Un repaso rápido en Series de Fourier

La idea de estas notas es escribir lo básico sobre Series de Fourier, información más detallada puede ser encontrada en [Eva98, Sal08, Tol76].

1. Recuerda lo que es una función periódica de periodo T, nota que entonces:
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx \;=\; \text{Const.}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$
2. Notación de *armónicos*, es por eso que en las Series de Fourier se usará la terminología **modos armónicos**:
$$y(x) \;:=\; A\,\mathrm{sen}(\omega x + \varphi),$$
donde A es la amplitud del modo, ω la frecuencia (angular) y φ la fase inicial.
3. Los polinomios trigonométricos se definen similarmente a los clásicos. Tomando n como el grado y un perido $T = 2l$, tenemos
$$S_n(x) \;:=\; A + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi k x}{l} \right\}.$$
Un cambio de variables útil es $x = tl/\pi$, que nos convierte $S_n(x)$ en
$$\varphi(t) \;:=\; A + \sum_{k=1}^{n} \{ a_k \cos kt + b_k\,\mathrm{sen}\,kt \},$$
con modos armónicos de periodo 2π.

Ahora veremos propiedades del sistema básico de funciones trigonométricas:
$$\{1,\, \cos x,\, \mathrm{sen} x,\, \cdots,\, \cos kx,\, \mathrm{sen}\,kx,\, \cdots\}.$$

Primero, notemos que para $n \neq 0$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,nx\,dx \;=\; 0,$$
y que dadas las identidades trigonométricas
$$\begin{aligned}
\cos\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big),\\
\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big),\\
\mathrm{sen}\,\alpha\,\cos\beta &= \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{sen}(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}(\alpha-\beta)\big),
\end{aligned}$$
tenemos
$$\left.\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,\cos mx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\,dx \;=\; 0,\\
\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,nx\,\mathrm{sen}\,mx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\,dx \;=\; 0,
\end{aligned}\right. \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N},\, n \neq m,$$
así como
$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}\,nx\,\cos mx\,dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{sen}((n+m)x) + \mathrm{sen}((n-m)x)\,dx \;=\; 0, \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N}.$$

De las primeras identidades tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx\,dx \;=\; \pi, \quad \forall n,\, m \in \mathbb{N}.$$

Con esto hemos mostrado la ortogonalidad de la base de funciones trigonométricas.

Ahora, supongamos que tenemos una función $f(x)$ de periodo 2π escrita de la forma:

$$f(x) \;=\; \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right\}.$$

Notamos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \;=\; \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx \right\} \;=\; a_0\pi,$$

o sea que $f(x)$ es integrable. Veamos la integral de los productos con los elementos de la base:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\cos nx\,dx \right\} \\
&= a_n\pi, \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} nx\,dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\operatorname{sen} nx\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen} kx\operatorname{sen} nx\,dx \right\} \\
&= b_n\pi.
\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos la manera de calcular los *coeficientes de Fourier*:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad n = 0,\, 1,\, \cdots \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx, \qquad n = 1,\, 2,\, \cdots
\end{aligned}$$

¿Qué le hemos pedido a $f(x)$? ¿Será suficiente?

Teorema 1. Si la función $f(x)$ de periodo 2π se puede expandir en una serie trigonométrica que converge uniformemente en el eje real, entonces esta serie es la Serie de Fourier de $f(x)$. (La que acabamos de construir.)

Teorema 2. Una función absolutamente integrable $f(x)$ de periodo 2π puede expanderse en una serie trigonométrica que converge a $f(x)$, excepto posiblemente a un conjunto finito de puntos (por periodo); ésta es la Serie de Fourier de $f(x)$.

Observaciones imporantes sobre series de Fourier son muchas, tal vez las más importantes se relacionen a la paridad de las funciones: si el dominio se toma simétrico en torno del origen y la función a considerar es par, entonces todos los coeficientes b_n son nulos, si es impar, entonces son los coeficientes a_n los nulos. Otro comentario importante es que la serie de Fourier aunque sea formada por funciones de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, puede aproximar funciones discontinuas, siendo así en el límite discontinua. Lo curioso es que la discontinuidad es abierta en las dos partes contínuas y el valor en la discontinuidad es la media. Matemáticamente: digamos que $f(x)$ es discontinua en x_o, es decir, $\lim_{x\to x_o+} f(x) \neq \lim_{x\to x_o-} f(x)$. Sea $S[f](x)$ la serie de Fourier de $f(x)$, entonces se satiface que:

$$S[f](x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\lim_{\xi\to x+} f(\xi) + \lim_{\xi\to x-} f(\xi)\right),$$

en particular $S[f](x_o) = \big(\lim_{x\to x_o+} f(x) + \lim_{x\to x_o-} f(x)\big)/2$, y si la función es continua, entonces $S[f](x) \equiv f(x)$ para toda x.

Algunos ejemplos

1. $x^2 \;=\; \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$, con $x \in [-\pi,\, \pi]$.

   $x^2 \;=\; \dfrac{4\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{n^2} - \dfrac{\pi \operatorname{sen} nx}{n}\right)$, con $x \in [0,\, 2\pi]$.

2. $|x| \;=\; \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos x + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \dfrac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$, con $x \in [-\pi,\, \pi]$.

3. $|\operatorname{sen} x| \;=\; \dfrac{2}{\pi} - 4\left(\dfrac{\cos 2x}{3} + \dfrac{\cos 4x}{15} + \dfrac{\cos 6x}{35} + \cdots\right)$, con $x \in [-\pi,\, \pi]$.

4. $x \;=\; 2\left(\operatorname{sen} x - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \cdots\right)$, con $x \in [-\pi,\, \pi]$.

   $x \;=\; \pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots\right)$, con $x \in [0,\, 2\pi]$.

5. $\chi_{[0,\,\pi]}(x) \;=\; \dfrac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \cdots\right)$, con $x \in [-\pi,\, \pi]$.

Referencias

[Eva98] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* AMS Graduate Studies in Mathematics, Providence, 1998

[Sal08] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory.* Springer Universitext, Milano, 2008.

[Tol76] G.P. Tolstov, *Fourier Series.* Dover, New York, 1976.