

# Familias exponenciales y distribuciones iniciales

Eduardo Gutiérrez-Peña<sup>1</sup> y Manuel Mendoza Ramírez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Probabilidad y Estadística, IIMAS-UNAM

<sup>2</sup>Departamento de Estadística, ITAM

*XXVI Foro Nacional de Estadística  
Villahermosa, Tabasco. Septiembre 21-23, 2011*

1 Familias Exponenciales Naturales

2 Familias Conjugadas

3 Teoría de la Información

4 Problemas de Optimización

5 Inferencia Bayesiana Paramétrica

6 Observaciones Finales

- Densidad

$$p_{\theta}(x|\theta) = b(x) \exp\{\theta x - M(\theta)\} \quad (\theta \in \Xi)$$

$$\text{con } M(\theta) = \log \int b(x) \exp\{\theta x\} \eta(dx)$$

- Espacio parametral (canónico)

$$\Xi = \{\theta \in \mathbb{R} : M(\theta) < \infty\}$$

- Parámetro medio

$$\mu = \mu(\theta) = E[X|\theta] = dM(\theta)/d\theta$$

espacio del parámetro medio:  $\Omega = \mu(\Xi)$

- Función de varianza

$$V(\mu) = \text{Var}[X|\theta(\mu)] = d^2M(\theta(\mu))/d\theta^2$$

- Sean  $X_1, \dots, X_n \sim p_\theta(x|\theta)$  y  $S = \sum_{i=1}^n X_i$ . Entonces

$$p_\theta(s|\theta, n) = b(s, n) \exp\{\theta s - n M(\theta)\}$$

- Verosimilitud

$$L_\theta(\theta|s, n) \propto \exp\{\theta s - n M(\theta)\}$$

- Información de Fisher

$$i_\theta(\theta) = d^2 M(\theta)/d\theta^2$$

En términos del parámetro medio

$$i_\mu(\mu) = V(\mu)^{-1}$$

- Familia conjugada natural

$$\pi_{\theta}(\theta | \mathbf{s}_0, n_0) \propto L_{\theta}(\theta | \mathbf{s}_0, n_0) \quad (\mathbf{s}_0 \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{R})$$

- Forma normalizada

$$\pi_{\theta}(\theta | \mathbf{s}_0, n_0) = \exp\{[\mathbf{s}_0\theta - n_0 M(\theta)] - W(\mathbf{s}_0, n_0)\}$$

$$\text{con } W(\mathbf{s}_0, n_0) = \log \int \exp\{\mathbf{s}_0\theta - n_0 M(\theta)\} d\theta \quad (\text{Diaconis-Ylvisaker})$$

- Inicial de Jeffreys

$$\pi_J(\theta) \propto i_{\theta}(\theta)^{1/2}$$

- La posterior de Jeffreys es miembro de la familia conjugada de DY si la FEN tiene función de varianza cuadrática (FVC)

- Entropía relativa

$$D_{KL}(f(\cdot)||g(\cdot)) = \int f(x) \ln \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\} dx$$

también se conoce como la divergencia de Kullback-Liebler entre  $f$  y  $g$ .

- Información Mutua

$$\begin{aligned} I(X, \Theta) &= \int \int p(x, \theta) \ln \left\{ \frac{p(x, \theta)}{p(x)p(\theta)} \right\} dx d\theta \\ &= \int p(x) \left\{ \int p(\theta|x) \ln \left\{ \frac{p(\theta|x)}{p(\theta)} \right\} d\theta \right\} dx \\ &= \int p(x) \{ D_{KL}(p(\theta|x)||p(\theta)) \} dx. \end{aligned}$$

Las familias exponenciales de distribuciones se pueden obtener como soluciones a problemas de optimización de la entropía.

