que una v.a tiene una distribución Ji-cuadrada con k grados de libertad (y se denota por $\chi^2_{(k)}$)si su función de densidad está dada por

$$f(x \mid k) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k/2} x^{k/2-1} e^{-x/2} I_{\Re^+}(x) para k \in \Im^+.$$

   (a) Obtenga la f.g.m de una v.a Ji-cuadrada con k grados de libertad. Hint: Si $Y \sim \chi^2_{(K)}$ entonces la v.a Y se puede ver como $Y = Z_1^2 + ... + Z_k^2$ donde $Z_i \sim N(0, 1)$.

   (b) Muestre que si $Y = X_1 + ... + X_n$ donde X_i son v.a. independientes idénticamente distribuidas $\chi^2_{(n_i)}$ $\forall\ i = 1, 2, ..., n$. Entonces $Y \sim \chi^2_{(\sum n_i)}$

3. Si $Y = aX + b$, donde a y b son constantes, exprese la función generadora de momentos de Y en términos de la f.g.m de X.

4. Una v.a. X positiva, se dice que tiene una distribución log-normal con parametros μ y σ^2 si $\log(X)$ es una v.a. Normal con media μ y varianza σ^2. Use la f.g.m para encontrar la media y varianza de una v.a log-normal.

5. Muestre que si $X \sim$Normal$(0, 1)$ entonces $Z = X^2$ se distribuye como una $\chi^2_{(1)}$.

6. Realice el siguiente ejercicio:

   (a) Muestre que la suma de n v.a. gamma independientes con parametros (α,1) tiene una distribución gamma con parametros ($n\alpha$, 1).

   (b) Sea $Y \sim$Gamma(α, n). Muestre que la v.a $W = 2nY$ tiene una distribución $\chi^2_{(2\alpha)}$.

   (c) Demuestra que si $X \sim Ga(\alpha, 1) \rightarrow Y = X/n \sim Ga(\alpha, n)$.

7. Muestre que cualquier combinación lineal ($Y = \sum a_i X_i$) de una v.a. Normal multivariada con parámetros $(\underline{\mu}, \Sigma)$ tiene una distribución Normal. Y obtenga los parametros de la nueva normal.

8. Si X tiene función de densidad $f_X(x)$. Encuentre la función de densidad de la v.a $Y = aX + b$.

9. Encuentre la función de densidad de $Y = e^X$ cuando $X \sim$Normal(μ, σ^2). Se dice que la v.a.Y tiene una distribución log-normal (desde que el log$Y$ tiene una distribución Normal) con parametros μ y σ^2.

10. Sea $Y = \left(\frac{X-b}{\alpha}\right)^{\beta}$. Muestre que si X ∼Weibull(b,α, β)entonces Y ∼Exponencial(1) y viceversa.

11. Sea $X \sim Cauchy \quad Estandar$ y $W = \frac{1}{X}$ encontrar la funcion de densidad de W.

12. Si X∼Uniforme$(-1, 1)$. Obtenga f.d.p de la v.a $\mid X \mid, X^2 + 1, \frac{1}{X+1}$

13. Si X∼Exp(1). Obtenga f.d.p. de Y=logX.

14. Si X∼Uniforme$(0, 1)$. Obtenga f.d.p. de Y=e^X.

15. Encuentre la distribución de R=Asenθ , con A una constante fija y θ ∼Uniforme$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Como v.a, R aparece en teoría de balística como el punto de retorno de un proyectil, bajo ciertas condiciones de lanzamiento.

16. Si X∼Uniforme$(0, 1)$. Muestre que Y=$-\ln X$ tiene una distribución Exponencial con parámetro 1.

17. Cierto proceso industrial produce un gran número de cilindros de acero cuyas longitudes están distribuidas normal con media 3.25 pulgadas y desviación estándar de 0.05 pulgadas. Si se eligen al azar dos de tales cilindros y se ponen extremo con extremo, cuál es la probabilidad de que la longitud combinada sea menor de 6.60 pulgadas?.

