Velarias y cáusticas

Pablo Castañeda
Profesor visitante del CAME

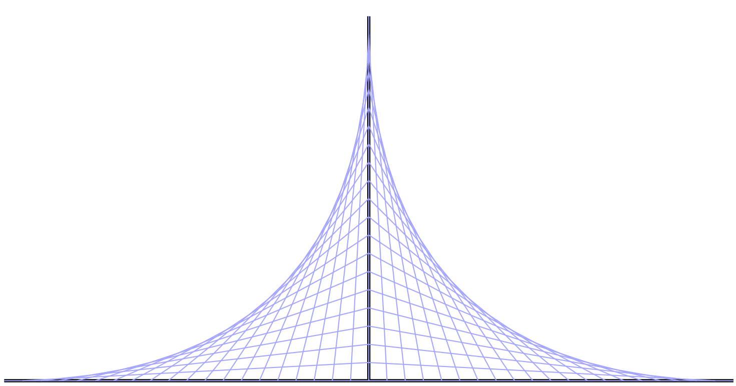
El ciclo escolar Otoño 2023 despertó con una gran noticia, la apertura de un nuevo espacio en el ITAM, el *Centro de Aprendizaje en Matemáticas y Estadística*. También tuvimos la grata noticia de saber que el gran Vlad se incorporaba al cuerpo docente de tiempo completo del Departamento Académico de Matemáticas para dirigir y darle vida al CAME.

Claro que todo comenzó rápidamente, empezaron las reuniones para resolver dudas de las nuevas *lecciones de matemáticas*, pero también comenzó el centro a burbujear con encuentros entre profesores, las dinámicas de profesores y estudiantes, las sesiones de apoyo, etc. Además, Carlos Bosch tuvo la iniciativa de crear un foro para que estudiantes de primeros semestres tuvieran oportunidades de ver aplicaciones, "cazuelazos" y teoría matemática dedicada a su nivel y así pudieran aprender más. Este tiempo se llamó **Tómate un café en el CAME**. Tuve el honor de beberme el segundo cafecito con «La velaria y sus líneas» entre estudiantes entusiastas. Aquí quiero contarte los pequeños descubrimientos que hicimos y agradecerles a Vlad y a Carlos por la invitación y la confianza.

1. Los primeros pasos, recuerdos de la primaria

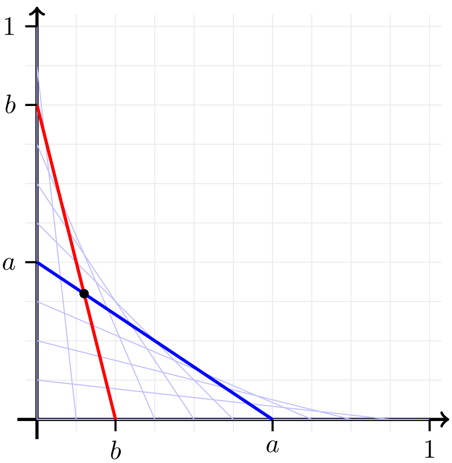
> La clave para aprender algo nuevo
> es estar dispuesto a ser un eterno estudiante,
> sin importar cuánto hayas dominado.
>
> «Dragon Ball», MUTEN RŌSHI.

El *sensei* Kame Sen'nin más conocido como el maestro Rōshi es el gran artífice de la famosa *Kame Hame Ha* que Gokū y sus compañeros aprenden a lanzar en las series de «Las esferas del Dragón». Resulta que este centro, en la CAME-*ha* (ahora del maya k'iche', "casa del"), es el sitio ideal para aprender algo nuevo, lo cual puede venir de un pasado remoto.



Parece que los días en los que jugábamos con el lápiz haciendo dibujos geométricos como el anterior, o que hacíamos "monitos de palitos" que corrían por las esquinas inferiores de nuestros libros y cuadernos, dotados de movimiento al pasar rápidamente las hojas, han quedado muy atrás. Tal vez no tanto, pues espero que sigamos un poco con la misma actitud, pero viendo nuestro mundo con nuevos ojos.

