Ana Álvarez Velasco y Miguel Ángel Mota Gaytán

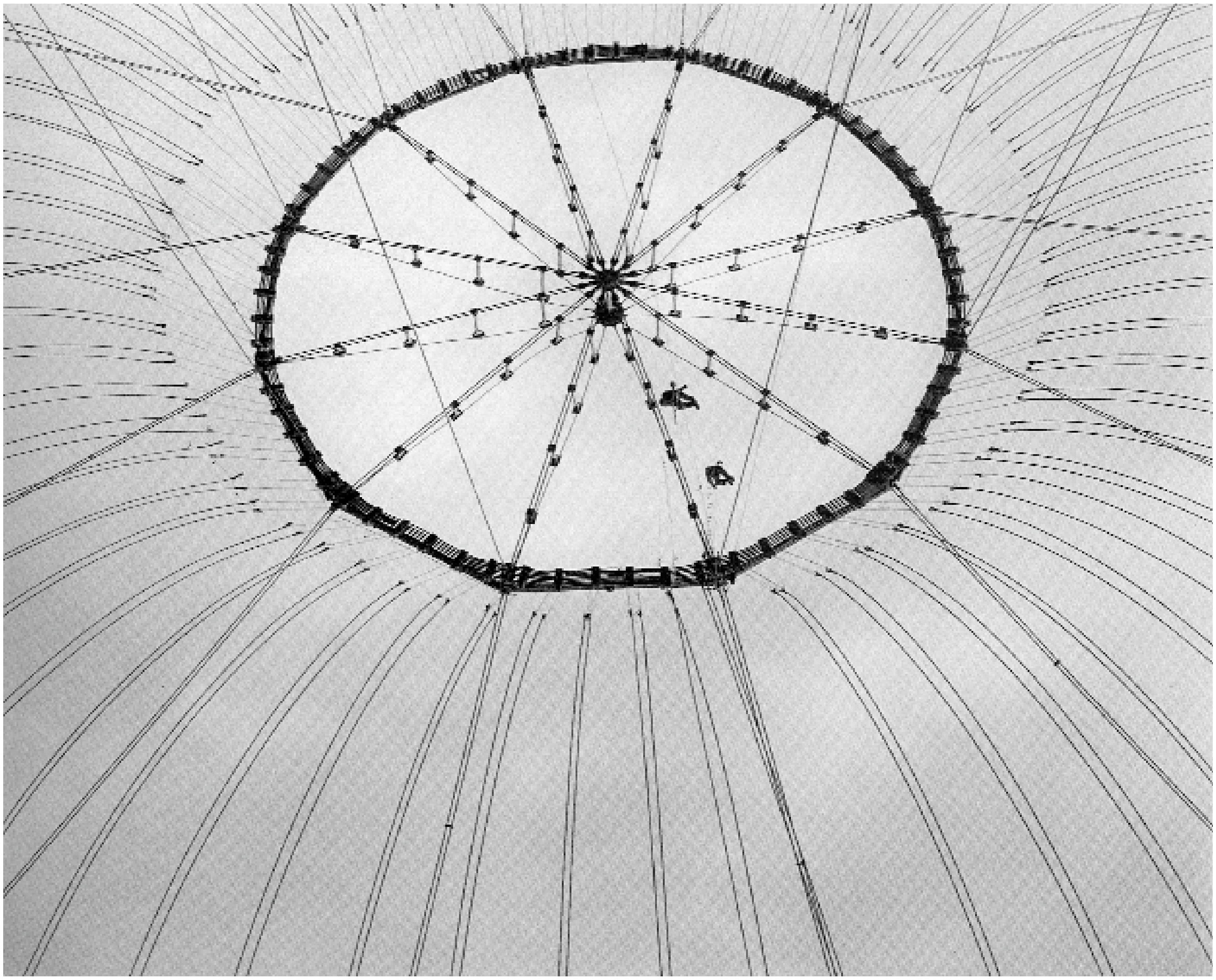
Forcing
otros mundos posibles

Si la teoría de conjuntos se encuentra ahora en un periodo introspectivo, estoy convencido de que emergerá más fuerte que nunca y con mayor impacto sobre otras áreas de las matemáticas.

