# Apéndice A: El principio de Duhamel

En esta pequeña nota mostraremos de modo general cómo es que funciona el método conocido como el *Principio de Duhamel* para ecuaciones de evolución. La notación tal vez pueda resultar un poco complicada en una primera instancia, por lo que recomendamos pensar siempre en la ecuación del calor en el primer desarrollo y el ejemplo de la ecuación de la onda en el segundo. (Para el primero también se puede considerar el Ejemplo abajo.)

Utilizaremos la notación de los operadores diferenciales, así, si $\mathcal{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ es un polinomio, tenemos que

$$u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] \;=\; 0, \tag{1}$$

es una ecuación de evolución de primer orden desde que $\partial_x$ signifique la diferencial respecto de $x$; de este modo $\partial_x^k$ es equivalente a $\partial^k/\partial x^k$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

**Ejemplo.** Tomemos el polinomio cuadrático $\mathcal{P}(\tau) := a + b\tau + c\tau^2$, así la ecuación de evolución (1), es en este caso

$$\begin{aligned} 0 &= u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] \\ &= u_t + \big(a + b\partial_x + c\partial_x^2\big)u \\ &= u_t + au + bu_x + cu_{xx}, \end{aligned}$$

que se conoce como una ecuación de reacción-advección-difusión por sus términos $a$, $b$ y $c$, respectivamente.

Claramente decimos que la ecuación (1) es lineal si los coeficientes del polinomio $\mathcal{P}(\tau)$ dependen a lo sumo de $x$ y de $t$. Observa que la ecuación de evolución que estamos estudiando es siempre homogénea. Es importante destacar que el *Principio de Duhamel* es aplicable cuando conocemos la solución del problema de valor inicial (y de frontera) completamente homogéneo, es decir, cuando sabemos la solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] &=& 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,\, 0) &=& f(x), & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. . \tag{2}$$

(En caso de tener condiciones de frontera, estas deben ser Dirichlet o Neumann homogéneas.)

La idea del principio que presentaremos es que si conocemos la solución del PVI (2), entonces podemos resolver el mismo problema para una EDP no homogénea pero del mismo tipo, es decir, podemos construir la solución para el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] &=& f(x,\, t), & x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,\, 0) &=& 0, & x \in \mathbb{R} \end{array} \right. . \tag{3}$$

**Teorema 1** (Versión pequeña)**.** *La solución del problema lineal*[1] *y de valor inicial* (3) *es dado por el* **Principio de Duhamel***, por la función definida bajo la integral*

$$u(x,\, t) \;=\; \int_0^t u(x,\, t;\, s)\, ds, \tag{4}$$

*donde $u(x,\, t;\, s)$ depende del parámetro $s \in \mathbb{R}^+$ y resuelve un PVI homogéneo:*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] &=& 0, & x \in \mathbb{R},\; t > s \\ u(x,\, s;\, s) &=& f(x,\, s), & x \in \mathbb{R}\ (t = s) \end{array} \right. . \tag{5}$$

[1] Observa el detalle escrito en el ejercicio 5 más adelante y mantenlo en mente en la demostración.

Notemos que $u(x,\, t;\, s)$ no está definida para valores $t < s$, además, estos valores no son necesarios en la solución (4) pues no se necesitan los valores para $t \in [0,\, s)$. Sin embargo, a veces es natural definir $u(x,\, t;\, s) = 0$ para todo $t \in [0,\, s)$.

*Prueba.* Veamos primero que (4) satisface la condición inicial de (3), a saber,

$$u(x,\, 0) \;=\; \int_0^0 u(x,\, t;\, s)\, ds \;=\; 0,$$

pues la integral es vacía.

Ahora veamos la validez en la EDP; tenemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(x,\, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t u(x,\, t;\, s)\, ds \\
&= u(x,\, t;\, t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} u(x,\, t;\, s)\, ds \\
&= f(x,\, t) + \int_0^t u_t(x,\, t;\, s)\, ds,
\end{aligned}$$

de la condición inicial en (5). Por otro lado, como la integral depende del tiempo, las parciales respecto de la posición pasan sin problema bajo el signo de integral y tenemos que se satisface tanto

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,\, t) \;=\; \int_0^t u_x(x,\, t;\, s)\, ds$$

como que para toda $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,\, t) \;=\; \int_0^t \partial_x^k u(x,\, t;\, s)\, ds$$

se satisface. Tenemos entonces que el operador polinomial pasa por el signo de la integral, es decir,

$$\begin{aligned}
u_t(x,\, t) + \mathcal{P}(\partial_x)[u(x,\, t)] &= f(x,\, t) + \int_0^t u_t(x,\, t;\, s)\, ds + \int_0^t \mathcal{P}(\partial_x)[u](x,\, t;\, s)\, ds \\
&= f(x,\, t) + \int_0^t \big(u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u]\big)(x,\, t;\, s)\, ds \\
&= f(x,\, t),
\end{aligned}$$

en virtud de que cada $u(x,\, t;\, s)$ es solución de un PVI homogéneo. $\square$

Claramente el hecho de que nuestra ecuación de evolución (1) sea de primer orden en el tiempo, no es más que una particularidad. Es así que el *Principio de Duhamel* puede extenderse a casos más generales.