Una gran satisfacción en el dibujo anterior era ver cómo una curva emergía como la *envolvente* de las rectas que trazábamos. En mi caso, me gustaba tomar una hoja cuadriculada y tomar diez cuadritos hacia arriba y diez hacia la derecha. Así, juntaba el punto $(1, 0)$ con el $(0, 9)$, el $(2, 0)$ con el $(0, 8)$ y seguíamos hasta completar el dibujo. Empero, es mejor pensar que en general se junta el punto $(a, 0)$ con el punto $(0, 1-a)$ con longitudes unitarias en la imagen.



Así, tomando como referencia el dibujo al lado, vemos que la ecuación de la recta azul es

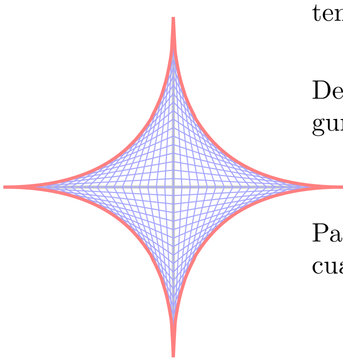
$$(1-a)x + ay - a(1-a) = 0.$$

Tomamos una ecuación semejante para la recta roja que pasa por los puntos $(b, 0)$ y $(0, 1-b)$. Para ver su intersección, notamos que estas ecuaciones nos dan un sistema lineal dos por dos. Multiplicando la ecuación de la recta azul por b y restándole a veces la roja, tenemos:

$$\begin{cases} (1-a)bx + aby - ab(1-a) = 0 \\ (1-b)ax + aby - ab(1-b) = 0 \end{cases} \implies (b-a)x - (b-a)ab = 0.$$

Con lo cual vemos que la intersección se da en $x = ab$ y, substituyendo, para $y = (1-a)(1-b)$.

Si movemos b hacia a, por lo tanto $1-b$ hacia $1-a$, vemos que el punto de intersección se aproxima al lugar de la curva imaginaria que creábamos. ¿Dónde ocurre esto? Pues si a es igual a b, tenemos



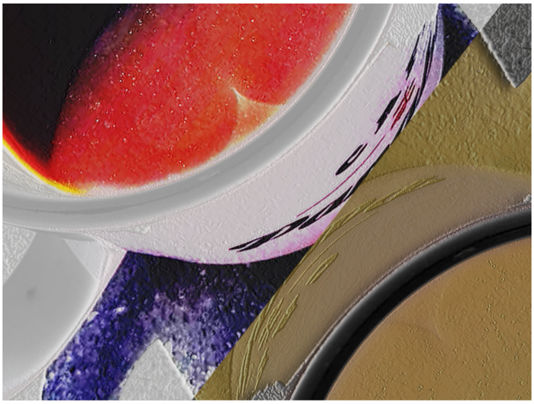
$$x = a^2 \qquad \text{y} \qquad y = (1-a)^2.$$

Despejando a de la primera ecuación y substituyéndola en la segunda ecuación, tenemos una curva:

$$y = (1-\sqrt{x})^2, \qquad \text{para} \qquad x \in [0, 1].$$

Para completar el gráfico de la estrella, podemos manipular las cuatro expresiones análogas y llevarlas a la forma:

$$\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1, \qquad \text{para} \qquad x, y \in [-1, 1].$$



Hemos construido una bella curva a partir de las líneas, éstas pueden hacer mucho más. Cuando observas la superficie de este cafecito que nos tomamos en **la** CAME-*ha*, por ejemplo, podrás ver en ocasiones cómo la luz se enfoca generando también una curva con un pico luminoso, un poco como muestra la imagen al lado. Una explicación de esto, puedes encontrarla en la Sec. 3.5 de [2]. Es el concepto de las *cáusticas* que, por cierto, también explican los brillos en los fondos de las albercas. Para ello deberíamos viajar al espacio tridimensional. Lo haremos con otro enfoque.

