

Ecuaciones Diferenciales Parciales
Tarea 2

1. Use la fórmula de recurrencia para polinomios ortogonales y verifique que los siguientes polinomios de Hermite son correctos:

(a)

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

(b)

$$H_3(x) = x^3 - 3x$$

(c)

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3$$

(d)

$$H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x$$

(e) Calcule $H_6(x)$ y $H_7(x)$.

2. Demuestre que:

$$H_{2n+1}(0) = 0$$

y que

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$$

para toda n .

3. Sea:

$$\mathcal{I}_2 = \{f \in \mathcal{PC}(-\infty, \infty)\} \quad (1)$$

con la propiedad de que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx < \infty$$

y denotado como la colección de funciones cuadrado integrables en $(-\infty, \infty)$.

(a) Si f y g pertenecen a $\mathcal{I}_2$ sea:

$$f \cdot g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx \quad (2)$$

Demuestre que (2) define un producto interior en $\mathcal{I}_2$ y que con las definiciones usuales de adición y multiplicación por un escalar $\mathcal{I}_2$ es un espacio euclídeo.

(b) Demuestre que $\mathcal{I}_2$ contiene a todas las funciones:

$$\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)p(x)$$

donde $p(x)$ es un polinomio.

4. Con $\mathcal{I}_2$ definido por (1), sean ahora las funciones de Hermite definidas como:

$$h_n(x) = (-1)^n \left[\frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{x^2}{4}\right) \quad (3)$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

Demuestre que:

(a)

$$h_n(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{4}\right) H_n(x)$$

donde $H_n(x)$ es el polinomio de Hermite de grado n .

(b)

$$h_m \cdot h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ n! \sqrt{2\pi} & \text{si } m = n \end{cases}$$

con respecto al producto interior (2).

De hecho la sucesión $\{h_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ es una base de $\mathcal{I}_2$.

(c) Las funciones de Hermite satisfacen la misma ecuación de recurrencia que los polinomios de Hermite.

(d) Que las funciones de Hermite satisfacen la ecuación diferencial:

$$y'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right) y = 0 \quad (4)$$