Un repaso sobre la Transformada de Fourier

La idea de estas notas es escribir lo básico sobre Transformada de Fourier para resolver la ecuación del calor. Información más detallada puede ser encontrada en [Eva98, Sal08, Tol76].

Se dice muchas veces que la transformada de Fourier (o la Serie) relaciona la frecuencia y la amplitud de las ondas que generan una función. Cada *modo* tiene su amplitud y en el caso de funciones periódicas o acotadas, las frecuencias posibles son limitadas. Podemos pensar que "si x representa el tiempo en segundos, entonces la variable asociada ξ va representar la fecuencia en hertz".

La definición de la transformada depende del autor, hay muchos modos de expresarlar y *grosso modo* sólo cambian las constantes. Para una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrable definimos la **transformada de Fourier** asociada $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por la integral:

$$\hat{f}(\xi) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx \tag{1}$$

y su inversa está dada por:

$$f(x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi. \tag{2}$$

(Escoger el signo en la exponencial también es arbitrario y depende de cómo sea definida la frecuencia angular.) Esta es una de las versiones más usada por matemáticos dada la simetría que existe en la constante previa a la integral. Otra forma simétrica es

$$\hat{f}(\xi) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i\xi x}\, dx \quad \text{con} \quad f(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i\xi x}\, d\xi.$$

Los físicos muchas veces optan por la forma

$$\hat{f}(\omega) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \quad \text{con} \quad f(x) \;:=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega, \tag{3}$$

pues el modo $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$ representa la "masa" de la función y la frecuencia angular está normalizada correctamente; observa el factor 2π en la inversa. **Usaremos también esta forma, pues nuestros problemas provienen inicialmente del mundo físico.**

Denotamos al operador de la transformada de Fourier por $^\wedge : L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. (Se puede expander la teoría para funciones unicamente en $L^2(\mathbb{R})$, no lo necesitamos.) Luego, escribimos la transformada como $\hat{f}(\xi)$ o también por $\big(f(x)\big)^\wedge(\xi)$.

Algunas propiedades importantes de la transformada de Fourier son las siguientes.

1.- **Linealidad.** $\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)^\wedge(\xi) \;=\; \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi)$.

2.- **Modulación.** $\big(e^{ix\xi_o} f(x)\big)^\wedge(\xi) \;=\; \hat{f}(\xi - \xi_o)$.

3.- **Traslación.** $\big(f(x - x_o)\big)^\wedge(\xi) \;=\; e^{-ix_o\xi} \hat{f}(\xi)$.

4.- **Escalamiento.** $\big(f(ax)\big)^\wedge(\xi) \;=\; |a|^{-1} \hat{f}(\xi/a)$.

5.- **Cerradura.** Una propiedad muy importante es $\big(\hat{f}(x)\big)^\wedge(\xi) \;=\; f(-\xi)$, es decir, tenemos que $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ se satisface.

6.- **Derivación.** $\dfrac{d}{dx} f(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} i\xi\, e^{i\xi x}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$, por ejemplo en (3).

Además de estas propiedades algunos teoremas son importantes en las aplicaciones. Los siguientes son sencillos de demostrar y se dejan como ejercicio:

Teorema 1 (Plancharel). *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable en $L^2(\mathbb{R})$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \; = \; \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi,$$

es decir, la norma $L^2(\mathbb{R})$ es la misma para una función que para su transformada.

El Teorema de Plancharel es un caso particular del siguiente teorema, donde tenemos que recordar cómo definir la norma a partir del producto interior.

Teorema 2 (Parseval). *Dadas dos funciones integrables $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \overline{g(x)} \, dx \; = \; \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, \overline{\hat{g}(\xi)} \, d\xi,$$

es decir, la transformada de Fourier preserva el producto interior $L^2(\mathbb{R})$. (En notación más compacta $\langle f,\, g\rangle_2 = \langle \hat{f},\, \hat{g}\rangle_2$.)

Para entrar de lleno al teorema más importante, necesitamos recordar la convolución de funciones. Si tenemos dos funciones $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos la **función de convolución** $h(x) := (f * g)(x)$ por:

$$h(x) \; = \; \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y) \, dy \; = \; \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y) \, dy.$$

Estas funciones tienen propiedades increibles de suavizamiento, pero en un principio son complicadas de imaginar. Una excelente referencia "introductoria" es [IdM13], dos textos avanzados pero de gran calidad son [BN66, RS72].

