Ecuaciones Diferenciales Parciales
Tarea 1
Marzo 3, 2001

Características

1. Considere los siguientes sistemas de coordenadas:

   (a) Parabólico-cilíndricas (u, v, z)

   $$x = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right), \quad y = uv, \quad z = z$$

   con

   $$-\infty < u < \infty,\ v \geq 0,\ -\infty < z < \infty$$

   (b) Paraboloides (u, v, ϕ)

   $$x = uv\cos\phi, \quad y = uv\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad z = \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)$$

   con

   $$u \geq 0,\ v \geq 0,\ 0 \leq \phi < 2\pi$$

   (c) Eliptico-cilíndricas (u, v, z)

   $$x = a\,\cosh u\ \cos v, \quad y = a\,\mathrm{senh}\,u\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = z$$

   con

   $$u \geq 0,\ 0 \leq v < 2\pi,\ -\infty < z < \infty$$

   y $2a$ la distancia entre focos de una elipse con centro en el origen.

   Entonces

   (a) Determine si estos sistemas son ortogonales entre sí (Sugerencia: Calcular la forma cuadrática asociada a la distancia entre dos puntos)

   (b) Si el inciso anterior es verdadero determinar los factores de escala.

   (c) Describa los ejes y las superficies coordenadas de los sistemas anteriores.

   (d) Demuestre en general que

   $$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix}$$

   donde $\mathbf{a} =< a_1, a_2, a_3 >$

2. Sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la curva $\mathcal{C}$ descrita por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= c_1 \\ F_2(x,y,z) &= c_2 \end{aligned}$$

demuestre que el vector

$$\nabla F_1 \times \nabla F_2$$

es tangente a $\mathcal{C}$ en $\mathbf{x}_0$

3. Determine un vector tangente al círculo en el espacio dado por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

en el punto $\left(1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, -3/\sqrt{14}\right)$

4. Sea $F \in \mathsf{C}^1(\Omega)$ una función real y donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es un dominio, tal que satisface la condición $\nabla F \neq 0$ en Ω. Sea también la superficie de nivel S_c dada por

$$F(x,y,z) = c$$

Si $\mathcal{C} \in \mathsf{C}^1(\ \Omega)$ una curva dada por

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \langle x,y,z \rangle = \langle f_1(t), f_2(t), f_3(t) \rangle, \quad t \in \mathcal{I} \right\}$$

Suponga que la curva $\mathcal{C}$ está contenida completamente en la superficie de nivel, entonces

$$F(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = c, \quad \in \mathcal{I}$$

Utilice la regla de la cadena para demostrar que en todo punto de $\mathcal{C}$ el vector tangente a la curva en ortogonal al vector normal a S_c.

5. La curva $\mathcal{C}$ dada por

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \langle x,y,z \rangle = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, 2\cos 2t \rangle, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

está contenida en alguna superficie de nivel S_c de

$$F(x,y,z) = 2\left(x^2 - y^2 + 1\right) + z$$

Determine la superficie de nivel correspondiente y verifique que en todo punto de $\mathcal{C}$ el vector tangente a la curva es ortogonal al vector normal a S_c.

6. Encuentre una representación paramétrica de la curva en el espacio dada por

$$x^2 + y^2 = 1; \quad x + y + z = 0$$

7. Describa la familia biparamétrica de curvas

$$F_1(x, y, z) = c_1; \quad F_2(x, y, z) = c_2$$

donde

$$F_1(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

y F_2 es una de las siguientes funciones:

(a)

$$F_2(x, y, z) = z$$

(b)

$$F_2(x, y, z) = x$$

(c)

$$F_2(x, y, z) = x + z$$

8. Sea el siguiente campo vectorial

$$\mathbf{V}\,(x, y, z) = \langle 1, 1, 1 \rangle$$

(a) Describa las curvas integrales de $\mathbf{V}$ haciendo uso de la 'intuición geométrica'.

(b) Escriba una ecuación como

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{1}$$

para este campo vectorial y sugiera soluciones de (1) para obtener dos primeras integrales de $\mathbf{V}$ funcionalmente independientes. Escriba su respuesta en términos de

$$u_1\,(x, y, z) = c_1, \quad u_2(x, y, z) = c_2 \tag{2}$$

formulando así las curvas solución de $\mathbf{V}$ como una familia biparamétrica.

(c) Escriba el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias asociadas a $\mathbf{V}$ y obtenga las ecuaciones de las primeras curvas integrales mediante la solución de ese sistema.

