Sección 5: Sobre la existencia y la unicidad de soluciones

Hasta ahora hemos hecho un acto de fé al construir diversas soluciones de EDO y considerar que al mostrar esta “existencia” la unicidad de algún modo había sido garantizada.

El Teorema 2 muestra de modo muy general dónde ésto es realmente así. De todos modos mostraremos una versión más sencilla, el Teorema 3, que es un caso particular al que podemos llevar toda ecuación que satisfaga el teorema anterior.

Entre los diversos teoremas de existencia y unicidad de EDO es importante resaltar que pueden haber versiones más adecuadas para un tipo de ecuación, de este modo no son tan generales como el Teorema 2, pero podemos ajustar mejor los resultados. Este es el caso de la próxima afirmación.

Teorema 1. *Si $p,\, q \in \mathcal{C}(\alpha,\, \beta)$, con $x_o \in I := (\alpha,\, \beta)$, entonces existe una única función $y = \phi(x)$ que satisface la EDO:*

$$y' + p(x)\, y \;=\; q(x),$$

para cada $x \in I$ y que satisface la condición inicial $y(x_o) = y_o$.

Queda implícito que si p o q son discontinuas en α o β, entonces “la solución” puede fallar ahí. Pero, ¿cómo sucedería esto? No seremos específicos, pero la solución puede ser discontinua, tener ramificaciones (pérdida de unicidad) o dejar simplemente de existir.

Recordamos la construcción:

$$y' + p(x)\, y \;=\; q(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) \;=\; \frac{1}{\mu(x)}\left(\int_{x_o}^{x} \mu(s) q(s)\, ds \;+\; y_o \right),$$

donde $\mu(x) = \exp(\int_{x_o}^{x} p(s)\, ds)$, que prácticamente muestra la unicidad, sin embargo la existencia es clara desde que podamos seguir estos pasos. Está bien, dejémoslo por aquí. El Teorema 1 es particular para ecuaciones lineales, vamos con las no lineales.

Teorema 2. *Sean f, $\partial f/\partial y$ continuas en un rectángulo R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Si el punto $(x_o,\, y_o)$ está en R, entonces en un itervalo $x_o - h < x < x_o + h$ contenido en $I := (\alpha,\, \beta)$ hay una única solución $y = \phi(x)$ del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \quad y' &= \; f(x,\, y) \\ y(x_o) &= \; y_o \end{cases} .$$

¿Está incluido el Teorema 1 en el Teorema 2? Después de reflexionarlo un poco, vemos que sí: tome $f(x,\, y) := -p(x)y + q(x)$ que es continua en I y vemos que $\partial f/\partial y = -p(x)$ también es continua en I. Pero ahora sólo garantizamos los resultados en $x_o - h < x < x_o + h$ y no en todo I, ¿qué sucede? Sólo tienes que pensarlo un poco.

El Teorema 2 habla de condiciones *suficientes* pero no de condiciones *necesarias*, es decir, en algunos casos hipótesis más débiles nos retornan el mismo resultado sobre existencia y unicidad. De hecho, si pedidos solamente que $f(x,\, y)$ sea continua, entonces se puede garantizar la existencia, pero no la unicidad.[1] El caso clásico de esta afirmación es el problema de valor inicial siguiente

$$\begin{cases} \quad y' &= \; y^{1/3} \\ y(0) &= \; 0 \end{cases} , \tag{1}$$

[1] Un resultado más robusto es dado cuando en el Teorema 2 se pide que la función $f(x,\, y)$ sea Lipschitz en la segunda variable en lugar de la continuidad de su derivada; las conclusiones permanecen iguales.

donde $f(x,\, y) = y^{1/3}$ es continua, pero su derivada no está definida en cero. Veamos, por otro lado, que además de la solución trivial tiene para todo $\xi > 0$ fijo, la solución:

$$y(x) \,=\, \chi(x;\, \xi) \,=\, \begin{cases} 0, & x \in [0,\, \xi] \\ \pm\big[\frac{2}{3}(x-\xi)\big]^{3/2}, & x > \xi \end{cases} . \tag{2}$$

Ejercicio 1. *Muestra que para cualquier* ξ*, la solución* (2) *resuleve el PVI* (1)*.*

Para demostrar el Teorema 2 haremos un cambio de variables al mandar la condición inicial $(x_o,\, y_o)$ al origen con una traslación, así bastará considerar el sigueinte resultado.