18. Si $X_1, ..., X_n$ son v.a. i.i.d. continuas y $Y_n = max\left\{X_1, ..., X_n\right\}$ muestre que $f_{Y_n}(y) = n\left[F_X(y)\right]^{n-1} f_X(y)$.

19. Si $X \sim$ Uniforme$(0, 1)$. Sean $X_1, .., X_n$ v.a.i.i.d. con distribución Uniforme (0,1). Obtenga la P$[Y_1 \leq 1/4]$ si $Y_1 = mín\left\{X_i\right\}$.

20. Si X_1 y X_2 son v.a. i.i.d. $Normal(0, 1)$. Sea $Y = (X_2 - X_1)^2/2$. Muestre que $Y \sim Gamma(1/2, 1/2)$. Use la técnica de la f. g. m.

21. Si X_1 y X_2 son v.a. i.i.d. $Normal(0, 1)$ y $Y_1 = X_1^2 + X_2^2$ y $Y_2 = X_2$.

    (a) Obtenga la distribución conjunta de (Y_1, Y_2).

    (b) Muestre que $Y_1 \sim Exp(\lambda = 1/2)$.

22. En cada caso calcule la densidad conjunta de las v.a. Y_j y averigue independencia.

    (a) X_1 y X_2 son v.a. i.i.d. $Normal(0, 1)$, $Y_1 = \left(X_1^2 + X_2^2\right)^{1/2}, Y_2 = \arctan(X_2/X_1)$.

    (b) Si X_1 y X_2 son v.a. i.i.d. $Uniforme(0, 1)$. $Y_1 = X_1 + X_2$ y $Y_2 = X_1/X_2$.

    (c) Si X_1, X_2, X_3 son v.a. i.i.d. $Exp(1)$.

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad Y_2 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}, \quad Y_3 = X_1 + X_2 + X_3.$$

23. Usando la distribución de la suma (vista en clase), obtenga la distribución de la suma de n v. a., donde:

    (a) Las X_i son v. a. i.i.d. $Gamma(\alpha_i, \beta)$.

    (b) Las X_i son v. a. i.i.d. $Normal(\mu_i, \sigma_i^2)$.

24. En cada caso obtenga la f.d.p, $f_z(\cdot)$

    (a) X y Y v.a. independientes $X \sim U(0,2)$, $Y \sim U(0,1)$ y $Z = X + Y$.

    (b) X y Y v.a. i.i.d $Normal(0,1)$, $Z = Y/X$.

    (c) X y Y v.a. i.i.d $f(t) = bt^{b-1}I_{[0,1]}(t), b > 0$. $Z = YX$.

25. Si X_1, $X_{2,}$ X_3 son v.a. i.i.d. con densidad $f(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$. Calcule la probabilidad de que la estadística de orden 1 sea mayor que la mediana de la población.

26. En este ejercicio las v.a Y_i son las estadísticas de orden correspondeintes.

    (a) Obtener la distribución acumulada de la estadística de orden k, $\forall\ k = 1, ..., n$.

    (b) En base al inciso anterior muestre que: $F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F_x(y)]^n$ y que $F_{Y_n}(y) = n\,[F_x(y)]^{n-1}$.

27. **Definición**. Sea Y_1,. . ., Y_n las estadísticas de orden de una muestra aleatoria X_1,. . . , X_n de una densidad $f(\cdot)$.

    - La *mediana muestral* se define como la estadística de orden central si n es impar y si n es par, se define como el promedio de las dos estadísticas de orden centrales.

    - El rango muestral se define como $Y_n - Y_1$.

    - El rango medio muestral se define como $(Y_1 + Y_n)/2$.

    Obtener en cada caso la densidad de la mediana muestral, el rango muestral y el rango medio.

    (a) Si X_1,. . . , X_n son una muestra aleatoria de una distribución $U(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$.

    (b) Si X_1,. . . , X_n son una m. a. de una distribución $Exp(\lambda)$.