9. Repita el problema anterior para los campos vectoriales

$$\mathbf{V} = \langle 1, 1, 0 \rangle\,; \quad \mathbf{V} = \langle 1, -1, 0 \rangle$$

10. Determine las curvas integrales de los campos vectoriales:

(a)

$$\mathbf{V} = \langle 0, z, -y \rangle$$

(b)

$$\mathbf{V} = \left\langle y^3, -x^3, 0 \right\rangle$$

(c)

$$\mathbf{V} = \left\langle 1, 3x^2, 0 \right\rangle$$

11. Sea $\mathbf{V} = \langle x, y, z \rangle$ definido en el dominio Ω dado por el octante $x > 0, y > 0, z > 0$ de uedtre que

$$\frac{yz}{x^2}, \quad \text{y} \quad \frac{y^2 - z^2}{x^2}$$

son primeras integrales de $\mathbf{V}$, funcionalmente independientes en Ω. Verifique directamente que las ecuaciones

$$\frac{yz}{x^2} = c_1 \;\; \text{y} \;\; \frac{y^2 - z^2}{x^2} = c_2$$

y las ecuaciones

$$\frac{y}{x} = c_1 \;\; \text{y} \;\; \frac{z}{x} = c_2$$

describen la misma familia biparamétrica de curvas en Ω.

12. La definición de independencia funcional dada en clase aparentemente no coincide con la que se dá en los cursos de cálculo (‘? análisis ?).

(a) Escriba la definición formal de independencia funcional (Teorema de funciones implícitas).

(b) Demuestre que si dos funciones que son funcionalmente independientes de acuerdo con la definición en el inciso anterior también lo es de acuerdo con la definición dada en clase.

13. Para cada una de las siguientes EDP determine la integral general y calcule tres soluciones diferentes y describa cuidadosamente los dominios donde las soluciones están definidas:

(a)

$$x^2 z_x + y^2 z_y = 2xy$$

(b)

$$z z_x + y z_y = x$$

(c)

$$z_y = 3y^2$$

(d)

$$(y+z)\, z_x + y z_y = x - y$$

(e)

$$x\,(y-z)\, z_x + y\,(z-x)\, z_y = z\,(x-y)$$

14. Resuelva los siguientes problemas de Cauchy, en cada caso describa cuidadosamente el dominio de la solución (si existe)

(a)

$$z_x + z_y = z; \text{ sobre la curva inicial } \ \mathcal{C}_i : x = t,\ y = 0,\ -\infty > t,\ z = \cos t$$

(b)

$$x\,(y-z)\, z_x + y\,(z-x)\, z_y = z\,(x-y)\,;$$

$$\text{sobre la curva inicial } \ \mathcal{C}_i : x = t,\ y = \frac{2t}{t^2-1},\ t \in (0,1),\ z = t$$

(c)

$$x z_x + y z_y = z; \quad \text{sobre la curva inicial } \ \mathcal{C}_i :\ y = x^2, x > 0,\ z = 1$$

(d)

$$zz_x + yz_y = x; \text{ sobre la curva inicial } \mathcal{C}_i : x = t,\ y = 1,\ -\infty < t,\ z = 2t$$

(e)

$$zz_x + yz_y = x;$$

sobre la curva inicial:

$$x = t,\ y = t,\ t > 0$$

z tiene los siguientes valores:

i.

$$z = 2t$$

ii.

$$z = t$$

iii.

$$z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

15. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales

 (a) $u_x u_y = 1$ si $u(x, 0) = \log x$
 (b) $(u_x)^2 + (u_y)^2 - u = 0$ si $u(x, 0) = x^2$
 (c) $(u_x)^2 + (u_y)^2 - u = 0$ si en la curva $x_0 = \cos t$, $y_0 = \operatorname{sen} t$, $u_0 = 1$

EDP segundo orden

1. Determine si las siguientes ecuaciones diferenciales son elípticas, hiperbólicas o parabólicas y en cada caso obtenga su solución general:

 -
 $$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

 -
 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- $$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

- $$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2. Una función $u(r,t)$ satisface la ecuación:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

donde c es una constante. Demuestre que puede reducirse a la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

mediante la definición de una nueva variable dependiente:

$$v(r,t) = r\,u(r,t)$$

y las transformaciones afines:

$$\begin{aligned} \xi &= r + ct \\ \eta &= r - ct \end{aligned}$$

En consecuencia, demuestre que la solución general del problema es de la forma:

$$u(r,t) = \frac{1}{r}f(r+ct) + g(r-ct)$$

donde f, g son dos funciones doblemente diferenciables arbitrarias.

3. Resuelva los siguientes problemas de valores a la frontera obteniendo primero la solución general de EDP.

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

  sujeta a:

  $$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2xy$$

  sujeta a:

  $$\begin{aligned} u(0,y) &= y^2 \\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= y \end{aligned}$$

- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

  sujeta a:

  $$\begin{aligned} u(x,y) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0; \quad \text{sobre} \quad x+y=0 \end{aligned}$$

4. Sea $u(x)$ La temperatura estacionaria en una placa acotada por los planos $x=0$ y $x=L$, en esos puntos se mantiene la temperatura constante a $u(0)=0$ y $u(L)=u_0$. Escriba un problema de valores de frontera y resuélvalo para demostrar que:

   $$u(x) = \frac{u_0}{L}x, \quad \mathbf{q} = < -K\frac{b}{u_0}, 0, 0 >$$

   donde $\mathbf{q}$ es el vector flux de calor.

5. Obtenga las ecuaciones de onda, de difusión ($\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) y la ecuación de Laplace ($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$) en coordenadas cilíndricas y esféricas.