CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 3

1.Cualquier punto en el intervalo [0,1) puede ser representado por su expansión decimal $.x_1x_2...$ Suponga que un punto es elegido aleatoriamente en el intervalo [0,1). Sea X el primer dígito en la expansión decimal del punto. Encuentre la función de densidad de X y construya una grafica de la misma.

2.Una caja contiene 6 pelotas rojas y 4 pelotas negras. Se seleccionan en forma aleatoria n pelotas. Sea X el número de pelotas rojas seleccionadas. Encuentre la función de densidad de X si la selección se realizó,
a)sin reemplazo. Grafique esta función para n = 8.
b)con reemplazo. Grafique esta función para n = 8.

3.Sea N un entero positivo y sea f una función dada por

$$f(x) = \begin{cases} c\ 2^x, & x = 1,2,\dots,N \\ 0\ , & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Encuentre el valor de c tal que f(x) sea función de densidad.

4.Suponga que X es una variable aleatoria con función de densidad dada por

x	-3	-1	0	1	2	3	5	8
f(x)	0.1	0.2	0.15	0.2	0.1	0.15	0.05	0.05

Encuentre las probabilidades de los siguientes eventos:

a) X es negativa.
b) X es impar.
c) X toma valores entre 1 y 8 (incluyendo los extremos).
d) $P(X = -3 \mid X \le 0)$.
e) $P(X \ge 3 \mid X > 0)$.

5.Una caja tiene 12 pelotas numeradas de 1 a 12. Dos pelotas son seleccionadas aleatoriamente de la caja. Sea X el número más grande de las dos pelotas. Encuentre la densidad de X si las bolas son seleccionadas:
a)con reemplazo. Grafique esta densidad.
b)sin reemplazo. Grafique esta densidad.

6.Una caja contiene *r* bolas numeradas 1,2,...,*r*. Se seleccionan *n* bolas sin reemplazo de la caja. Sea Y el número más grande de las bolas seleccionadas en la muestra y Z el número más chico.
a)Encuentre $P(Y \le y)$.
b)Encuentre $P(Z \ge z)$.

7.Un dado se tira hasta que un 6 aparece.
a)¿Cuál es la probabilidad de que a lo más el dado se tire 6 veces?
b)¿Cuántos tiros se necesitan para que la probabilidad de obtener un 6 sea al menos 0.5?.

8.Sea X una variable aleatoria tal que $P(|X - 1| = 2) = 0$. Exprese $P(|X - 1| \ge 2)$ en términos de la función de distribución acumulada $F_X(x)$.

9.Un punto es seleccionado aleatoriamente del interior de un disco de radio *R* en el plano. Sea X el cuadrado de la distancia del punto al centro del disco. Encuentre la función de distribución acumulada y la función de densidad de X, construya las gráficas de estas funciones.

10.Considere un triángulo equilátero con lados de longitud s. Un punto es seleccionado aleatoriamente de uno de los lados del triángulo. Sea X la distancia del punto escogido al vértice opuesto. Encuentre la función de distribución acumulada de X y construya su gráfica. Calcule la función de densidad de X y grafíquela.

11.Sea (u,v) un punto escogido aleatoriamente del cuadrado $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$. Sea X la variable aleatoria que asigna al punto (u,v) el valor u+v.

a)Encuentre la función de distribución acumulada de X y demuestre formalmente que cumple todas las propiedades requeridas.

b)Encuentre la función de densidad de X y grafiquela.

12.Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución acumulada está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ x/3 & , \quad 0 \le x < 1 \\ x/2 & , \quad 1 \le x < 2 \\ 1 & , \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Encuentre

a) $P(1/2 \le X \le 3/2)$
b) $P(1/2 \le X \le 1)$
c) $P(1/2 \le X < 1)$
d) $P(1 \le X \le 3/2)$
e) $P(1< X < 2)$
f) Encuentre f(x) y grafique esta función.

13.Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = (1/2)\, e^{-|x|}; \qquad -\infty < x < \infty$$

a)Encuentre $P(1 \le |x| \le 2)$.

b)Encuentre F(x) (función de distribución acumulada).

14.Sea F(x) la función de distribución acumulada dada por

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2(|x|+1)} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Encuentre la función de densidad, f(x), correspondiente. ¿Para qué valor de x, F'(x) = f(x)?

15.Sea X el seno del ángulo escogido aleatoriamente del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.
Encuentre la función de densidad y la función de distribución de X. Grafique estas funciones.

16.Sea X una variable aleatoria continua que tiene función de distribución F y función de densidad f. La función de densidad f es simétrica con centro en a si $f(a + x) = f(a - x), -\infty < x < \infty$. Encuentre las condiciones equivalentes en términos de la variable aleatoria X y en términos de la función de distribución acumulada.

17.a)Demuestre que las siguientes son funciones de densidad:

$$f_1(x) = e^{-x}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f_2(x) = 2e^{-2x}\, I_{(0,\infty)}(x)$$

$$f(x) = (\theta+1)\, f_1(x) - \theta f_2(x) \quad , \quad 0 < \theta < 1$$

b)Pruebe la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones de densidad y si los valores θ_1 y θ_2 son tales que $\theta_1 + \theta_2 = 1$, entonces $\theta_1\, f_1(x) + \theta_2\, f_2(x)$ es tambien una función de densidad.