- Mínima entropía relativa: para una  $g$  fija, se minimiza  $D_{KL}(f(\cdot)||g(\cdot))$  respecto a  $f$  sujeto a las restricciones

$$\int h_i(x)f(x)dx = m_i; \quad i = 1, \dots, k$$

- Si existe una solución  $f^*$ , entonces pertenece a una familia exponencial general

- $X$ : observable que describe el fenómeno de interés

$$p(x|\theta) \text{ y } p(\theta)$$

- Elementos

$$\begin{aligned} p(x, \theta) &= p(\theta) p(x|\theta) \\ &= p(x) p(\theta|x) \end{aligned}$$

Función de pérdida:  $L(\hat{\theta}, \theta)$



- X: observable que describe el fenómeno de interés

$$p(x|\theta) \text{ y } p(\theta)$$

- Elementos

$$\begin{aligned} p(x, \theta) &= p(\theta) p(x|\theta) \\ &= p(x) p(\theta|x) \end{aligned}$$

Función de pérdida:  $L(\hat{\theta}, \theta)$

- I. Selección del modelo de muestreo  $p(x|\theta)$

$$\int h_i(x)p(x|\theta)dx = m_i; \quad i = 1, \dots, k$$

con  $p(x|\theta)$  “cercana” a la medida base  $b(x)$

Entropía Relativa Mínima (ERM, Kullback 1959):

La solución a este problema de optimización pertenece a una familia exponencial

$$p(x|\theta) = b(x) \exp\{\theta x - M(\theta)\}$$

- X: observable que describe el fenómeno de interés

$$p(x|\theta) \text{ and } p(\theta)$$

- Elementos

$$\begin{aligned} p(x, \theta) &= p(\theta) p(x|\theta) \\ &= p(x) p(\theta|x) \end{aligned}$$

Función de pérdida:  $L(\hat{\theta}, \theta)$

- II. Selección de la inicial  $p(\theta)$

De nuevo, las restricciones + “cercanía” a la medida  $B(\theta)$  + ERM

La solución de este problema  
es un miembro de otra familia exponencial

Si las restricciones se formulan en términos de  $\theta$  y  $M(\theta)$ ,

$p(\theta)$  es conjugada para  $p(x|\theta)$

$$p(\theta) \propto B(\theta) \exp\{x_0\theta - n_0 M(\theta)\}$$

- III. Proceso de aprendizaje

- Una muestra

$X_{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$  muestra aleatoria de  $p(x|\theta)$

$p(\theta|x_{(n)})$  pertenece a la misma familia a la que pertenece  $p(\theta)$  y el cálculo se simplifica

- Varias muestras

$X_{(n_i)}$  muestra aleatoria de  $p(x|\theta_i)$ ;  $i=1, \dots, k$

$p(\theta_i|x_{(n_i)})$  pertenece a la misma familia a la que pertenece  $p(\theta_i)$

– Varias muestras

Si  $\theta_1, \dots, \theta_k$  son intercambiables, entonces pueden considerarse una m.a. de

$$p(\theta|x_0, n_0) \propto B(\theta) \exp\{x_0\theta - n_0M(\theta)\}$$

Si los hiperparámetros  $(x_0, n_0)$  de la inicial común son desconocidos, se puede utilizar el argumento previo para producir una inicial  $p(x_0, n_0)$

Esta inicial resuelve otro problema de optimización; pertenece a una familia exponencial y puede ser conjugada para  $p(\theta|x_0, n_0)$

(George, Makov & Smith; 1993)

- X: observable que describe el fenómeno de interés

$$p(x|\theta) \text{ y } p(\theta)$$

- Elementos

$$\begin{aligned} p(x, \theta) &= p(\theta) p(x|\theta) \\ &= p(x) p(\theta|x) \end{aligned}$$

$$L(\hat{\theta}, \theta) = D_{KL}(p(x|\hat{\theta}) || p(x|\theta))$$

- Información Mutua:  $I(X, \Theta)$  es una funcional de  $p(x, \theta)$

- Dada  $p(x)$ , la minimización de  $I(X, \Theta)$  con respecto a  $p(\theta|x)$  sujeta a la restricción

$$\int \int p(x)p(\theta|x)L(\hat{\theta}(x), \theta)dx d\theta \leq I$$

conduce a una posterior conjugada (GP & Muliere; 2004)

$$p(\theta|x) \propto \exp\{(x + x_0)\theta - (n + n_0)M(\theta)\}$$

- En otro sentido, si se fija  $p(x|\theta)$  y se *maximiza* (asintóticamente)  $I(X, \Theta)$  con respecto a  $p(\theta)$ , se obtiene la inicial de Jeffreys (Clarke & Barron; 1994)
- \* Grünwald and Dawid (2004) exploran la relación entre máxima entropía y mínima pérdida esperada en el caso menos favorable. Consideran problemas de decisión y funciones de pérdida arbitrarios.