RONALD JENSEN, 1995

El trabajo del lógico alemán Kurt Gödel ha sido uno de los más reconocidos dentro y fuera del ámbito matemático del siglo XX. Uno de sus resultados más famosos, conocido como el teorema de incompletud, establece que existen enunciados que no pueden demostrarse ni refutarse a partir de teorías que se suponían suficientemente poderosas. Los no matemáticos consideraron, no sin mórbido placer, que esto implicaría el fin de las matemáticas como la reina de las ciencias; y los matemáticos, por lo general desdeñosos de los trabajos de la lógica matemática, lo redujeron a un resultado de interés filosófico que en nada interfería con sus labores de investigación.

El enunciado que Gödel exhibió para demostrar su teorema es, en términos de contenido, completamente irrelevante y artificial. En otras palabras, no es uno que encierre una genuina preocupación matemática, sino que fue hecho *ex profeso* para la demostración del teorema y es completamente técnico, como los enunciados de "anita lava la tina" o "dábale arroz a la zorra el abad", usados para ejemplificar los palíndromos —frases que se puede leer al derecho y al revés. Sin embargo, gracias al trabajo de Gödel y al de matemáticos como Paul Cohen, se advirtió que la gama de enunciados que entran en la categoría de los indecidibles —que no pueden demostrarse ni refutarse a partir de una teoría— es muy amplia e incluye algunas preguntas que han obsesionado a los matemáticos durante largos periodos de tiempo. Uno de los ejemplos más relevantes es el problema del continuo de Cantor, que consiste en determinar cuántos números reales hay, con el cual iniciaba la lista de los veintitrés desafíos de la matemática del siglo XX que Hilbert presentó en el Con-



greso Internacional de Matemáticas celebrado en París en 1900.

El estudio sobre el tamaño del conjunto de los números reales se originó en problemas relacionados con las funciones y sus discontinuidades, pero se convirtió en un tema de interés en si mismo cuando Cantor, considerado el padre de la teoría de conjuntos, demostró un sorprendente y conmovedor resultado, aunque el conjunto de los números naturales y el de los reales son ambos infinitos, uno es más grande que el otro. Sin embargo, quedaba por determinar qué tan grande era el conjunto de los reales. Cantor estaba convencido de que no existía ningún conjunto infinito estrictamente más grande que los naturales y estrictamente menor que los reales, es decir, que la cantidad de números reales, era la cantidad infinita que seguía a la cantidad de naturales. Pero nunca pudo demostrarlo.

Ahora se sabe que la hipótesis de Cantor, con los axiomas aceptados en la teoría de conjuntos, no puede demostrarse ni refutarse; es decir, es un enunciado indecible a partir de esos axiomas. El principio que rige las demostraciones no es difícil de entender, a pesar de que las herramientas lógicas que se emplean sean sumamente complejas. Ambas se basan en otro resultado de Gödel —conocido como el teorema de correctud-completud— en el que se establece un importante criterio: una teoría matemática es consistente (no contradictoria) si y sólo si tiene modelo. En términos muy intuitivos un modelo de una teoría axiomática es un mundo en el que todos los axiomas que la componen son verdaderos. Por ejemplo, consideremos la teoría T compuesta por los siguientes axiomas: axioma de asimetría, no existen a y b tales que $a < b$ y $b < a$; axioma de transitividad, para todos a, b y c si $a < b$ y $b < c$

entonces $a < c$; axioma de linealidad, para todos a y b se tiene que $a < b$ ó $b < a$ ó $a = b$; axioma de densidad, para todos a y b tales que $a < b$ existe c tal que $a < c < b$. En este caso, el conjunto de los números racionales con su orden canónico es modelo de T.