Teorema 3. *Sean* f, $\partial f/\partial y$ *continuas en un rectángulo* R: $|x| \le a$, $|y| \le b$, *entonces en un intervalo* $|x| < h \le a$ *existe una única solución* $y = \phi(x)$ *del problema de valor inicial*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & f(x,\, y) \\ y(0) & = & 0 \end{array} \right. . \tag{3}$$

Primero notemos que si existe la solución $y = \phi(x)$, entonces ésta debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria, así

$$\phi'(x) \,=\, f\big(x,\, \phi(x)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \phi(x) \,=\, \int_0^x f\big(s,\, \phi(s)\big)\, ds, \tag{4}$$

al integrar y recordar la condición inicial $\phi(0) = 0$. De esta forma, hemos transformado el PVI en una **Ecuación Integral**. Nota que ambos problemas son equivalentes, pero ahora será de gran utilidad esta segunda expresión.

Para demostrar el Teorema 3 usaremos la ecuación integral y las Aproximaciones sucesivas, también conocidas por el Método de iteraciones de Picard. Este método es útil por varias razones, de hecho aunque alguien pueda argumentar que es "ineficiente", podría ser considerado un método constructivo a ser utilizado con las computadoras modernas. Por otro lado, es un ejemplo (tal vez el primero al que tengas alcance) de la teoría del punto fijo y de sus aplicaciones dentro de las matemáticas.

Para usar el método, trabajaremos de modo semejante a la inducción matemática, usando los tres pasos habituales:

1.- Comenzamos con una primera aproximación ϕ_0 de la solución. Esta aproximación puede ser muy burda, digamos $\phi_0(x) \equiv 0$.

2.- Dado que ϕ_0 satisface la condición inicial (3.b), podemos suponer que al substituir esta aproximación en la ecuación integral, ésta nos dará una mejor aproximación, es decir, tomamos

$$\phi_1(x) \,:=\, \int_0^x f\big(s,\, \phi_0(s)\big)\, ds.$$

3.- De modo análogo continuamos para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, definimos

$$\phi_{n+1}(x) \,:=\, \int_0^x f\big(s,\, \phi_n(s)\big)\, ds, \tag{5}$$

que esperamos aproxime cada vez mejor la solución del problema de valor inicial.

¿Por qué podemos esperar esto? Sencillamente notamos que $\phi_n(0) = 0$ se satisface sin importar el valor de n y para $n \ge 1$ de hecho $\phi_n'(0) = f(0,\, 0)$ satisface la primera derivada en la condición inicial, pues de (5) vemos que $\phi_{n+1}'(x) \,=\, f\big(x,\, \phi_n(x)\big)$, así poco a poco $\phi_{n+1}'(\epsilon) = f(\epsilon,\, \phi_n(\epsilon))$ debe tener las inclinaciones mejor aproximadas para ϵ cada vez mayor. También podemos pensar que para $m \in \mathbb{N}$ la derivada $d^m\phi_n(0)/dx^m$ con $n \ge m$ debe ser próxima de la derivada de la solución. De hecho, a veces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq k$ se tiene que $\phi_{n+1}(x) = \phi_n(x)$, es decir, se llega a la solución en un número finito de pasos. Explica porqué ésta igualdad garantiza que $\phi_n(x)$ sea ya una solución.

Haremos uso del siguiente resultado que es central en la definición del dominio de la solución que buscamos.

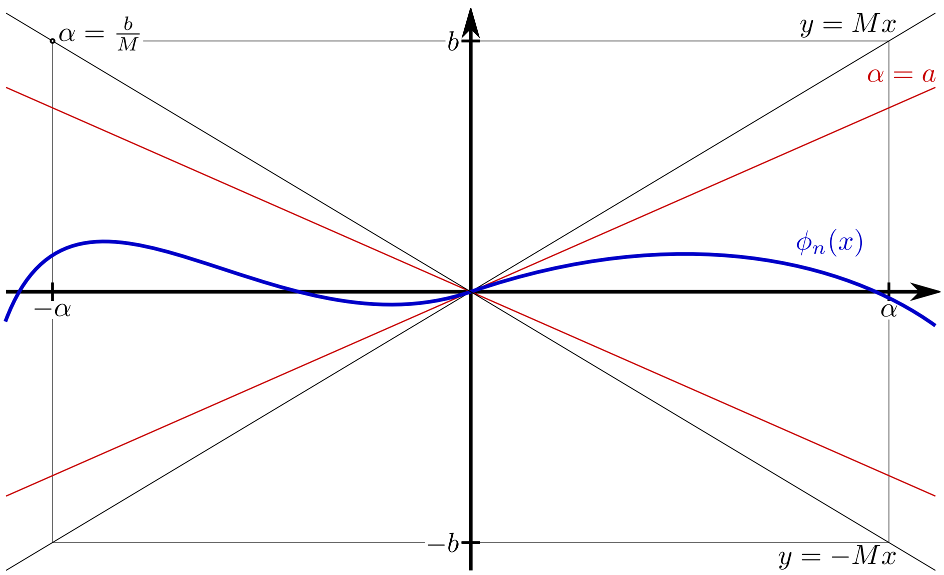
Lema 1. *Para a, b dados como en el Terema 3, calcule*

$$M \;:=\; \max_{(x,\,y)\in R} \big|f(x,\,y)\big| \qquad y \qquad \alpha \;:=\; \min\left(a,\,\frac{b}{M}\right).$$

