

Generalización del Teorema Fundamental del Cálculo

La idea de esta nota es mostrar un resultado muy útil en Ecuaciones Diferenciales Parciales que tiene sus inicios en el Cálculo diferencial e integral. La prueba es sencilla y no necesita grandes tecnicismos sino solamente un poco de atención, el resultado dice así:

Teorema. Sea $f(x, t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tal que $f_x(x, t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$; o en un subdominio $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ conteniendo $t \in [a(x), b(x)]$, $x \in [x_0, x_1]$. Suponga que $a(x), b(x) \in \mathcal{C}^1[x_0, x_1]$. Entonces, para $x \in (x_0, x_1)$ se satisface

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt.$$

(Observa que la diferencia entre la derivada total y la parcial.)

Prueba. Recordemos algunas aplicaciones del Teorema Fundamental del Cálculo usual. Por ejemplo, pensando en la primitiva $F(x, t)$ de $f(x, t)$ en el tiempo se ve fácilmente que las siguientes afirmaciones son válidas

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x, t) dt = f(x, b), \quad \frac{d}{da} \int_a^b f(x, t) dt = -f(x, a),$$

cuando a, b son arbitrarios y si estos fueran fijos, entonces

$$\frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt$$

dada la suavidad de la función.

Ahora, para las hipótesis del teorema, definimos la integral en el tiempo

$$\varphi(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t) dt,$$

así queremos calcular la derivada espacial, es decir,

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x},$$

donde $\Delta x, \Delta \varphi$ son incrementos. De modo análogo, tomamos $\Delta a := a(x + \Delta x) - a(x)$ y $\Delta b := b(x + \Delta x) - b(x)$, y usándolos tenemos

$$\begin{aligned} \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) &= \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x + \Delta x, t) dt - \int_a^b f(x, t) dt \\ &= \left\{ \int_{a+\Delta a}^a + \int_a^b + \int_b^{b+\Delta b} \right\} f(x + \Delta x, t) dt - \int_a^b f(x, t) dt, \end{aligned}$$

que reordenamos del siguiente modo

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \int_{a+\Delta a}^a f(x + \Delta x, t) dt + \int_a^b [f(x + \Delta x, t) - f(x, t)] dt + \int_b^{b+\Delta b} f(x + \Delta x, t) dt \\ &= -\Delta a \cdot f(x + \Delta x, \tau_1) + \int_a^b [f(x + \Delta x, t) - f(x, t)] dt + \Delta b \cdot f(x + \Delta x, \tau_2), \quad (1) \end{aligned}$$

donde por el Teorema de Rolle tenemos que existen τ_1, τ_2 con la propiedad arriba.

Finalmente, tenemos que cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se satisface

$$\frac{\Delta a}{\Delta x} \rightarrow \frac{da}{dx}, \quad \frac{\Delta b}{\Delta x} \rightarrow \frac{db}{dx}, \quad \text{y} \quad \frac{f(x + \Delta x, t) - f(x, t)}{\Delta x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x, t).$$

Por lo tanto, usando la igualdad en (1), tenemos queremos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} = -f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt + f(x, b(x)) \cdot b'(x)$$

pues $(a, a + \Delta a) \ni \tau_1 \rightarrow a$ y $(b, b + \Delta b) \ni \tau_2 \rightarrow b$, luego, el teorema está probado. $\square$