2. La arquitectura en la punta del lápiz

Podemos estudiar las rectas en tres dimensiones y ver de algún modo cómo dos de ellas pueden intersectarse. La idea es formar una *superficie reglada*. Pensemos en un ejemplo sencillo, veamos un cuadrado desde arriba, las alturas (que van en nuestra dirección) de dos esquinas opuestas tienen el valor uno, mientras que las otras dos se alejan y tienen valor menos uno. Podemos representar estos puntos en el espacio por

$$NE = (1, 1, 1), \quad NO = (1, -1, -1), \quad SE = (-1, 1, 1), \quad \text{y} \quad SO = (-1, -1, -1),$$

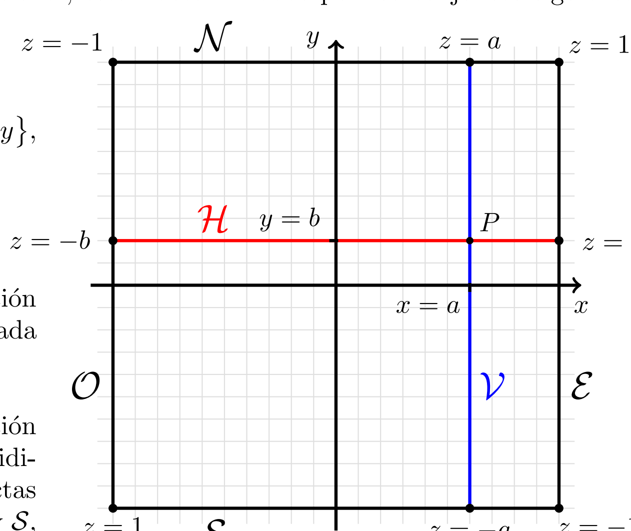
donde por fijaciones, he nombrado los puntos según su posición cardinal desde el origen. De hecho, las rectas que las unen las llamaré $\mathcal{N}$orte, $\mathcal{S}$ur, $\mathcal{E}$ste y $\mathcal{O}$este, que por conveniencia son aquellas que tienen el valor fijo de $y = 1$, $y = -1$, $x = 1$ o $x = -1$ respectivamente. Estas rectas, en el espacio tridimensional, están determinadas por los conjuntos siguientes:

$$\mathcal{N} : \{y = 1,\ z = x\},$$

$$\mathcal{E} : \{x = 1,\ z = y\},$$

$$\mathcal{O} : \{x = -1,\ z = -y\},$$

$$\mathcal{S} : \{y = -1,\ z = -x\}.$$



Mira el gráfico al lado, con la proyección en el plano XY y la altura z colocada de manera explícita.

También queremos que cada proyección ya sea horizontal o vertical toque (tridimesionalmente) los puntos de las rectas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{O}$ o los puntos de las rectas $\mathcal{N}$ y $\mathcal{S}$, respectivamente. Por ejemplo, en el gráfico, hemos identificado dos proyecciones: una $\mathcal{H}$orizontal y otra $\mathcal{V}$ertical. Están descritas en el espacio tridimensional por las ecuaciones

$$\mathcal{V}\ :\ \{x\ =\ a,\, z = ay\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}\ :\ \{y\ =\ b,\, z = bx\}.$$

Observa que para $\mathcal{V}$, por ejemplo, el conjunto en el plano XY es formado por los puntos que tienen coordenada $x = a$, pero la coordenada y es libre. Como estamos hablando de rectas y vemos que la altura debe ser a en $y = 1$ (pues este punto está en $\mathcal{N}$ también), es por ello que tomamos la condición $z = ay$. A saber, de este modo, todos sus puntos son de la forma (x, y, ay), para $y \in \mathbb{R}$.