Entonces $|\phi_n(x) - 0| \leq M(x-0)$ para todo $|x| \leq \alpha$ y $n \in \mathbb{N}$.

Se han dejado los "-0" en el Lema, pues estos pueden representar $-y_o$ y $-x_o$ respectivamente en el Teorema 2 antes de la traslación.

Prueba. Gráficamente esperamos que $\phi_n(x)$ esté limitada. Ahora podemos ver por inducción



que $\phi_0(x) \equiv 0$ satisface esta suposición de forma trivial, así si lo suponemos válido para $\phi_n(x)$, es decir, $|\phi_n(x)| \leq Mx$, $\forall |x| \leq \alpha$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|\phi_{n+1}(x)| \;=\; \left|\int_0^x f\big(s,\,\phi_n(s)\big)\,ds\right| \;\leq\; \int_0^x \Big|f\big(s,\,\phi_n(s)\big)\Big|\,ds \;\leq\; \int_0^x M\,ds \;=\; Mx,$$

con lo que hemos demostrado el Lema. $\square$

Ahora vamos a mostrar que $\phi_n(x)$ es convergente. Primero notemos que la suma telescópica

$$\phi_n(x) \;=\; \phi_0(x) + \big(\phi_1(x) - \phi_0(x)\big) + \cdots + \big(\phi_n(x) - \phi_{n-1}(x)\big)$$

es convergente si, y sólo si, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \big(\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)\big)$ lo es. Mostraremos que de hecho es absolutamente convergente.

Notemos

$$\begin{aligned} \left|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\right| &= \left| \int_0^x f\big(s,\, \phi_n(s)\big) - f\big(s,\, \phi_{n-1}(s)\big)\, ds \right| \\ &\le \int_0^x \left| f\big(s,\, \phi_n(s)\big) - f\big(s,\, \phi_{n-1}(s)\big)\right| ds \\ &\le \int_0^x \left| \frac{\partial f\big(s,\, \xi(s)\big)}{\partial y} \right| \left|\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)\right| ds \end{aligned}$$

Notemos que la última desigualdad es válida pues hemos pedido por hipótesis que $\partial f(x,\, y)/\partial y$ sea continua en R. Además, debemos de notar que $\xi(s)$ pertenece al intervalo con extremos $\phi_n(s)$ y $\phi_{n-1}(s)$ para cada $s \in [0,\, x]$.

Por lo tanto, definiendo

$$L \,:=\, \max_{(x,\, y)\in R} \left| \frac{\partial f\big(x,\, y\big)}{\partial y} \right|,$$

tenemos que

$$\left|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\right| \,\le\, L \int_0^x \left|\phi_n(s) - \phi_{n-1}(s)\right| ds.$$

Vemos por ejemplo

$$\begin{aligned} \left|\phi_2(x) - \phi_1(x)\right| &\le L \int_0^x \left|\phi_1(s) - \phi_0(s)\right| ds \,=\, L \int_0^x \left|\phi_1(s)\right| ds \\ &\le LM \int_0^x |s|\, ds \,=\, LM\frac{x^2}{2}, \end{aligned}$$

y si continuamos

$$\begin{aligned} \left|\phi_3(x) - \phi_2(x)\right| &\le L \int_0^x \left|\phi_2(s) - \phi_1(s)\right| ds \\ &\le L(LM) \int_0^x \frac{s^2}{2}\, ds \,=\, L^2 M \frac{x^3}{3!}. \end{aligned}$$

Es decir, en general tenemos que se satisface

$$\left|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\right| \,\le\, L^n M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

para todo $|x| \le \alpha$.