Definen versiones generalizadas de entropía, divergencia y familias exponenciales. Como caso particular, la información mutua puede interpretarse como una entropía generalizada.



Volviendo a la selección de la inicial en el caso no jerárquico...

$$p(\theta) \propto B(\theta) \exp\{x_0\theta - n_0M(\theta)\}$$

- $B(\theta) = \pi_L(\theta) \propto 1 \Rightarrow p(\theta) \propto \exp\{x_0\theta - n_0M(\theta)\}$

$$\begin{aligned} E(\mu|X_{(n)}) &= \frac{\sum_i x_i + x_0}{n + n_0} \\ &= \bar{x} \quad (\text{si } x_0 = 0, n_0 = 0) \end{aligned}$$

(Diaconis & Ylvisaker; 1979)

También,

$$\hat{\mu}_{KL} = E(\mu|X_{(n)}) \quad (\text{GP; 1992})$$

- $B(\theta) \propto \pi_J(\theta) \Rightarrow p(\theta) \propto [i_\theta(\theta)]^{1/2} \exp\{x_0\theta - n_0M(\theta)\}$

Esta es la inicial de referencia con restricciones (Bernardo & Smith; 1994)

FEN-FVC  $\Rightarrow \theta \sim \mu \Leftrightarrow i_\theta(\theta) \propto \exp\{k_1\theta - k_2M(\theta)\}$  para algunos  $k_1, k_2$ .

$$\begin{aligned} p(\theta) &\propto \exp\left\{\left(x_0 + \frac{k_1}{2}\right)\theta - \left(n_0 + \frac{k_2}{2}\right)M(\theta)\right\} \\ &= \exp\{\tilde{x}_0\theta - \tilde{n}_0M(\theta)\} \end{aligned}$$

De esta forma, la inicial de referencia (Jeffreys) puede interpretarse como un caso límite de la familia conjugada DY a medida que  $\tilde{x}_0 \rightarrow k_1/2$  y  $\tilde{n}_0 \rightarrow k_2/2$

(GP & Smith; 1995, 1997)

- Considere una FEN-FVC, como en el caso previo, y sea  $\lambda = \lambda(\theta)$  una reparametrización
- Suponga que: (i)  $\lambda \sim \theta$ , y (ii) existe un estimador  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(x_{(n)})$  tal que  $E(\hat{\lambda}|\theta) = \lambda(\theta)$

- Considere una FEN-FVC, como en el caso previo, y sea  $\lambda = \lambda(\theta)$  una reparametrización
- Suponga que: (i)  $\lambda \sim \theta$ , y (ii) existe un estimador  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(x_{(n)})$  tal que  $E(\hat{\lambda}|\theta) = \lambda(\theta)$

**Pregunta:** ¿Qué medida base  $B(\theta)$  produce  $E(\lambda|x_{(n)}) = \hat{\lambda}(x_{(n)})$  ?

- Considere una FEN-FVC, como en el caso previo, y sea  $\lambda = \lambda(\theta)$  una reparametrización
- Suponga que: (i)  $\lambda \sim \theta$ , y (ii) existe un estimador  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(x_{(n)})$  tal que  $E(\hat{\lambda}|\theta) = \lambda(\theta)$

**Pregunta:** ¿Qué medida base  $B(\theta)$  produce  $E(\lambda|x_{(n)}) = \hat{\lambda}(x_{(n)})$  ?

La respuesta es  $B(\theta) \propto i_{\theta}(\theta) |J_{\lambda}(\theta)|^{-1}$ . En este caso,

$$\begin{aligned} p(\theta) &\propto \exp \{ (x_0 + k_1 - r_1) \theta - (n_0 + k_2 - r_2) M(\theta) \} \\ &= \exp \{ \check{x}_0 \theta - \check{n}_0 M(\theta) \} \end{aligned}$$

con  $r_1$  y  $r_2$  determinados por  $\lambda(\cdot)$

$B(\theta)$  también puede interpretarse como un caso límite de la familia conjugada DY como  $\check{x}_0 \rightarrow (k_1 - r_1)$  y  $\check{n}_0 \rightarrow (k_2 - r_2)$