De manera más formal, un modelo de una teoría es una interpretación de su lenguaje en la que todos los axiomas son verdaderos. Debe entenderse que una interpretación consta de un conjunto no vacío de individuos y de relaciones entre ellos que corresponden a los predicados del lenguaje. Por ejemplo, en el caso particular de la teoría de conjuntos, el universo de individuos bien podría ser el conjunto de las vacas locas y el parentesco entre ellas interpretar el símbolo de pertenencia. Sin embargo, no cualquier interpretación es un modelo, así que en lugar de buscar en los ranchos británicos conviene más hacerlo en las matemáticas. De hecho, los modelos de la teoría de conjuntos con los que usualmente se trabaja son estándar. Es decir, son modelos que sólo admiten entes matemáticos y el símbolo de pertenencia es interpretado como la relación "ser elemento de".

Es de esperarse que en cualquier modelo de una teoría no sólo todos sus axiomas sean verdaderos, sino también todos los teoremas que de ellos se derivan —lo que es otra forma de enunciar el teorema de correctud—completud. Por lo tanto, para establecer que un enunciado no puede ser demostrado a partir de una teoría basta encontrar un modelo de ésta en el que sea falso. Por ejemplo, "todo conjunto acotado superiormente tiene supremo" —que llamaremos hipótesis de completud— no es un teorema de la teoría T, porque el conjunto de los números racionales es modelo de T, pero el supremo del subconjunto de los racionales tales que su cuadrado es menor que 2 no es un número racional —ya que se trata de 2. Así que el enunciado es falso en ese modelo de T. Lo interesante es que su negación —existe un conjunto acotado superiormente que no tiene supremo— tampoco es teorema de T, pues el conjunto de los números reales con el orden canónico sí es modelo de T junto con la hipótesis de completud. En resumen, esta hipótesis no puede demostrarse ni refutarse a partir de la teoría T.

La dimensión desconocida

Durante las dos primeras décadas del siglo XX el intento por fundamentar la matemática y resolver los problemas de la naciente teoría de conjuntos dio como resultado la axiomática de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección, que no eran sino la formalización de los supuestos comúnmente aceptados por los matemáticos, como la existencia del conjunto vacío, de uno infinito y del que tiene como elementos a todos los subconjuntos de un conjunto cualquiera A —conocido como el conjunto potencia de A.

A pesar de sus modestos axiomas, Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección es una teoría lo suficientemente general y poderosa como para reconstruir a casi toda la matemática clásica. Pero no sólo eso, también permitió rescatar todas las ideas formuladas por Cantor. Así, desde ella es posible demostrar que dado un conjunto A el cardinal del conjunto potencia de A es estrictamente mayor que el de A. De esta forma, y dado que el conjunto de los números reales es identificable —a través de una función biyectiva— con el conjunto potencia de los números naturales, es inmediato que el cardinal del conjunto de los números reales es estrictamente mayor que el del conjunto de los naturales. El teorema de Cantor también hace pensar que no sólo hay dos tamaños de infinito —el de los naturales y el de los reales— sino una infinidad de ellos. De esta forma, y también dentro de la misma axiomática, se introdujeron los cardinales infinitos —una nueva clase de números que pretendían retratar todas las posibles "tallas" del infinito. El orden ascendente de los cardinales infinitos es $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$... $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$...etc, donde $\aleph_0$ es el cardinal del conjunto de los números naturales. Gracias a esta notación la hipótesis del continuo se puede formular como "el cardinal de los números reales es $\aleph_1$".