**Teorema 2** (Versión general)**.** *La solución para el problema lineal*[2] *y de valor inicial no homogéneo*

$$\left\{ \begin{array}{rcl}
\partial_t^n u + \mathcal{P}(\partial_x)[u] &=& f(x,\, t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > s \\
u(x,\, 0) \;=\; \partial_t u(x,\, 0) \;=\; \cdots \;=\; \partial_t^{n-1} u(x,\, 0) &=& 0, \qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R}
\end{array} \right. .$$

[2]Recuerda el ejercicio 5.

*es dado por el* **Principio de Duhamel***, por la función definida bajo la integral*

$$u(x,\,t) \;=\; \int_0^t u(x,\,t;\,s)\,ds, \tag{6}$$

*donde cada solución $u(x,\,t;\,s)$ depende del parámetro $s \in \mathbb{R}^+$ y resuelve el PVI homogéneo*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t^n u + \mathcal{P}(\partial_x)[u] & = & 0, & x \in \mathbb{R},\; t > s \\ u(x,\,s;\,s) \;=\; \partial_t u(x,\,s;\,s) \;=\; \cdots \;=\; \partial_t^{n-2} u(x,\,s;\,s) & = & 0, & x \in \mathbb{R}\;(t = s) \\ \partial_t^{n-1} u(x,\,s;\,s) & = & f(x,\,s), & x \in \mathbb{R}\;(t = s) \end{array} \right. .$$

*Prueba.* Las condiciones iniciales se satisfacen, a saber,

$$\begin{aligned} u(x,\,0) &= \int_0^0 u(x,\,t;\,s)\,ds \;=\; 0, \\ \partial_t u(x,\,0) &= u(x,\,0;\,0) + \int_0^0 \partial_t u(x,\,t;\,s)\,ds \;=\; 0, \\ \partial_t^2 u(x,\,0) &= \partial_t u(x,\,0;\,0) + \int_0^0 \partial_t^2 u(x,\,t;\,s)\,ds \;=\; 0, \\ &\vdots \\ \partial_t^{n-1} u(x,\,0) &= \partial_t^{n-2} u(x,\,0;\,0) + \int_0^0 \partial_t^{n-1} u(x,\,t;\,s)\,ds \;=\; 0, \end{aligned}$$

pues $u(x,\,0;\,0)$, $\partial_t u(x,\,0;\,0)$, ..., $\partial_t^{n-2} u(x,\,0;\,0)$ son nulos y las integrales son vacías. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \partial_t^n u(x,\,t) &= \partial_t^{n-1} u(x,\,t;\,t) + \int_0^t \partial_t^n u(x,\,t;\,s)\,ds \\ &= f(x,\,t) - \int_0^t \mathcal{P}(\partial_x)[u(x,\,t;\,s)]\,ds \\ &= f(x,\,t) - \mathcal{P}(\partial_x)[u(x,\,t)], \end{aligned}$$

pues como en la prueba anterior tenemos que las diferenciales respecto de $x$ pasan sobre la integral en $t$ y sabemos que $u(x,\,t;\,s)$ resuelve el PVI homogéneo. De esta última igualdad, tenemos que la solución (6) satisface el PVI no homogéneo original. □

**Ejercicios.**

1.- Demuestra el Teorema 1 cuando se tiene un problema de valor inicial y de frontera, a saber, el problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] & = & f(x,\,t), & x \in (a,\,b),\, t > 0 \\ u(x,\,0) & = & 0, & x \in [a,\,b] \\ u(a,\,t) \;=\; u(b,\,t) & = & 0, & t \geq 0 \end{array} \right. .$$

2.- Repite el ejercicio anterior con condiciones de Neumann homogéneas.

3.- Encuentra la solución del problema con condiciones iniciales no homeogeneas siguiente

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] &= f(x,\, t), \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,\, 0) &= g(x), \qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Por ejemplo, piensa en la ecuación de transporte.

4.- Piensa qué deberías hacer para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t + \mathcal{P}(\partial_x)[u] &= f(x,\, t), \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,\, 0) &= 0, \qquad\qquad\qquad x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

5.- Explica porqué el polinomio puede tener coeficientes que dependan de la posición $x$ pero no del tiempo $t$ sin que alteren el resultado de las pruebas.

6.- Trata de entender cómo debe ser una extensión del *Principio de Duhamel* cuando la ecuación de evolución no es lineal.

7.- Aplica el *Principio de Duhamel* a una solución que conozcas por separación de variables en su forma dada por la Serie de Fourier.

8.- Trata de entender, vía el Principion de Superposición, a las soluciones (4)-(6) como la suma infinitesimal de varias soluciones en el tiempo final $t$. Imagina, si es más fácil, que el forzante $f(x,\, t)$ es dado por pulsos en el tiempo. Usando la delta de Dirac $\delta_\tau(t)$ como un pulso al tiempo $t = \tau$, imagina que el forzante satisface

$$f(x,t) \; = \; \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) \delta_k(t),$$

para funciones suaves $f_k(x)$.