Finalmente, tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\right| \,\le\, M \sum_{k=0}^{\infty} L^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \,\le\, \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha L)^k}{k!} \,=\, \frac{M}{L}\Big(e^{\alpha L} - 1\Big),$$

lo cual claramente es convergente. Definimos entonces la solución

$$\phi(x) \,:=\, \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \,=\, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi_{k+1}(x) - \phi_k(x).$$

A saber, dado que $\phi_{n+1}(x)$ satisface (5), tomando el límite a ambos lados tenemos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^x f\big(s,\, \phi_n(s)\big)\, ds \\ &= \int_0^x \lim_{n\to\infty} f\big(s,\, \phi_n(s)\big)\, ds \qquad (6) \\ &= \int_0^x f\Big(s,\, \lim_{n\to\infty} \phi_n(s)\Big)\, ds \qquad (7) \\ &= \int_0^x f\big(s,\, \phi(s)\big)\, ds, \end{aligned}$$

es decir, $\phi(t)$ satisface la ecuación integral (4) y por lo tanto es la solución del problema de valor inicial (3). Notamos que las igualdades (6) y (7) provienen de la continuidad de $f(x,\, y)$ y $\partial f(x,\, y)/\partial y$ respectivamente.

Sin embargo, la unicidad todavía no está demostrada de forma explícita. Para hacerlo, supongamos que existen dos soluciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ distintas. Defina para x en el itervalo cerrado $[0,\, (2L)^{-1}]$ el valor

$$D \;:=\; \max_{x\,\in\,[0,\,(2L)^{-1}]} \big|\phi(x) - \psi(x)\big|.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \big|\phi(x) - \psi(x)\big| &= \left| \int_0^x f\big(s,\, \phi(s)\big) - f\big(s,\, \psi(s)\big)\, ds \right| \\ &\leq \int_0^x \Big| f\big(s,\, \phi(s)\big) - f\big(s,\, \psi(s)\big) \Big|\, ds \\ &\leq L \int_0^x \big|\phi(s) - \psi(s)\big|\, ds, \end{aligned}$$

que es válido para toda $|x| \leq \alpha$. Tomemos $\tilde{\alpha} := \min\{\alpha,\, (2L)^{-1}\}$, luego para $|x| \leq \tilde{\alpha}$ tenemos

$$\begin{aligned} \big|\phi(x) - \psi(x)\big| &\leq L \int_0^x \big|\phi(s) - \psi(s)\big|\, ds \;\leq\; L \int_0^{\tilde{\alpha}} \big|\phi(s) - \psi(s)\big|\, ds \\ &\leq LD \int_0^{\tilde{\alpha}} ds \;\leq\; LD \int_0^{(2L)^{-1}} ds \;=\; \frac{D}{2}. \end{aligned}$$

Tomando ahora el máximo de la diferencia al lado izquierdo de esta desigualdad llegamos por la definición de D a que $D \leq D/2$, lo cual sólo es posible si $D = 0$. Es decir, tenemos que $\phi(x) \equiv \psi(x)$ para todo $|x| \leq \tilde{\alpha}$, con lo cual terminamos con la demostración del teorema. $\square$

Vimos en la prueba que los sumandos $\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)$ de la serie aportan cada vez menos a la solución. Esta es una buena razón para intentar usar el método en la búsqueda de soluciones...

Ejemplo. Resuelva el PVI $y' = y$, $y(0) = 1$.

Se toma $\phi_0(x) = 1$, luego

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= 1 + \int_0^x ds = 1 + x, \\
\phi_2(x) &= 1 + \int_0^x 1 + s\, ds = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\
\phi_3(x) &= 1 + \int_0^x 1 + s + \frac{s^2}{2}\, ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}, \\
&\vdots \\
\phi_n(x) &= 1 + \int_0^x 1 + s + \frac{s^2}{2} + \cdots + \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!},
\end{aligned}$$

con lo cual es claro que

$$\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x,$$

que es la solución al PVI.

... sin embargo, este es un ejemplo especial. Esta idea sólo puede ser aprovechada en general desde el punto de vista numérico. Normalmente tenemos:

1.- Es difícil encontrar cuál es la función que se está representando vía la serie. (Si es que hay alguna función que la satisface.)

2.- A veces encontrar cada una de las iteraciones no representa una labor sencilla desde el punto de vista analítico ni computacional.

Ejemplos donde es "complicado" encontrar la serie y por lo tanto la función que aproximan, pueden ser dados, en casos sencillos por los PVI

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& 1 + y^n \\ y(1) &=& 1 \end{array} \right. , \qquad \text{con} \qquad n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\, 1\}.$$

Un caso "imposible" es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& \cos(x^2 - y) \\ y(0) &=& 0 \end{array} \right. .$$

Con lo cual reiteramos que la importancia de la demostración es ser un primer ejemplo de la Teoría de Punto Fijo y dar un posible camino numérico distinto al tradicional para resolver problemas difíciles.