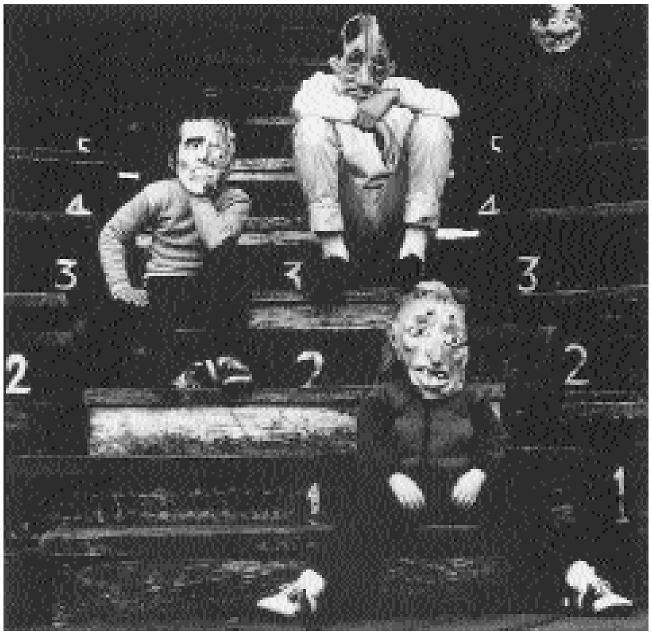
Esta conjetura, como se señaló, nunca pudo probarse. Sin embargo, Gödel introdujo algunos avances importantes, demostró que la hipótesis de Cantor no entraba en contradicción con la teoría de conjuntos. Para ello construyó un modelo muy especial de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, el universo constructible L. Aquel era un mundo conformado únicamente por los conjuntos definibles a partir del lenguaje. Ciertamente familiar al quehacer matemático, pues la mayor parte de los conjuntos son definibles a partir del lenguaje —por ejemplo, el de los números pares se puede describir mediante la fórmula $\{ x \mid \exists\, n \in N \text{ tal que } x = 2n \}$ que significa "el conjunto de los números tales que son iguales a un número natural multiplicado por dos". En cierto sentido la virtud de este universo, aunque también su pobreza, consistía en haber descartado la posibilidad de que existieran OVNIS —o mejor dicho COENIS, Conjuntos Existentes No Identificados. Gödel demostró, entre otras cosas, que L era el más pequeño de los mundos posibles en su categoría, ya que cualquier otro modelo de su tipo debería contenerlo —lo que se conoce como la minimalidad de L. Así, no es de extrañar que en el universo constructible el cardinal del conjunto de los números reales fuera también el más pequeño posible, $\aleph_1$.

La construcción de L o de cualquier otro modelo en el que la hipótesis del continuo sea verdadera no prueba que dicha hipótesis sea teorema, pero si garantiza que es imposible refutarla a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección. Sin embargo, la creencia, compartida por el propio Gödel, de que la hipótesis de Cantor era falsa, llevó a los matemáticos a tratar de demostrar que la negación tampoco entraba en contradicción con la teoría de conjuntos. Esto, que a primera vista parece una necedad, forma parte de una larga discusión en la que Gödel y Tarski probaron que no todo lo verdadero es demostrable (!?!?) y que no todo lo irrefutable es verdadero. No obstante, como es cierto que todo lo demostrable es verdadero, para dejar abierta la posibilidad de que la hipótesis del continuo fuera falsa era necesario demostrar que no era un teorema de la teoría de conjuntos.

En 1963 Paul Cohen logra este objetivo y descubre un método que permite construir distintos modelos de esa teoría. El método de Forcing, que originalmente sirvió para introducir modelos en los que se viola la hipótesis del continuo, se convirtió en una fecunda técnica que permite crear mundos en los que suceden cosas sorprendentes —como en los que vale una versión débil del axioma de elección y todos los subconjuntos de reales son Lebesgue medibles. Los detalles técnicos de este método son sumamente sofisticados, pero puede entenderse en términos generales como el principio inverso a aquel empleado por Gödel para construir el universo L.

El Imperio contraataca

Forcing es un método "expansionista" en el que se parte de la existencia de un modelo de los axiomas de Zermelo-Fraenkel a los que se le agregan nuevos conjuntos. Ciertamente, la idea de extender estructuras y añadir objetos ideales es muy común en el quehacer matemático. Sin embargo, esta práctica resultó aún más natural cuando el objetivo era exhibir la existencia de modelos donde no vale la hipótesis del continuo. Si Gödel vio que al limitar el universo se obtenía un modelo donde predomina la pobreza y donde el cardinal del conjunto de números reales es muy pequeño, entonces la solución óptima consis-



tía en tratar de robustecer al universo con la esperanza de que la potencia de los naturales también embarneciese.

