Sección 5: Transformada de Laplace

En este pequeño apéndice trabajaremos con una idea un poco diferente a las anteriores. Este desarrollo nos abrirá el camino a la solución de ecuaciones diferenciales lineales de orden arbitrario. Para ello, consideraremos la función $\tilde{u}(s)$ definida por la relación

$$\tilde{u}(s) \;=\; \int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt, \tag{1}$$

donde $u(t)$ es la solución de una EDO lineal con coeficientes constantes. Sabemos entonces que esta solución está determinada de modo único por su forma fundamental

$$u(t) \;=\; b_1 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + b_n e^{\lambda_n t}, \tag{2}$$

donde los λ_1, $\lambda_2, \ldots,$ λ_n son la raices nulas del polinomio característico de la EDO original y sabemos que los términos b_1, $b_2, \ldots,$ b_n pueden ser polinomios en t cuando estas raices se repiten.

Observa que podemos grantizar la existencia de (1) para s suficientemente grande. Notamos también que $\tilde{u}(s)$ a veces es denotado como $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$ y se llama la **Transformada de Laplace**.

Veamos cómo se comporta esta transformada. Digamos que $u(t) = e^{bt}$, entonces $\mathcal{L}\{u(t)\}$ tiene una forma simple, a saber:

$$\tilde{u}(s) \;=\; \int_0^\infty e^{-st} e^{bt}\, dt \;=\; \int_0^\infty e^{(b-s)t}\, dt \;=\; \frac{1}{s-b},$$

para s suficientemente grande (mayor que b). Note que si tenemos entonces $1/(s-b)$ como la transformada de Laplace de una función exponencial, ésta sólo puede ser e^{bt}.

Ejercicio. Encuentra la transformada de Laplace para $u(t) = t^k e^{bt}$, con $b \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Hemos hecho ya el caso $k = 0$, ahora haremos el caso $k = 1$ en detalle y será fácil endender cómo hacerlo para $k + 1$. Tomamos entonces $u(t) = te^{bt}$ e integramos por partes:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(s) \;&=\; \int_0^\infty e^{-st} t e^{bt}\, dt \;=\; \int_0^\infty t e^{(b-s)t}\, dt \\
&=\; \left.\frac{te^{(b-s)t}}{s-b}\right|_0^\infty - \frac{1}{s-b}\int_0^\infty e^{(b-s)t}\, dt \;=\; \frac{1}{(s-b)^2},
\end{aligned}$$

y así con una simple iteración, podemos mostrar que en general

$$\mathcal{L}\big\{t^{k-1}e^{bt}\big\} \;=\; \frac{(k-1)!}{(s-b)^k}, \qquad \text{para} \qquad k = 1,\, 2, \ldots\,.$$

Luego, si encontramos la transformada $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/(s-b)^k$, asociamos ésta a la función $u(t) = t^{k-1}e^{bt}/(k-1)!$. Ya comenzamos a ver cómo será la transformada de Laplace de una solución fundamental de una EDO lineal con coeficientes constantes como en (2). Falta otra manera de relacionar la EDO en sí con la transformada de Laplace.

Ahora extraemos una propiedad relevante con cualidades muy importantes. Consideramos $\mathcal{L}\{u'(t)\}$ e integramos nuevamente por partes:

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} \;=\; \int_0^\infty e^{-st} u'(t)\, dt \;=\; e^{-st}u(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} u(t)\, dt \;=\; -u(0) + s\mathcal{L}\{u(t)\}\,, \tag{3}$$

al suponer simplemente que el límite de $u(t)$ con $t \to \infty$ crece de manera a lo más polinomial o con un exponente menor que s; s es considerado grande los suficiente.