    (c) Si X_1,. . . , X_n son una m. a. de una distribución $Normal(0,1)$.

28. Una máquina embotelladora puede regularse de tal manera que llene un promedio μ de litros por botella. Se ha observado que la cantidad de contenido que suministra la máquina (X) presenta una distribución Normal con desv. estándar de 1.0 litros. De la producción de la máquina, un cierto día, se obtiene una m.a de 9 botellas. SEa $\hat{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ con $n = 9$ la media muestral de $(X_1, ..., X_n)$.

(a) Determine la probabilidad de que la media muestral sea mayor a 8 litros, si $\mu = 6.5$.

(b) Determine la probabilidad de que la media muestral se encuentre a lo mas a 0.3 litros de la media real.

(c) Cuántas observaciones deben incluirse en la muestra si se desea que la media muestral esté a lo mas a 0.3 litros de μ con una probabilidad de 0.95?.

29. En el ejercicio anterior se supone que los litros del contenido que vacia la máquina embotelladora (X) tiene una distribución Normal con des. estándar de 1.0. Supóngase que se obtiene una m.a. de 10 botellas y se mide el contenido en cada botella. Si se utilizan estas 10 observaciones para calcular $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \hat{X})^2$, podría ser útil específicar un intervalo de valores que incluyeran a S^2 con una alta probabilidad. Encuentre los valores a y b tales que $P\left[a \leq S^2 \leq b\right] = 0.90$.

30. Si se toman dos muestras independientes de tamaño $n_1 = 6$ y $n_2 = 10$, de dos poblaciones normales con la misma varianza, encuentre el número b, tal que $P\left[\frac{S_1^2}{S_2^2} \leq b\right] = 0.9$.

31. En cada caso encuentre el cuantil de orden 0.25, 0.5 y 0.75.

(a) De una distribución Normal(0,1) y de una distribución N(μ , σ^2).

(b) De una distribución t-Student con 10 grados de libertad.

(c) De una distribución $\chi^2_{(20)}$.

(d) De una distribución $\mathrm{F}_{10,15}$ y de una distribución $\mathrm{F}_{15,10}$.

32. Considere X variable aleatoria con distribución $U(0,1)$ y sea $Y = log(X/(1-X))$. Encontrar la función de densidad de Y. (Obtener primero F_Y) Nota: la distribución encontrada se llama *distribución logística.*

33. Sean ahora $X_1, .., X_n$ v.a.i.i.d. con distribución $\chi^2_{(2)}$. Determinar la densidad de $W = (X_1 - X_2)/2$. Nota: esta densidad se denomina doble exponencial.

34. Demostrar el siguiente resultado,

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces $(X-\mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(k)}$

35. Sean $X_1, X_2, ..., X_{k+1}$ v.a.i. cada una con distribución $Gamma(\alpha, 1)$. Considere la transformación

$$Y_i = \frac{X_i}{X_1 + X_2 + ... + X_{k+1}}, \quad i = 1, 2, ..., k$$
$$Y_{k+1} = X_1 + X_2 + ... + X_{k+1}$$

Obtener la densidad conjunta de $Y_1 + Y_2 + ... + Y_k$. Nota: la distribución del vector $(Y_1 + Y_2 + ... + Y_k)$ se denomina Dirichlet y cuando $k = 1$ se tiene una distribución Beta.

36. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Demostrar lo siguiente:

$$\text{a) } (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)} \quad , \qquad \text{b)}\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu}{S_{\overline{X}}} \sim t_{(n-1)}$$

En los siguientes tres ejercicios $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ son las estadísticas de orden de distribuciones Normales(0,1).

37. Sea $n = 3$.

    (a) Calcular la probabilidad de que la más pequeña de las X_i's sea mayor que la mediana de la distribución.

    (b) Demostrar que $Z_1 = Y_1/Y_2, Z_2 = Y_2/Y_3, Z_3 = Y_3$ son variables aleatorias independientes.