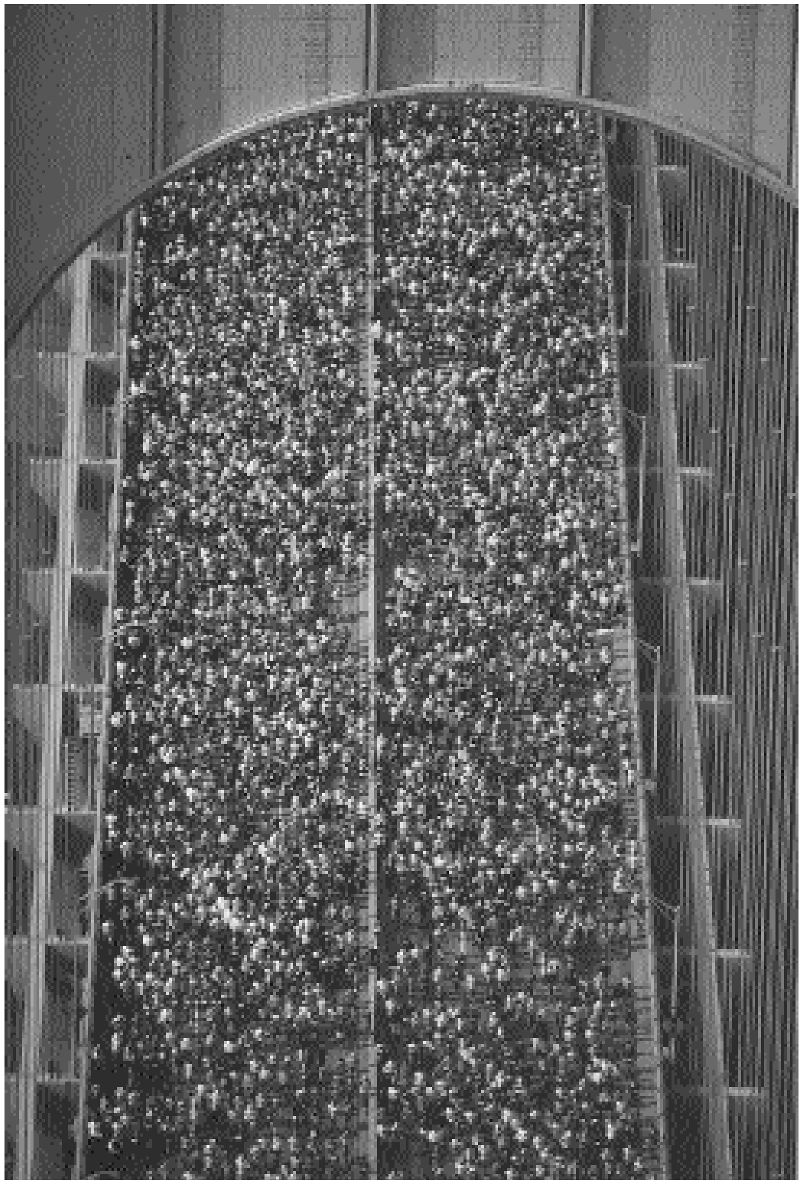
No obstante, la imagen de un modelo que se alimenta compulsivamente no es lo más cercano a lo que sucede en Forcing. Extender arbitrariamente un modelo puede conducir a la malformación y la invalidez de los axiomas de la teoría. Por ello, cierto grado de control es necesario. Hay que extender el modelo inicial —conocido como modelo base— de manera que los axiomas de la teoría de conjuntos sigan siendo verdaderos. Este es quizás el componente clave del método de Forcing, los elementos que se agregan, aunque no se conocen explícitamente, están parcialmente descritos por los elementos del modelo base.

La extensión del conjunto de los números racionales, mediante cortaduras de Dedekind, es una analogía que ilustra muy bien el procedimiento. Los racionales son un modelo de la teoría *T* en el que no se cumple la hipótesis de completud, pero al que pueden agregarse los supremos faltantes. Éstos, como es el caso de 2, no se conocen explícitamente, pero a partir del orden que hay entre los números racionales se pueden caracterizar a través de segmentos iniciales —conjunto de números acotados pero sin elemento máximo—, lo que permite garantizar que el modelo extendido (el conjunto de los números reales) cumple tanto la hipótesis de completud, como todos los axiomas de la teoría *T*.