Teorema 3 (de Convolución). *Sean $f,\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dos funciones integrables, entonces la convolución es un producto en el espacio transformado, es decir, $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)$.*

La prueba de este último teorema no es tan sencilla, pero es posible hacerla recordando que las integrales serán intercambiables dada la integrabilidad de todas las funciones involucradas.

El propósito

Hemos dicho que pretendemos resolver la ecuación del calor. La idea es hacerlo pensando en una barra infinita y la distribución de calor en ella. Así, pensamos en el dominio de los números reales con una condición inicial dada, es decir, queremos encontrar la solución de:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} T_t & = & \dfrac{K}{c_e \rho} T_{xx}, & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ T(x,\, 0) & = & h(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \tag{4}$$

donde $T(x,\, t)$ es la temperatura en la posición x al tiempo t, K es la conductividad térmica, c_e el calor específico y ρ la densidad del material considerado.

Si se observa la definición (3) vemos que para funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrables para cada tiempo $t \geq 0$ no está realmente definida la transformada de Fourier. No hay problema, lo haremos a cada tiempo, es decir:

$$T(x,\, t) \; = \; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{T}(\xi,\, t)\, e^{i\xi x} \, d\xi,$$

que será la guía para transformar el problema al espacio dual.

Sin embargo, sólo necesitamos un resultado previo, pues el camino trazado no tiene futuro solito. Además este resultado es más amplio, pues calcular la transformada de Fourier para las funciones gaussinas es muy útil en otras áreas de las matemáticas.

Tomemos la gaussina genérica

$$f(x) := A\, e^{-x^2/G^2}, \quad \text{con} \quad G > 0.$$

Normalizamos con la constante A, por conveniencia posterior, de modo que

$$\int_{\mathbb{R}} f^2(x)\, dx \;=\; 1, \qquad \text{o sea} \qquad A^2 \;=\; \left[\int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2/G^2}\, dx\right]^{-1}.$$

Tomando el cambio de variables $x = \eta G/\sqrt{2}$, es decir, $\sqrt{2}\, dx = G\, d\eta$, tenemos

$$A^2 \;=\; \left[\frac{G}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2}\, d\eta\right]^{-1} \;=\; \left[\frac{G}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}\right]^{-1} \;=\; \frac{\sqrt{2/\pi}}{G},$$

de esta forma, $f(x) = \sqrt{\sqrt{2/\pi}/G}\, \exp(-x^2/G^2)$. (El ancho de $f(x)$ es aproximadamente G y su máximo es A. Observa qué sucede cuando $G \to 0$.) Entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) \;&=\; A \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/G^2}\, e^{-i\xi x}\, dx \;=\; A \int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2/G^2 + i\xi x)}\, dx \\
&=\; A \int_{\mathbb{R}} e^{-(x/G + i\xi G/2)^2}\, e^{-\xi^2 G^2/4}\, dx \;=\; A\, e^{-\xi^2 G^2/4} \int_{\mathbb{R}} G\, e^{-(y + i\xi G/2)^2}\, dy \qquad (5) \\
&=\; AG\, e^{-\xi^2 G^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz \;=\; AG\sqrt{\pi} e^{-\xi^2 G^2/4} \\
&=\; \sqrt{\sqrt{2\pi} G}\; e^{-\frac{\xi^2 G^2}{4}}.
\end{aligned}$$

En (5) hicimos el cambio de variables $x = Gy$, en el siguiente paso $y = z - i\xi G/2$.

El resultado anterior, es decir,

$$f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{2/\pi}}{G}}\, \exp\left(-\frac{x^2}{G^2}\right) \qquad \text{y} \qquad \hat{f}(\xi) \;=\; \sqrt{\sqrt{2\pi} G}\; \exp\left(-\frac{\xi^2 G^2}{4}\right),$$

será el centro de nuestro estudio, pues dará entrada al **Núcleo del Calor** y con él a la solución al problema (4) descrito al inicio de esta sección.

Referencias

[BN66] G. Bachman y L. Narici, *Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1966.

[IdM13] R. Iório Júnior y V. de Magalhães Iório, *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução.* IMPA Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 2013.

[Eva98] L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* AMS Graduate Studies in Mathematics, Providence, 1998

[Sal08] S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory.* Springer Universitext, Milano, 2008.

[RS72] M. Reed y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1.* Academic Press, New York, 1972.

[Tol76] G.P. Tolstov, *Fourier Series.* Dover, New York, 1976.