Sección III.1.3: Métodos alternativos

En general, un análisis como este se consigue con tres pasos, estos son:

Análisis de Convergencia.

1º Obtener una expresión para el $(k+1)$-ésimo error, digamos η_{k+1}, en términos de los anteriores, es decir, η_k, η_{k-1}, $\ldots$.

2º Usar la expresión para mostrar que $\eta_{k+1} \to 0$ cuando $k \to \infty$. (Tal vez condicionando los errores iniciales.)

3º Mostrar la velocidad o el tipo de convergencia.

El *Método de la Secante* es un método de dos pasos y lo usaremos para ejemplificar el análisis en este caso. El *Método de Newton* es de un paso y fue usado un análisis similar. Como ejercicio, se deja hacer este análisis para el *Método de la pendiente constante.*

Veamos que para encontrar la raíz nula de $f(x)$ (es decir, $x^\star$ tal que $f(x^\star) = 0$), tomamos en el método de la secante dos datos iniciales x_0 y x_1 e iteramos con

$$x_{k+1} \;=\; x_k - \frac{f(x_k)\,(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \qquad \text{para todo } k = 1,\, 2,\, \ldots.$$

Simplificamos la notación definiendo:

$$\varphi(u,\, v) \;:=\; u - \frac{f(u)\,(u - v)}{f(u) - f(v)}$$

y así la iteración es simplemente $x_{k+1} \;=\; \varphi(x_k,\, x_{k-1})$, para todo $k = 1,\, 2,\, \ldots$.

Ejercicio: Muestra que sin importar el valor de u o v, se tiene que $\varphi(u,\, x^\star) = \varphi(x^\star,\, v) = x^\star$, con $x^\star$ la raíz nula de $f(x)$.

Observa que $\varphi(x^\star,\, x^\star)$ no está bien definido. Utilizando los dos casos de este ejercicio es fácil ver que definiendo $\varphi(x^\star,\, x^\star) := x^\star$ obtenemos una función continua.

Del ejercicio anterior salen directamente otras propiedades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\, x^\star) &\;=\; \frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\, x^\star) \;=\; 0, \\ \frac{\partial}{\partial v}\varphi(x^\star,\, v) &\;=\; \frac{\partial^2}{\partial v^2}\varphi(x^\star,\, v) \;=\; 0. \end{aligned}$$

Así, utilizando la *Serie de Taylor* en dos variables tenemos formalmente

$$\varphi(x^\star + p,\, x^\star + q) \;=\; \varphi(x^\star,\, x^\star) + \frac{\partial}{\partial u}\varphi(x^\star,\, x^\star)\, p + \frac{\partial}{\partial v}\varphi(x^\star,\, x^\star)\, q + \mathrm{Residuo}(p,\, q), \qquad (1)$$

donde el $\mathrm{Residuo}(p,\, q)$ es $\mathcal{O}(p+q)^2$. Este argumento puede realizarse de modo completamente riguroso mostrando que existe una función $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\mathrm{Residuo}(p,\, q) \;=\; \frac{pq}{2}\, r(p,\, q),$$

que satisface

$$r(0,\, 0) \;=\; 2\,\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\varphi(x^\star,\, x^\star). \qquad (2)$$

Observamos en la Ec. (1) que las dos parciales son nulas, así al considerar $\varphi(x^\star,\, x^\star) = x^\star$ y al juntar todo esto con la forma del Residuo, tenemos para $p = \eta_k$ y $q = \eta_{k-1}$ que

$$x^\star + \eta_{k+1} \;=\; \varphi(x^\star + \eta_k,\, x^\star + \eta_{k-1}) = x^\star + 0 \cdot \eta_k + 0 \cdot \eta_{k-1} + \frac{\eta_k \eta_{k-1}}{2} r(\eta_k,\, \eta_{k-1}),$$

o mejor aun, una expresión para los errores, es decir:

Primer paso:

$$\eta_{k+1} \;=\; \frac{\eta_k \eta_{k-1}}{2} r(\eta_k,\, \eta_{k-1}).$$

Ahora, de la condición (2), es fácil ver que para cualquier constante $C \in (0,\, 1)$ existe $\delta > 0$ tal que si $|p|,\, |q| < \delta$, entonces $|p\, r(p,\, q)| \leq C < 1$. Así, considerando $|\eta_0|,\, |\eta_1| < \delta$, tenemos

$$|\eta_2| \;=\; \left|\frac{\eta_1}{2}\right| \, |\eta_0\, r(\eta_0,\, \eta_1)| \;\leq\; \frac{C}{2}|\eta_1| \;<\; \frac{\delta}{2}.$$

Que tiene dos implicaciones interesantes, la primera que si dos errores son menores que δ el siguiente también lo es, y por consiguiente, podemos hacerlo de modo iterativo y hemos mostrado el

Segundo paso:

$$|\eta_{k+1}| \;\leq\; \left(\frac{C}{2}\right)^k |\eta_1| \;\xrightarrow{\;k \to \infty\;}\; 0,$$

pues $C/2 < 1$.