La idea de definir objetos a través de un orden también es clave en la construcción de nuevos modelos de la teoría de conjuntos. En este caso, se parte de la existencia de un modelo M de la axiomática de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección y se selecciona un orden parcial acorde al tipo de mundo que se desea construir. Pero no sólo eso, en Forcing se utiliza un objeto G que filtra y selecciona los nuevos elementos que pertenecerán al modelo extendido. Dicho objeto —conocido como filtro genérico— es un subconjunto del orden parcial que cumple las siguientes propiedades: (1) para cualesquiera dos elementos del filtro existe un tercero, también en el filtro, que es menor o igual que ambos; (2) todos los elementos del orden parcial que sean mayores que alguno del filtro deben también estar en el filtro —así que G parece realmente un filtro de café, ya que chupa todo lo que está encima de él—; (3) todo conjunto denso comparte elementos con G —un subconjunto D del orden parcial es denso si para cualquier elemento del orden parcial existe uno de D que es menor o igual que él.

La íntima relación entre el orden parcial y el filtro genérico es fascinante. Los elementos del orden parcial actúan como las letras que componen al ADN y permiten construir códigos que encierran información sobre posibles nuevos conjuntos. Por su parte, G actúa como catalizador, decide qué códigos se deben descifrar y tiene la capacidad de dar vida a algunos de los conjuntos que fueron sugeridos por el orden parcial. Esto explica por qué la extensión de M se denota como M[G] y se conoce como la extensión genérica de M.

Para que M[G] sea verdaderamente una extensión de M, es decir, para que en ella existan nuevos conjuntos, es necesario que el filtro genérico G no sea elemento de M. La elección de un orden parcial frondoso —uno semejante a un diabólico árbol que ha sido colocado al revés y cuyas ramas infinitas nunca cesan de bifurcarse— garantiza que G es un agente externo a M. Esto dio lugar a una literatura que hace pensar en el Génesis y permite sospechar que los teórico conjuntistas pertenecen a alguna secta religiosa, "cada elemento de M[G] tendrá un nombre en M, que indicará cómo se puede construir a partir de G [...] La gente que vive en M podrá entender el nombre de un objeto en M[G] pero no podrá saber cómo es, pues para ello necesitaría conocer G". Más allá del misticismo que estas palabras parecen encerrar, en ellas se pone de manifiesto un hecho fundamental para el método de Forcing, el conjunto potencia de un conjunto dado no es el mismo en todas partes. Para la gente de M[G], G es parte de la potencia del orden parcial P, mientras que los habitantes de



M ni siquiera reconocen la existencia de G. Algo análogo sucede con la potencia de los naturales, si para el modelo base sólo hay $\aleph_1$ subconjuntos de naturales, con la ayuda del filtro genérico de un determinado orden parcial se pueden develar nuevos subconjuntos de naturales y embarnecer, como se quería, la potencia de los naturales.

La invasión de los reales

El orden parcial utilizado para construir la extensión genérica en la que se viola la hipótesis del continuo está compuesto por las funciones que van de algún subconjunto finito de números naturales en el conjunto que tiene como únicos elementos al cero y al uno. Si recordamos que las funciones son conjuntos de pares ordenados, entonces $f = \{(0,1), (3,0), (6,1)\}$ es un ejemplo del tipo de funciones que acabamos de describir. El orden entre ellas es la contención invertida. De modo que si $g = \{(0,1), (3,0), (6,1), (7, 0)\}$ entonces g es menor o igual que f —ya que f es subconjunto de g. No es posible exhibir explícitamente un filtro genérico, pero un importante teorema de combinatoria infinita nos garantiza que al menos existe uno. Lo interesante es que las tres propiedades generales que caracterizan a los filtros genéricos son suficientes para demostrar que la unión del filtro —es decir, el conjunto que tiene a todos los pares ordenados de las funciones que

