CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 5

1. Sea $f_X(x) = \frac{1}{2}\{\theta I_{(0,1)}(x) + I_{[1,2]}(x) + (1-\theta) I_{(2,3)}(x)\}$, donde $0 \le \theta \le 1$.
   a) Encuentre la función de distribución acumulada de X.
   b) Encuentre la media, la moda, la mediana y la varianza de X.

2.a) Sea X una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 . Demuestre que E $\{(X - b)^2\}$, como función de b, se minimiza cuando $b = \mu$.
   b) Sea X una variable aleatoria contínua con mediana m. Minimize $E\{|X - b|\}$ como función de b.
   HINT : Demuestre que $E\{|X - b|\} = E\{|X - m|\} + 2\int_b^m (x - b) f_X(x)\,dx$

3. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por $f_X(x) = |1-x| I_{[0,2]}(x)$.
   Encuentre la media y la varianza de X. Calcula $E(X \mid X > 1)$.

4. Preguntas varias.
   a) Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución Bin (25, 0.2). Evalúe $P(X < \mu - 2\sigma)$.
   b) Si X se distribuye uniforme en el intervalo (1,2), encuentre z tal que $P(X > z + \mu) = 1/4$.
   c) Suponga que X se distribuye Bin(n,p) y que E(X) = 5 y Var(X) = 4. Encuentre n y p.
   d) Si E(X)=10 y σ =3, ¿puede X tener una distribución Binomial negativa?.
   e) Suponga que X se distribuye Bi(n,p). ¿Para qué valor de p se maximiza la varianza de X (n se mantiene fijo)?
   f) Suponga que X es una variable aleatoria continua con distribución uniforme con media 1 y varianza 4/3. ¿Cuál es P(X < 0)?

5. Encuentre la mediana para cada una de los siguientes distribuciones:
   a) X se distribuye Exp(λ).
   b) X se distribuye uniforme en el intervalo (θ_1, θ_2).
   c) X se distribuye Bin(4, 0.5).
   d) X se distribuye Bin(5, 0.5).
   e) X se distribuye Bin(2, 0.9).

6. Si X tiene una distribución Poisson con media 1, demuestre que $E\{|X - 1|\} = 2\sigma/e$.

7. La distribución dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^2} x \exp\{\frac{-1}{2}(x/\beta)^2\} I_{(0,\infty)}(x), \quad \beta > 0$$

   es llamada la distribución **Rayleigh**.
   Demuestre que la media y la varianza existen y encuéntrelos.

8. Sea N un entero positivo y sea f(x) la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{N(N+1)} & , \quad x = 1,2,\dots,N, \\ 0 & , \quad \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   Demuestre que f(x) es una función de densidad y encuentre su valor esperado.

9. Sea X ~ Bin(4,p). Encuentre $E\{\operatorname{sen}(\pi X/2)\}$.

10. Sea X ~ Po(λ).
   a) Encuentre $E\{(1+X)^{-1}\}$.

b) Encuentre E(X | X es impar).

11. Sea X ~ U{0,1,...,N}. Encuentre la media y la varianza de X. Calcula $E(X \mid X \le N-1)$.

12. Demuestre que $E\{a + bg(X)\} = a + b\,E\{g(X)\}$ y $Var\,\{a + bg(X)\} = b^2\,Var\,\{g(X)\}$.

13. Sea X una v.a. continua no negativa con función de densidad f y función de distribución acumulada F. Demuestre que X tiene valor esperado finito si solo si $\int_0^\infty (1 - F(x))\,dx < \infty$, y entonces

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx$$

14. Para cada una de las siguientes distribuciones encuentre el valor esperado y la varianza.

a)Binomial(n,p)	b)Poisson(λ)	c)Uniforme{1,2,...N}
d)Binomial Negativa(r,p)	e)Hipergeométrica(M,K,n)	f)Uniforme(a,b)
g)Normal (μ,σ^2)	h)Gamma(a,b)	i)Beta(a,b)

15. Suponga que la función de distribución acumulada F(x) se puede expresar como una función de $(x - \alpha)/\beta$, en donde β y α son constantes positivas.
a) Demuestre que si α se incrementa en $\Delta\alpha$, lo mismo ocurre con E(X)
b)Demuestre que si β se multiplica por k, la desviación estándar de X también queda multiplicada por k.

16. Sea $f_X(x) = (1/\beta)[1 - |\,(x-\alpha)/\beta\,|]\, I_{(\alpha-\beta,\alpha+\beta)}(x), \quad -\infty < \alpha < \infty\,, \quad \beta > 0$

a)Encuentre el valor esperado, la desviación estándar y la moda de X.
b)Determinar el cuantil de orden q de esta distribución.

17. Una palabra de la siguiente frase es elegida al azar.

SI PODEMOS HACER A ALGUIEN MAS ALEGRE Y FELIZ,
DEBERIAMOS HACERLO EN CUALQUIER CASO.

Si X denota el número de letras de la palabra elegida, ¿cuál es el valor esperado, la moda, la mediana y la desviación estándar de X?

18.Obtenga la media, la moda, la mediana, la varianza, el coeficiente de variación, el coeficiente de asimetría y el coeficiente de kurtosis para ,
a)cada una de las dos densidades que se graficaron en el ejercicio 2 de la Tarea 3
b)la v.a. X del ejercicio 4 de la Tarea 3.
c)las variables aleatorias X y Y del ejercicio 3 de la Tarea 4. (Usar p = 0.1 y M = 2,6)

19. Sea X una v.a. con función de distribución acumulada dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , y \le 0 \\ y/8 & , 0 < y < 2 \\ y^2/16 & , 2 \le y < 4 \\ 1 & , y \ge 4 \end{cases}$$

a)Obtenga la media, la varianza y los coeficientes de variación, de asimetría y de kurtosis de X.
b)Obtenga los cuartiles de X
c)Si $U = 5 - 3X + 2X^2$, encuentre E(U) y V(U).