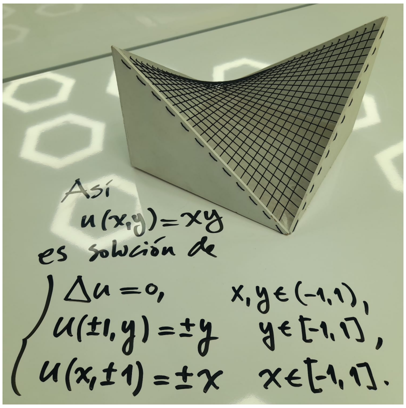
Vemos entonces, que en la proyección, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$ se intersectan en el punto $P = (a,\, b)$, ¿será que se intersectan en el espacio tridimensional también? Observa a tu alrededor, verás que lo más común en el espacio es que dos rectas no se toquen nunca, ¡¡ni si quiera en el infinito!!

Sin embargo, en este caso, tenemos que el punto en $\mathcal{V}$ satisface ser $(a,\, b,\, ab)$ pues z es ay y por el otro lado, en $\mathcal{H}$ satisface ser $(a,\, b,\, ab)$ pues z es xb. ¡Es el mismo punto! Esto todavía es mejor, tenemos una relación que se cumple siempre. Observa que no importa el nombre de las coordenadas x o y, pues la altura z es el producto de éstas, formando así una superficie que es creada por un número infinito de intersecciones de rectas.

A esta estructura geométrica,

$$z = xy,$$

se le conoce como *paraboloide hiperbólico* (Geometría Analítica), es una *función armónica* (Variable Compleja), también es la «silla de montar», que es una representación excelente del comportamiento de un *equilibrio del tipo silla* (Sistemas Dinámicos). Es de suma importancia que sea una solución del *operador laplaciano* (EDP, por Ecuaciones Diferenciales Parciales), lo cual explica entre otras cosas, el modo en el que se tensan membranas, lonas y estructuras como las que ves en la foto. Estas son *tenso estructuras* o *velarias* como éstas que tenemos aquí en el ITAM.



Podríamos seguir, pues este pequeño ejercicio es la base de cómo resolver la *ecuación de Laplace* de las EDP en el Cálculo Numérico. Así, como ves, cada área de estudio trae con ella más propiedades de estas curvas. Por ejemplo, haciendo la conexión con la física, se sabe que las velarias toman esa forma como consecuencia de un principio de mínima energía. Además, podemos mostrar teoremas como que cualquiera de sus alturas es el promedio de las alturas vecinas. Pero, ¿cuáles? Las que quieras, siempre y cuando la rodeen de modo continuo, ya sea incluyéndola con la proyección de un área o no, como un lazo. Todos estos avances ayudan a crear diccionarios entre distintas áreas y avanzar en el conocimiento colectivo. Recuerda que la invitación es extensiva para quien quiera colaborar, ¿qué tal tú con todo aquello que aprenderás en el ITAM?

Te recomiendo ir al Parque de las velarias, para que en este caso, veas secciones del *hiperboloide de un manto*. Intenta buscar líneas rectas en sus tenso estructuras, pues también son soluciones del laplaciano.

Agradecimientos. El paraboloide hiperbólico que ves en la fotografía se lo debemos a Francisco Fernando Martínez Cillero quien, cuando tomaba cálculo con Claudia Gómez Wulschner, hizo este trabajo. Ahora está conmigo y le agradezco a ambos este ejemplar que he llevado muchísimas veces a la sala de aula. Quiero agradecer también al equipo de **Café Parabién** por la fotografía de la cáustica (p. 37) y además por el cariño con el que apoyan una de las máximas que el gran Pál Erdős seguía, pues se cuenta que su amigo Alfréd Rényi solía decir

«*Los matemáticos somos dispositivos*
que transforman café en teoremas».

Referencias

[1] Anónimo (1979) *Popol Vuh. Las antiguas historias del Quiché.* Traducción e introducción del texto original por Adrián Recinos. Fondo de Cultura Económica, México.

[2] Pablo Castañeda (2004) *Teoremas de singularidades en relatividad general*, Tesis – UNAM, México. (Disponible en `https://gente.itam.mx/pablo.castaneda/`.)

[3] Roberto Romero Sandoval (2013) *Zotz. El murciélago en la curtura maya*, Centro de Estudios Mayas **39**. Instituto de Investigaciones Filiológicas – UNAM, México.