pertenecen a G— es una función que tiene como dominio a todo el conjunto de los números naturales. En efecto, la primera propiedad traducida a nuestro ejemplo garantiza que las funciones que pertenecen a G son compatibles —es decir, si (m, p) y (m, q) son pares que pertenecen respectivamente a dos funciones de G entonces $p=q$. De modo que la unión de G sí es función. Para mostrar que el dominio de esta función son todos los naturales se hace una elegante aplicación de la tercera propiedad tomando, para cada número natural n, el conjunto D_n de las funciones que tienen en su dominio a n y demostrando que se trata de un conjunto denso.

El hecho de que la unión de G sea una función que tiene como dominio a todos los naturales, y que toma valores binarios, significa que se trata de una sucesión infinita de ceros y unos, la cual puede identificarse con la función característica de algún subconjunto de los naturales o incluso con la expansión binaria de un nuevo número real. Es por ello, que la unión de G se conoce como un real de Cohen y el método de Forcing con ese tipo de órdenes —funciones parciales finitas— es en realidad un método para extender modelos agregando nuevos reales.

En el ejemplo usado sólo se tiene la certeza de haber agregado un nuevo real, pero una pequeña modificación en el orden —que intuitivamente consiste en tomar sucesiones finitas indexadas con los números ordinales menores que $\aleph_2$- permite agregar $\aleph_2$ nuevos reales y con ello obtener un modelo donde la hipótesis del continuo es falsa.

Apocalipsis Now

El año de 1963 pudo haber pasado a la historia de las matemáticas como en el que la axiomática de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección recibió un doloroso tiro de gracia. Después de todo, ese fue el año en que Cohen completó la denuncia que Gödel había interpuesto veinticinco años antes y se hizo del domino público que, a pesar de sus virtudes, esta teoría no había logrado satisfacer uno de los principales objetivos para los cuales había sido creada. La teoría axiomática que a principios del siglo xx pretendía dar fundamento a las matemáticas nunca sería capaz de responder a una de las preguntas básicas, y ningún apuesto y gentil matemático podía rescatarla de su perpetua condena a la ignorancia. Los encabezados de la nota roja no cesaban de aparecer, "Misterio sin resolver", "Fenómenos paranormales", "Apocalipsis" "¡La teoría de conjuntos se acaba!". Lo que aquellos irresponsables periodistas nunca dijeron es que con el método de Forcing una nueva era comenzaba.

Desde entonces importantes centros de investigación se han abocado a la tarea de buscar nuevos axiomas que permitan responder al problema del continuo bajo la firme creencia de que éste tiene una realidad objetiva que debe ser descubierta. Recientes avances parecen indicar que se pueden agregar nuevos axiomas para demostrar que el cardinal del continuo es $\aleph_2$. Sin embargo, no es del todo claro qué tan naturales e intuitivamente aceptables son dichos axiomas.

Además de la posición idealista se encuentra la postura de quienes defienden la diversidad matemática y consideran que la independencia de la hipótesis del continuo puede dar lugar a distintas teorías de conjuntos. Lejos de considerarse como una "falta de lealtad y compromiso", la exploración de diversas teorías ha logrado enriquecer el panorama matemático —del mismo modo en que la independencia del quinto postulado de Euclides dio origen a las geometrías no euclidianas sin que éstas restaran valor o desplazaran por completo la geometría euclidiana. El libro de Sierpienski titulado *La hipótesis del* *continuo* es un intento por sistematizar todos los resultados que se derivan de ella y así tener una idea clara de lo que son las matemáticas que aceptan como verdadera la conjetura de Cantor. Entre los resultados más interesantes, Ulam dio una demostración muy original de la existencia de conjuntos no Lebesgue medibles que, a diferencia de la de Vitali, presupone la hipótesis del continuo, pero no requiere de la invarianza bajo traslaciones y por lo tanto puede ser generalizada a medidas definidas sobre conjuntos que comparten propiedades de cardinalidad, independientemente de si son o no espacios métricos.

