

## ESTADISTICA MATEMATICA

### Tarea 4

1. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. de la distribución Pareto con función de densidad

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta \alpha^\beta}{x^{\beta+1}} I_{[\alpha, \infty)}(x), \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

- a) Encuentra los estimadores máximo verosímiles de  $\alpha$  y  $\beta$ .  
 b) Demuestra que el cociente de verosimilitudes generalizado para las hipótesis  $H_0: \beta = 1, \alpha$  desconocido vs.  $H_1: \beta \neq 1, \alpha$  desconocido tiene región crítica de la forma  $\{\underline{x} : T(\underline{x}) \leq k_1 \text{ ó } T(\underline{x}) \geq k_2\}$ , donde  $0 < k_1 < k_2$  y

$$T(\underline{X}) = \log \left\{ \frac{\prod_{i=1}^n X_i}{(X_{(1)})^n} \right\}.$$

2. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. de la distribución  $Po(\lambda)$ .

- a) Encuentra una prueba de hipótesis para probar  $H_0: \lambda \geq \lambda_0$  vs.  $H_1: \lambda < \lambda_0$ .  
 b) Supongamos que en cierta ciudad el número de accidentes automovilísticos en un año sigue una distribución Poisson. En años anteriores, el número promedio de accidentes por año fue de 15. Considerando que este año el número de accidentes sea de 10. ¿Será justificado decir que la tasa de accidentes ha bajado? Si el número de accidentes del próximo año fuera de 11, considerando la información de este y del próximo año, ¿se podría decir que la tasa de accidentes ha disminuido?

3. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. de la distribución  $Ber(\theta)$ .

- a) Encuentra una prueba de hipótesis para probar  $H_0: \theta = \theta_0$  vs.  $H_1: \theta \neq \theta_0$ .  
 b) En 1,000 lanzamientos de una moneda, se obtuvieron 560 soles y 440 águilas. ¿Será razonable asumir que la moneda es honesta? Justifica tu respuesta usando el valor-p.

4. Un investigador afirma que un medicamento provocará sueño en por lo menos el 80% de las personas que padecen insomnio. Después de un análisis de éste, alguien considera que la afirmación es exagerada y para refutarla se administra la medicina a 20 personas elegidas al azar que padecen insomnio. Sea  $Y$  el número de personas que logran dormir con la medicina.

- a) Platea las hipótesis correspondientes.  
 b) Calcula el tamaño de la prueba si la región de rechazo es  $\{y : y \leq 12\}$ .  
 c) Calcula la potencia de la prueba cuando en realidad la proporción de personas que logran dormir con el medicamento es de 40%.  
 d) Si la región de rechazo es  $\{y : y \leq k\}$ , encuentra el valor de  $k$  tal que  $\alpha = 0.01$ .  
 e) Para la región de rechazo del inciso (d) encuentra  $\beta$  si en realidad el número de personas que logran dormir con el medicamento es de 60%.

5. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a.i.i.d. de la distribución  $N(\mu, 9)$ . Considera las hipótesis  $H_0 : \mu \leq 1$  vs.  $H_1 : \mu > 1$  y suponga que la prueba tiene región de rechazo  $\{\bar{x} : \bar{x} > k\}$ . Encuentra el valor de  $n$  y de  $k$  tal que la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $\mu=0.8$  no exceda 0.05 y la probabilidad de no rechazar  $H_0$  cuando  $\mu=1.2$  es menor o igual a 0.10.
6. Un ensayo clínico de 2 etapas está planeado para probar  $H_0: p=0.10$  vs.  $H_1: p>0.10$ , donde  $p$  es la proporción de pacientes que respondieron positivamente a cierto tratamiento (protocolo). En la primera etapa, se reclutan a 15 pacientes y se les trata. Si 4 o más pacientes (de los 15) responden positivamente, se rechaza  $H_0$ , se termina el estudio y ningún otro paciente es reclutado. De otra forma, otro grupo de 15 pacientes son reclutados y tratados en la segunda etapa. Si un total de 6 o más pacientes (de los 30 pacientes reclutados en ambas etapas) responden positivamente, se rechaza  $H_0$ . Por ejemplo, si 5 pacientes responden positivamente en la primera etapa,  $H_0$  es rechazada y se termina el estudio. Sin embargo, si 2 pacientes responden positivamente de los primeros 15 pacientes, otros 15 pacientes de segunda etapa son reclutados y si adicionalmente 4 o más responden positivamente (dando un total de 6 o más dentro de los 30 pacientes), se rechaza  $H_0$  y se termina el estudio.
- Encuentra el tamaño de la prueba.
  - Encuentra la probabilidad de rechazar la hipótesis nula si  $p=0.30$ .
  - Encuentra la probabilidad de cometer ET2 si  $p=0.30$ .
7. Se sospecha que los anticonceptivos orales reducen el nivel de hemoglobina del usuario. En un estudio de sangre en una muestra de 37 mujeres que reportaron estar tomando anticonceptivos orales, se obtuvo una media de 14.491 ml. y una desviación estándar de 1.079 ml. en el nivel de hemoglobina. Si el nivel medio normal es de 14.9 ml., ¿hay razón para sustentar la sospecha? Plantea las hipótesis y los supuestos necesarios y justifica tu respuesta usando un valor  $\alpha=0.05$ .
8. La dirección del Banco del Ahorro desea saber si existe o no diferencia estadística en los promedios de ahorros mensuales de dos de sus sucursales (A y B). Para tal efecto se seleccionaron aleatoriamente 12 y 16 cuentahabientes de las sucursales A y B respectivamente. Cada persona entrevistada declaró el monto de sus ahorros en el último mes. Los datos obtenidos son los siguientes:
- Sucursal A: 4.51, 1.4, 2.8, 0.75, 1.85, 5.4, 3.2, 2.75, 3.3, 0.9, 1.1, 1.9  
 Sucursal B: 3.2, 4.1, 3.8, 2.7, 3.1, 4.2, 2.3, 1.7, 1.9, 0.7, 3.3, 1.4, 4.0, 3.8, 4.3, 2.31
- Establece los supuestos necesarios y prueba las siguientes hipótesis:
- $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$  vs.  $H_0 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$ .
  - $H_0 : \mu_A = \mu_B$  vs.  $H_0 : \mu_A < \mu_B$ .

9. Un fabricante desea comparar el proceso actual de armado para uno de sus productos con un método propuesto que supuestamente reduce el tiempo de armado. Se les pidió a 8 trabajadores de la planta que armaran las unidades con ambos procesos. Enseguida se presentan los tiempos observados en minutos:

<i>TRABAJADOR</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>
P.ACTUAL	38	32	41	35	42	32	45	37
P.PROPUESTO	30	32	34	37	35	26	38	32

¿Existirá alguna razón para creer que el tiempo de armado para el proceso actual es mayor que el del método propuesto por más de dos minutos?.

- Establece las hipótesis y los supuestos necesarios.
- Realiza la prueba con un nivel de significancia de 0.05.
- Calcula el nivel de significancia descriptivo e interpreta su valor.