38. La función de densidad conjunta de X y Y está dada por $f(x, y) = (12/7)x(x + y)I_{(0,1)}(x)I_{(0,1)}(y)$. Sean U y V definidas como $U = min\{X, Y\}$, $V = max\{X, Y\}$. Encontrar $f_{U,V}$

39. Si $X_1, ..., X_n$ es una m.a. con $E(X_i) = \mu$ y $V(X_i) = \sigma^2$. Obtenga $V(\overline{X})$ y $E(S^2)$, donde
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Xi - \overline{X})^2}{n-1}$$

40. Muestre que si $Y = a + bX$ entonces $\rho(X, Y) = I_{\Re^+}(b) - I_{\Re^-}(b)$.

41. Si $X_1, ..., X_n$ es una m.a. de alguna distribución con $V(X_i) = \sigma^2$. Mostrar que $Cov(X_i - \overline{X}, \overline{X}) = 0$.

42. Suponga que $X_1, ..., X_n$, es una sucesión de v.a. i.i.d. con media μ y varianza σ^2.

    (a) Considere $S_N = X_1 + ... + X_N$ la *suma aleatoria* correspondiente. Obtenga la media y la varianza de S_N cuando $N \sim Poisson(\lambda)$ y cuando $N \sim Geométrica$ con media $\lambda = \frac{1-p}{p}$ Compare lo obtenido en ambos casos cuando $\lambda \to \infty$.

    (b) El No. de accidentes que ocurren en una fábrica se puede modelar con una v.a $Poisson(2)$. A su vez, el número de individuos afectados en los diferentes accidentes son v.a. i.i.d. c/u con media 3 y varianza 4. Calcular la media y la varianza del número de individuos afectados en una semana.

43. Sea X una v.a con segundo momento finito. Muestre que para toda $\alpha \epsilon \Re$:
$V(X) = E\left[(X-\alpha)^2\right] - \left[E(X) - \alpha\right]^2.$

44. Si $Z \sim N(\cdot \mid 0, 1)$ y $Y = a + bz + cz^2$. Calcular $\rho(Y, Z)$.

45. Sean $X_1, X_2, ..., X_k$ variables aleatorias. Demostrar lo siguiente,

$$V(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j \sigma_{ij}$$

46. Sea $Z \sim N(0,1)$ y $Y = a + bZ + cZ^2$. Demostrar que $\rho_{Z,Y} = b/(b^2 + 2c^2)^{1/2}$

47. Sea $X \sim N(0,1)$, y sea I, otra v.a. independiente de X, tal que $P(I = 1) = P(I = 0) = 1/2$. Si ahora se define Y como

$$Y = X \quad \text{si} \quad I = 1, \quad Y = -X \quad \text{si} \quad I = 0$$

   (a) ¿son X y Y independientes?
   (b) ¿son I y Y independientes?
   (c) Demuestre que $Y \sim N(0,1)$
   (d) Pruebe que $COV(X,Y) = 0$.

48. Para un valor fijo x de la variable aleatoria X, resulta que la variable aleatoria Y tiene una distribución $bin(n,x)$. Suponiendo que $X \sim U(0,1)$, obtener el valor esperado y la varianza no condicionales de Y.

49. El error cuadrático medio al predecir Y, dado X, se define como $ECM = E\{[Y - h(X)]^2|X\}$.

   (a) Demostrar que el ECM se minimiza cuando $h(X) = E(Y|X)$.
   (b) Demostrar que el ECM al predecir Y, dado X, cuando se usa $h(X) = \alpha + \beta X$, se minimiza cuando $\beta = \rho_{XY}(\sigma_Y/\sigma_X), \alpha = \mu_Y - \beta\mu_X$.