En general, las diferencias en el tejido matemático que se obtienen de aceptar o rechazar la hipótesis del continuo invitan a una reflexión profunda, pero con ambas posturas queda claro que los resultados de indecidibilidad que arrojan métodos como el de Forcing, lejos de paralizar a las matemáticas las ayudan a no perderse en la búsqueda infructuosa de pruebas inexistentes y a reorientar así su camino.

Más allá del problema del continuo

El método de Forcing no sólo ha servido para demostrar el carácter indecidible de ciertos enunciados como la hipótesis del continuo, sino que también ha permitido aclarar qué condiciones son necesarias para la demostración de sorprendentes resultados en diversas áreas de las matemáticas. Esto puede parecer un simple juego de lógica pero no es exagerado decir que ha permitido que el espíritu de algunos matemáticos finalmente descanse en paz. En 1905, después de que Lebesgue propusiera una manera de medir el tamaño geométrico de conjuntos de reales, Giuseppe Vitali demostró que existían conjuntos no medibles. Este resultado se tradujo más adelante en la famosa paradoja de Banach-Tarski, una esfera se puede descomponer en una cantidad finita de pedazos a partir de los cuales se pueden construir dos esferas del mismo tamaño que la original.

El uso del axioma de elección en la demostración de estos resultados era, según Lebesgue, el autor de semejantes "atrocidades". Sin embargo, nunca pudo confirmarlo, si los conjuntos no medibles exhibidos hasta ese momento existían gracias al axioma de elección, nada garantizaba que eran los únicos. No fue sino hasta 1973 que Robert Solovay demostró, mediante una extraordinaria combinación de las ideas de Cohen y Gödel, que el axioma de elección es condición necesaria para la existencia de conjuntos no medibles. Utilizando el método de Forcing, Solovay dio una extensión genérica a partir de la cual construyó un modelo tipo el universo constructible L. Su trabajo, que puede ser calificado de auténtica ingeniería genética conjuntista, dio como resultado un mundo feliz en el que no sólo todos los conjuntos de reales son Lebesgue medibles y son "decentes" en términos topológicos y de cardinalidad, sino en el que además se cumple una versión del axioma de elección que, aunque más débil que la original, garantiza todos los resultados del análisis matemático. Así que el modelo de Solovay puso de manifiesto el potencial del método de Forcing para explorar una inmensa gama de mundos matemáticos. ⊙

Ana Álvarez Velasco
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México.
Miguel Ángel Mota Gaytán
Universidad de Barcelona.

Referencias bibliográficas

Amor Montaño, José Alfredo. 1990. *Forcing y pruebas de independencia*. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones 9, XXIII Congreso SMM, México.

Álvarez Velasco, Ana. 2003. *Axioma de elección y Teoría de la Medida*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México.

Kunen, Kenneth. 1980. *Set Theory. An introduction to independence proofs*. North Holland, Amsterdam.

Mendelson, Elliot. 1987. *Introduction to Mathematical Logic*. Wadsworth Books, 3a. edición.

Mota Gaytán, Miguel Ángel. 2003. *¿Qué se puede desde ZFE sobre el cardinal del continuo?* Tesis de Licenciatura, ITAM, México.

Solovay, Robert. 1970. "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue mesurable", en *Annals of Mathematics* 92.

Sierpinski, Waclaw. *Hypothèse du continu*. 1956. Chelsea, Nueva York.

Imágenes

Pp. 67 y 71: Bruce Bernard (comp.). *Millennium Dome*, 1998; *Maratón de Nueva York*, 1991. Pp. 68 y 69: The Hulton Getty Picture Collection. *Bertram Mills Circus*, 1953; *Sur de Gales*, 1937. P. 70: Ralph Eugene Meatyard. *Romance (N) from Ambrose Bierse*, No. 3, 1962. P. 72: Herbert Bayer. *Autoretrato*, 1932. P. 73: Jerry N. Uelsmann. *Manos sosteniendo un objeto esférico frente a un paisaje montañoso*, 1970.