(Hartigan, 1965; GP & Mendoza, 1999)

- Así,  $\pi_H(\theta) \propto i_\theta(\theta) |J_\lambda(\theta)|^{-1}$  es una inicial “no informativa” para  $\lambda$ .  
En términos de  $\lambda$ , resulta

$$\pi_\lambda(\lambda) \propto i_\lambda(\lambda)$$

- Así,  $\pi_H(\theta) \propto i_\theta(\theta) |J_\lambda(\theta)|^{-1}$  es una inicial “no informativa” para  $\lambda$ .  
En términos de  $\lambda$ , resulta

$$\pi_\lambda(\lambda) \propto i_\lambda(\lambda)$$

Observe que

$$\pi_J(\lambda) \propto [i_\lambda(\lambda)]^{1/2}$$

- Así,  $\pi_H(\theta) \propto i_\theta(\theta) |J_\lambda(\theta)|^{-1}$  es una inicial “no informativa” para  $\lambda$ .  
En términos de  $\lambda$ , resulta

$$\pi_\lambda(\lambda) \propto i_\lambda(\lambda)$$

Observe que

$$\pi_J(\lambda) \propto [i_\lambda(\lambda)]^{1/2}$$

y

$$\pi_L(\lambda) \propto 1$$



- Las familias Exponenciales y la maximización de la entropía con restricciones, están muy relacionadas. Si las restricciones se eligen apropiadamente, pueden producir conjugamiento.
- Existe una *dualidad* entre maximización de la entropía y minimización de la pérdida esperada en el caso menos favorable.
- Se pueden obtener distintas clases de iniciales "no informativas" como casos límite de las familias conjugadas DY. Un caso interesante se presenta cuando el valor esperado final del parámetro  $\lambda$  coincide con el correspondiente estimador *insesgado*  $\hat{\lambda}$ .

- Otra *dualidad* es la que existe entre la noción clásica de *insegamiento* y la minimización de la pérdida cuadrática esperada. Los resultados sugieren que esta relación se podría extender utilizando una definición más general de insegamiento (para funciones de pérdida arbitrarias) como la que introducen Noorbaloochi & Meeden (1983).
- Otras generalizaciones interesantes podrían examinarse a partir de la teoría desarrollada por Grünwald & Dawid.

- Bernardo JM & Smith AFM (1994). *Bayesian Theory*. Wiley.
- Clarke BS & Barron AR (1994). Jeffreys' prior is asymptotically least favorable under entropy risk. *Journal of Statistical Planning and Inference* 41, 37–60.
- Diaconis P & Ylvisaker D (1979). Conjugate priors for exponential exponential families. *Annals of Statistics* 7, 269–281.
- George E, Makov U & Smith AFM (1993). Conjugate likelihood distributions. *Scandinavian Journal of Statistics* 26, 509–517.
- Gutiérrez-Peña E & Mendoza M (1999). A note on Bayes estimates for exponential families. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (España)* 93, 351–356.
- Gutiérrez-Peña E & Muliere P (2004). Conjugate priors represent strong pre-experimental assumptions. *Scandinavian Journal of Statistics* 31, 235–246.
- Gutiérrez-Peña E & Smith AFM (1995). Conjugate parametrizations for natural exponential families. *Journal of the American Statistical Association* 90, 1347–1356.
- Gutiérrez-Peña E & Smith AFM (1997). Exponential and Bayesian conjugate families: Review and Extensions. *Test* 6, 1–90.
- Grünwald, PD & Dawid, AP (2004). Game theory, maximum entropy, minimum discrepancy and robust Bayesian decision theory. *Annals of Statistics* 32, 1367–1433.
- Hartigan J (1965). The asymptotically unbiased prior distribution. *Annals of Mathematical Statistics* 36, 1137–1152.
- Kullback S (1959). *Information Theory and Statistics*. Wiley.
- Noorbaloochi S & Meeden G (1983). Unbiasedness as the dual of being Bayes. *Journal of the American Statistical Association* 78, 619–623.