50. Sea $\mathbf{Y}$ un vector aleatorio de dimensión k con distribución $N(\mu, \Sigma)$. Consideremos la siguiente partición del vector $\mathbf{Y}$ y las correspondientes particiones de μ y Σ,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \sum = \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{pmatrix}$$

Demostrar lo siguiente: la distribución condicional de $\mathbf{Y}_1$ dado que $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2$, es una distribución normal multivariada con media y matriz de covarianzas dadas, respectivamente, por

$$\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{y}_2 - \mu_2) \quad , \quad \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Ojo: En algún momento se tendrá que utilizar el siguiente resultado: sea A una matriz cuadrada tal que

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}_{22}$ es no singular, entonces $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{22}| \left|\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\right|$

51. Encuentra la funcion caracteristica de una distribucin Normal con media 0 y varianza 1 y de una distribucin Normal con media μ y varianza σ^2.

52. Para un valor fijo x de la variable aleatoria X, resulta que la variable aleatoria Y tiene una distribucin $bin(n, x)$. Suponiendo que $X \sim U(0, 1)$, obtener el valor esperado y la varianza no condicionales de Y.

53. Si la densidad conjunta de X y Y está dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)} I_{\Re^+}(x) I_{\Re^+}(y)$$

Obtenga la densidad de la v.a $Z = X/Y$.

54. Muestre que si X y Y son v.a Poisson independientes con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Entonces

$$f_{X|X+Y}(X \mid X + Y = n) \sim Binomial(n, \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2))$$

55. Sean $X_1, ..., X_n, ...$ v.a. i.i.d. con densidad $P[X_K = 1] = P[X_K = -1] = 1/2$. Sea N una v.a. independiente de las X_i, que tienen una distribución geométrica, es decir, $P[N = j] = \alpha(1 - \alpha)^j I_{\{0,1,2,...\}}(j)$. Si $S_N = X + ... + X_N$ es la suma aleatoria correspondiente, encuentre $f_{S_N}(a)$.

56. En una compañía se están estudiando las variables volúmen de ventas S (millones de \$) y gastos en publicidad T (miles de \$). Se ha observado que el comportamiento de estas variables es aleatorio , siendo las funciones de densidad de probabilidad,

$$f(s) = k(s^2 + 1) I_{[1,4]}(s) \quad , \quad g(t) = ct I_{[0,600]}(t)$$

   (a) Encontrar el valor de las constantes k y c.

   (b) Por facilidad se decidió discretizar a las variables originales definiendo dos nuevas variables, X y Y, como

$$X = 100 I_{[0,200)}(T) + 300 I_{[200,400)}(T) + 500_{[400,600]} I(T)$$
$$Y = 1.5 I_{[1,2)}(S) + 2.5 I_{[2,3)}(S) + 3.5_{[3,4]} I(S)$$

   Encontrar las distribuciones marginales de X y de Y.

   (c) Obtener la función de densidad conjunta de X y Y, sabiendo que se cumplen las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} P(Y = 1.5|X = 100) &= P(Y = 2.5|X = 100) \\ &= P(Y = 3.5|X = 100) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3} P(Y = 2.5|X = 300) &= P(Y = 3.5|X = 300) \\ &= \tfrac{1}{2} P(Y = 1.5|X = 300) \end{aligned}$$

   (d) ¿Cuál es el valor esperado del volúmen de ventas (Y) para cada uno de los tres posibles valores del gasto en publicidad (X)?

(e) Encontrar el valor esperado y la desviación estándar de $U = Y - X$.

(f) ¿Cuál es el valor del coeficiente de correlación lineal entre Y y X?

57. Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas con función de densidad $f(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$. Obtener la función de densidad de la amplitud $Y_n - Y_1$ y su valor esperado.

58. Si X es una v.a con f.p dada por $f_X(x) = (1/4)I_{\{-2,-1,1,2\}}(x)$ y sea $Y = X^2$.

    (a) Encuentre la distribución de probabilidad conjunta para X y Y.

    (b) Calcule $Cov(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.

    (c) Son X y Y independientes?

59. Considere X variable aleatoria con distribucin $U(0, 1)$ y sea $Y = log(X/(1 - X))$. Encontrar la función de densidad de Y. (Obtener primero FY) Nota: la distribución encontrada se denomina logística.