18.Pruebe que la siguiente es una función de densidad:

$$f(x)=\frac{\alpha^2(\alpha+2x)}{x^2(\alpha+x)^2}I_{(\alpha,\infty)}(x)+\frac{x(2\alpha+x)}{\alpha(\alpha+x)^2}I_{(0,\alpha]}(x),\quad \alpha>0$$

19. Encuentre la constante k tal que la siguiente función sea una función de densidad:

$$f(x)=kx^2\,I_{(-k,k)}(x).$$

20. Un experimento consiste en lanzar 2 bolas en 4 cajas de tal manera que cada bola tiene la misma probabilidad de caer en cada caja. Sea X el número de bolas en la primera caja.

a)¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?. Construya su gráfica.
b)¿Cuál es la función de densidad de X, y cuál es su gráfica?.

21. Una moneda honesta es lanzada hasta que un sol aparece. Sea X el número de lanzamientos requeridos. Encuentre la función de densidad de X y haga una grafica de la misma.

22. El individuo A tiene dos monedas y el individuo B tiene una. Ellos juegan volados hasta que uno de los dos tiene las 3 monedas. Sea X el número de volados requeridos para que el juego se acabe.
a)¿Cuál es la función de densidad de X?.
b)¿Cuál es la probabilidad de que B gane el juego?.

23. Sea $f_X(x)=(1/\beta)[1-\left|(x-\alpha)/\beta\right|]\,I_{(\alpha-\beta,\alpha+\beta)}(x),\quad -\infty<\alpha<\infty,\quad \beta>0$

a)Demuestre que $f_X(x)$ es una función de densidad. ¿Cómo es la gráfica de esta función para distintos valores de α y β?
b)Encuentre la función de distribución acumulada correspondiente.

24. Sea $f_X(x)=k\,(1/\beta)[1-[(x-\alpha)/\beta]^2\,]\,I_{(\alpha-\beta,\,\alpha+\beta)}(x)\quad,\quad -\infty<\alpha<\infty\ ,\ \beta>0$

a)Encuentre k tal que f(x) sea una función de densidad. ¿Cómo es la gráfica de esta función para distintos valores de α y β?

25. Un avión con bombas vuela directamente arriba de una vía de tren. Si una bomba de las grandes (pequeñas) cae a menos de 40 (15) pies de la vía, ésta se dañará lo suficiente para que el tráfico se interrumpa. Sea X la distancia perpendicular de la vía al punto de caída de la bomba. Suponga que:

$$f_X(x)=\frac{100-x}{5000}I_{(0,100)}(x)$$

a)Encuentre la probabilidad de que una bomba de las grandes interrumpa el tráfico.
b)Si el avión puede cargar 3 bombas grandes (8 pequeñas) y usa las tres (ocho), ¿cuál es la probabilidad de que se interrumpa el tráfico?.
c)Si el avión lleva tres bombas grandes y Y es el número de bombas que dañan la vía, encuentre $f_Y(y)$.

26. Una urna contiene pelotas numeradas 1,2,3. Primero se toma una pelota de la urna, luego una moneda se lanza el número de veces que dice la bola. Sea X la variable aleatoria que indica el número de soles. Encuentre la función de densidad de X.

27. Dada la función de distribución acumulada:

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,\quad x<0\\ x^2+0.2 & ,\quad 0\le x<0.5\\ x & ,\quad 0.5\le x<1\\ 1 & ,\quad x\ge 1\end{cases}$$

a) Exprese F(x) en términos de funciones indicadoras y construya su gráfica.
b) Obtenga f(x) y construya su gráfica.
c) Calcule P(0.25 < X < 0.75)
d) Calcule P(0.25 < X < 0.5).

28.Sea $F_X(x) = [1 - \exp[-\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\gamma}]]\, I_{(\alpha,\infty)}, \qquad \alpha \in \Re, \quad \beta, \gamma \in \Re^{+}$

Verifique que F(*x*) es una función de distribución acumulada.

29.Sea $f_X(x) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}, \quad x = 0,1,2,\ldots \quad , \quad \theta > 0$

Demuestre que $f_X(x)$ es una función de densidad.

30.El número de solicitudes de apertura de crédito que se reciben diariamente en una tienda departamental, es una variable aleatoria W con la siguiente función de distribución acumulada,

$$F(w) = \begin{cases} 0 & , \quad w < 0 \\ 0.1 & , \quad 0 \le w < 1 \\ 0.3 & , \quad 1 \le w < 2 \\ 0.7 & , \quad 2 \le w < 4 \\ 1 & , \quad w \ge 4 \end{cases}$$

a)Encuentre la probabilidad de que se reciban dos o más solicitudes en un día.

b)Dado que ya se recibió al menos una solicitud, ¿cuál es la probabilidad de que al final del día se hayan recibido tres o menos solicitudes?

c)Encuentre la función de densidad de W.