Sección III: Interludio, clasificación de ecuaciones de segundo orden

Antes de ir más lejos, retomaremos algunos conceptos de las ecuaciones algebraicas y una notación cómoda para su desarrollo matricial. Una ecuación algebraica de segundo orden en dos variables se puede escribir como

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \;=\; 0.$$

El uso del "2" es para simplificar la forma en la cual podemos escribir esta ecuación con uso de matrices:

$$(x,\, y,\, 1) \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \;=\; 0.$$

Bajo la misma filosofía, tomamos las *ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden lineales*

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + 2Du_x + 2Eu_y + Fu \;=\; G, \tag{1}$$

donde realmente tenemos $A = A(x,\, y)$, $B = B(x,\, y)$, $\ldots$, $G = G(x,\, y)$ para todo el conjunto de ecuaciones lineales. En general nos concetraremos en aquellas que tienen los coeficientes constantes por la sencillez de los desarrollos más adelante. Recalcamos también que cuando $G \equiv 0$ la ecuación (1) es *homogénea.*

Como definición, podemos clasificar las EDP en (1) en el sentido de las curvas cónicas que aparecen en la ecuación algebraica como

Hiperbólica	si	$B^2 - AC \;>\; 0,$
Parabólica	si	$B^2 - AC \;=\; 0,$
Elíptica	si	$B^2 - AC \;<\; 0.$

Al término $\delta := B^2 - AC$ le llamamos el **discriminante** de la EDP en analogía a las raíces de las ecuaciones de segunda orden.

Notamos que los valores de los coeficientes fuera de A, B y C no alteran esta calsificación. Cuando $D = E = F = G = 0$ se satisface, se dice que la Ec. (1) es la *Ecuación de Euler*:

$$A\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 0,$$

que determina el tipo de "cónica" de la EDP. Luego, es útil reescribir (1) como

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} \;=\; H(x,\, y,\, u,\, u_x,\, u_y),$$

donde el funcional H puede ser nolineal, dando origen a ecuaciones cuasilineales y semilineales.

En algunas ocasiones hemos realizado cambios de variables que simplifican el tipo de ecuación con la que estamos tratando, es por ello indispensable tener una manera de saber si el tipo de ecuación se modifica bajo estos cambios de variables y como. Para ello tenemos el siguiente resultado.

Lema 1. *El tipo de EDP lineal de 2º orden en dos variables es invariante bajo cambios de coordenadas. Es decir, el tipo de ecuación es una propiedad intrínseca e independiente del sistema de coordenadas elegido.*

Antes de mostrar la validad de este lema, será necesario introducir algunos conceptos y manejarlos correctamente. Uno de ellos es claro, pero no lo hemos desarrollado todavía, este es el *cambio de variables.*

Sin ir más lejos, veamos que la solución de una ecuación del tipo $u_{xy} = 0$ es muy simple, pues al integrar dos veces obtenemos

$$u_{xy} \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u_x \;=\; \tilde{f}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad u \;=\; f(x) + g(y).$$

Con lo cual la solución al problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} u_{xy} &= \; 0, & x,\, y > 0 \\ u(x,\, 0) &= \; h_1(x), & x \geq 0 \\ u(0,\, y) &= \; h_2(y), & y \geq 0 \end{cases}$$

es simplemente $u(x,\, y) = h_1(x) + h_2(y)$. Este desarrollo es el que da camino a la fórmula de D'Alembert para la ecuación de la onda.

Veamos que con cambios de variable realmente podemos llevar una ecuación de Euler homogénea a una ecuación de esta forma; es decir, corroboremos parte del Lema 1. Consideremos entonces $Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy} = 0$ con $B^2-AC > 0$.