La segunda implicación servirá para mostrar el tipo de convergencia. Vamos a entender la razón $|\eta_{k+1}|/|\eta_k \eta_{k-1}|$; que de entrada parece ser superlineal. Para ello, mostraremos que existe $p > 1$ tal que

$$S_k \;:=\; \frac{|\eta_{k+1}|}{|\eta_k|^p} \;\approx\; \left|\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k \eta_{k-1}}\right| \;=:\; |r_k|.$$

(Al definir S_k y r_k.) Primero notemos que se satisfacen las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} |\eta_k| \;&=\; S_{k-1}|\eta_{k-1}|^p \\ |\eta_{k+1}| \;&=\; S_k|\eta_k|^p \;=\; S_k S_{k-1}^p |\eta_{k-1}|^{p^2} \;=\; \cdots\,. \end{aligned}$$

Luego la razón a la que le tomaremos el límite satisface

$$|r_k| \;=\; \left|\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k \eta_{k-1}}\right| \;=\; \frac{S_k S_{k-1}^p |\eta_{k-1}|^{p^2}}{S_{k-1}|\eta_{k-1}|^{p+1}} \;=\; S_k S_{k-1}^{p-1} |\eta_{k-1}|^{p^2-p-1}. \tag{3}$$

Un buen *ansatz*[1] es tomar p tal que

$$p^2 - p - 1 \;=\; 0, \qquad \text{es decir, en} \qquad \varphi \;=\; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\approx\; 1.618034\ldots, \tag{4}$$

la *constante áurea*. Así, la expresión anterior en (3) se reduce a $|r_k| = S_k S_{k-1}^{p-1}$. Definimos $\varrho_k := \log|r_k|$ y $\sigma_k = \log|S_k|$ a modo que nuestro problema se transforma en entender la relación

$$\sigma_k \;=\; \varrho_k - (p-1)\sigma_{k-1}.$$

[1] Esta palabra de origen alemán es comúnmente utilizada por físicos y matemáticos. Un *ansatz* es una solución estimada a una ecuación que describe un problema, es una aproximación educada. Una vez se ha establecido un *ansatz*, la ecuación es resuelta, si es un sabio acierto, luego será legitimada por los resultados obtenidos.

Observa que si existen los límites

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_k \;=\; \varrho^* \qquad \text{y} \;\; \lim_{k\to\infty} \sigma_k \;=\; \sigma^*,$$

entonces nuestra relación es $\sigma^* \;=\; \varrho^* - (p-1)\sigma^*$. Es decir, la secuencia de errores definida por

$$(\sigma_k - \sigma^*) \;=\; (\varrho_k - \varrho^*) - (p-1)(\sigma_{k-1} - \sigma^*) \tag{5}$$

tiende a cero.

Usaremos un resultado muy fuerte de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que garantiza que si tenemos un polinomio con raíces controladas y una secuencia convergente, entonces podemos construir de modo arbitrario secuencias convergentes.

Teorema 1. *Si la raíces nulas de la ecuación*

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \cdots - a_{n-1} x - a_n \;=\; 0$$

están todas en el círculo unitario y una secuencia $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a cero, entonces la secuencia* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *generada iterativamente por*

$$e_k \;:=\; E_k + a_1 e_{k-1} - a_2 e_{k-2} - \cdots - a_{n-1} e_1 - a_n e_0$$

converge a cero, sin importar los valores iniciales $e_0,\, e_1,\, \ldots,\, e_{n-1}$ *que se elijan.*

Estamos justamente en este caso para $n = 1$: la relación (5) se puede ver como

$$e_k = E_k - (p-1)e_{k-1}$$

para $E_k := \varrho_k - \varrho^*$, $e_k := \sigma_{k-1} - \sigma^*$ y la raíz de $x + (p-1) = 0$, que es justamente $p - 1$. Observa del **Primer paso** que r_k converge a $r(0,\,0)/2$ y por lo tanto ϱ^* existe, de donde vemos que $E_k \to 0$. Recordamos que p satisface (4), es decir, satisface la hipótesis pues $\varphi - 1 = 0.618034\ldots$ pertenece al intervalo unitario. Por lo tanto, podemos garantizar que e_k converge a cero y σ^* existe. Vemos así que $S_k \to e^{\sigma^*}$, es decir, hay convergencia a dos puntos y tenemos el

Tercer paso:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\eta_{k+1}|}{|\eta_k|^{\varphi}} \;=\; \exp(\sigma^*), \qquad \text{con} \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Esta convergencia es superlineal.