

ESTADISTICA MATEMATICA

Tarea 2

1. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. de la densidad $N(0, \sigma^2)$.
 - a) Encuentra un estimador de σ^2 por el método de momentos.
 - b) Encuentra un estimador de σ^2 por el método de máxima verosimilitud.
 - c) ¿Será insesgado el estimador encontrado en el inciso (b)? Si no lo es, propón uno que sí lo sea.
 - d) Encuentra la cota inferior de Cramer-Rao para estimadores insesgados de σ^2 .
 - e) Verifica si el estimador insesgado propuesto en el inciso (c) alcanza la cota, si no, ¿para qué funciones de σ^2 se alcanzaría la cota?

2. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i. con función de densidad

$$f(x_i | \theta) = e^{i\theta - x_i} I_{[i\theta, \infty)}(x_i)$$

- a) Encuentra un estimador de momentos de θ . *Sugerencia:* Realiza la transformación $Y_i = (X_i - 1)/i$ y verifica que Y_1, \dots, Y_n son v.a.'s con esperanza común.
- b) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para θ .
- c) Con base en el ECM de cada uno de los estimadores, indica cuál de los dos es mejor.
- d) ¿Serán consistentes los estimadores encontrados en los incisos (a) y (b)?
- e) Encuentra un estimador insesgado para θ basado en la estadística suficiente.

3. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i. con función de densidad

$$f(x_i | \theta) = \frac{1}{2i\theta} I_{[-i(\theta-1), i(\theta+1)]}(x_i), \theta > 0$$

- a) Encuentra un estimador de momentos de θ . ¿Será necesaria una transformación como en el ejercicio anterior?
 - b) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para θ .
4. Sea $f(x, y | \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ una función de densidad bivariada de una distribución uniforme en el rectángulo formado por la esquina inferior izquierda (θ_1, θ_2) y por la esquina superior derecha (θ_3, θ_4) en \mathfrak{R}^2 . Los parámetros satisfacen $\theta_1 < \theta_3$ y $\theta_2 < \theta_4$. Sean $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria de esta densidad. Encuentra un estimador para $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ por el método que quieras.

5. Sean X_1, X_2, \dots, X_n v.a.i.i.d. con función de densidad

$$f(x | \theta) = I_{[0, \theta+1]}(x), \theta \in \mathfrak{R}$$

- a) Encuentra un estimador para θ por el método de momentos.
- b) ¿Será insesgado el estimador del inciso (a)?
- c) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para θ .
- d) Encuentra la cota inferior de Cramer-Rao para estimadores insesgados de θ .
- e) ¿Existirá el UMVUE para θ ? Si sí, encuéntralo.
- f) Encuentra un estimador máximo verosímil para la mediana de la distribución.

6. Para cada una de las siguientes distribuciones, sean X_1, X_2, \dots, X_n una m.a. Encuentra los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud para los parámetros de la distribución. Si los estimadores son distintos compáralos de acuerdo al criterio de ECM y finalmente investiga la existencia del UMVUE.

- a) $f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$, $\theta \in (0,1)$ (Bernoulli)
- b) $f(x|\theta) = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{m-x} I_{\{0,1,\dots,m\}}(x)$, $\theta \in (0,1)$ (Binomial)
- c) $f(x|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\dots\}}(x)$, $\lambda > 0$ (Poisson)
- d) $f(x|\theta) = \theta(1-\theta)^x I_{\{0,1,\dots\}}(x)$, $\theta \in (0,1)$ (Geométrica)
- e) $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} I_{\{1,2,\dots,\theta\}}(x)$, $\theta = 1, 2, \dots$ (Uniforme discreta)
- f) $f(x|\alpha, \theta) = (1-\theta)\theta^{x-\alpha} I_{\{\alpha, \alpha+1, \dots\}}(x)$, $\theta \in (0,1)$, $\alpha \in \mathfrak{R}$
- g) $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} I_{[0,2\theta]}(x)$, $\theta > 0$ (Uniforme)
- h) $f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta > 0$ (Exponencial)
- i) $f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\mu \in \mathfrak{R}$, $\sigma^2 > 0$ (Normal)
- j) $f(x|a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x)$, $a > 0$, $b > 0$ (Beta)
- k) $f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} I_{(0,\infty)}(x)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (Gamma)
- l) $f(x|\mu) = e^{-(x-\mu)} I_{[\mu,\infty)}(x)$, $\mu \in \mathfrak{R}$ (Exponencial trasladada)
- m) $f(x|\mu) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\mu \in \mathfrak{R}$ (Doble exponencial)
- n) $f(x|\theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{\{1 + e^{-(x-\theta)}\}^2} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta \in \mathfrak{R}$ (Logística)
- o) $f(x|\theta) = \frac{1}{\pi \{1 + (x-\theta)^2\}} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta \in \mathfrak{R}$ (Cauchy)
- p) $f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} I_{[\alpha,\infty)}(x)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (Pareto)
- q) $f(x|a, b) = abx^{a-1} e^{-bx^a} I_{(0,\infty)}(x)$, $a > 0$, $b > 0$ (Weibull)
- r) $f(x|a, b) = abe^{ax} \exp\{-b(e^{ax} - 1)\} I_{(0,\infty)}(x)$, $a > 0$, $b > 0$ (Gompertz)
- s) $f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^2} I_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta > 0$
- t) $f(x|\theta) = \frac{2}{\theta^2} (\theta - x) I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta > 0$
- u) $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \exp\{-e^{-(x-\theta)}\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta \in \mathfrak{R}$