Estamos listos para resolver el PVI siguiente

$$\begin{cases} u'(t) - bu(t) &= 0 \\ u(0) &= c \end{cases},$$

de manera un poco diferente. (Es claro que estamos considerando b y c como dos constantes arbitrarias.) Multiplicamos por el término e^{-st} e integramos para todo tiempo positivo:

$$\int_0^\infty e^{-st}\big[u'(t) - bu(t)\big]\,dt \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\infty e^{-st}u'(t)\,dt - b\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt \;=\; 0,$$

es decir, tenemos $\mathcal{L}\{u'(t)\} - b\mathcal{L}\{u(t)\} = 0$, o simplemente, $-u(0) + (s-b)\mathcal{L}\{u(t)\} = 0$, al usar la relación en (3). Ahora colocamos la condición inicial del PVI y buscamos $u(t)$ que satisfaga:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \;=\; \int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt \;=\; \frac{c}{s-b}. \tag{4}$$

En este punto tal vez es ambiguo y parece que $u(t)$ no puede ser deteminada de manera única. Observa que no estamos interesado en la última integral, solamente en las constantes adecuadas que nos determinan la solución del problema original en la forma que esperamos, es decir, encontrar a y λ tales que $u(t) = ae^{\lambda t}$ satisfaga (4). Vemos que tomando $a = c$ y $\lambda = b$ tenemos la solución que sabemos única por el Teorema 4.1. Ahora podemos pasar a ecuaciones de mayor orden.

Ejemplo: Ecuentra la solución del PVI

$$\begin{cases} u'' \;+\; 4u' \;+\; 3u &= 0 \\ u(0) \;=\; 1,\; u'(0) &= 1 \end{cases}.$$

Para resolver este problema con la metodología expuesta en este apartado, necesitamos entender cómo encontrar la transformada de Laplace de la segunda derivada, es decir, $\mathcal{L}\{u''(t)\}$. Integramos por partes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u''(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}u''(t)\,dt \;=\; e^{-st}u'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}u'(t)\,dt \\ &= -u'(0) + s\Big[-u(0) + s\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt\Big] \\ &= -u'(0) - su(0) + s^2\int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt, \end{aligned} \tag{5}$$

es decir, $\mathcal{L}\{u''(t)\} = -u'(0) + s\mathcal{L}\{u'(t)\} = -u'(0) - su(0) + s^2\mathcal{L}\{u(t)\}$.

No lo hemos probado, sin embargo es fácil ver que en virtud de la linealidad de las integrales, podemos tomar directamente la transformada de Laplace de toda la EDO en el PVI. Así,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\{u'' \;+\; 4u' \;+\; 3u\} \;=\; 0 \\ &\quad\Longrightarrow\quad \mathcal{L}\{u''\} + 4\mathcal{L}\{u'\} + 3\mathcal{L}\{u\} \;=\; 0 \\ &\quad\Longrightarrow\quad -u'(0) - su(0) + s^2\mathcal{L}\{u(t)\} - 4u(0) + 4s\mathcal{L}\{u(t)\} + 3\mathcal{L}\{u\} \;=\; 0 \\ &\quad\Longrightarrow\quad -1 - (s+4)(1) + (s^2 + 4s + 3)\mathcal{L}\{u\} \;=\; 0. \end{aligned}$$

(Se reconoce el polinomio característico $p(s) = s^2 + 4s + 3$ que tiene raices nulas en $s_1 = -1$ y $s_2 = -3$.) Queremos entonces encontrar $u(t)$ tal que

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \;=\; \int_0^\infty e^{-st}u(t)\,dt \;=\; \frac{1+(s+4)}{s^2+4s+3} \;=\; \frac{s+5}{(s+3)(s+1)}.$$

¿Cómo resolvemos esto? Recordando simplemente como separamos una integral,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \;=\; \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+1} \;=\; \frac{As+A+Bs+3B}{(s+3)(s+1)} \;=\; \frac{(A+3B)+(A+B)s}{(s+3)(s+1)},$$

es decir, cuando $A + 3B = 5$ y $A + B = 1$ que se soluciona con $A = -1$ y $B = 2$. Luego, tenemos

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \;=\; \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+1} \;=\; \mathcal{L}\{u_1(t)\} + \mathcal{L}\{u_2(t)\}\,,$$

donde tomando la igualdad entre constantes vemos que

$$u_1(t) \;=\; -e^{-3t}, \quad u_2(t) \;=\; 2e^{-t} \qquad \Longrightarrow \qquad u(t) \;=\; 2e^{-t} - e^{-3t}$$

satisface el PVI. (Muestra que es verdad.)

Es claro que las fórmulas para las transformadas de Laplace de las derivadas, como las dadas en (3) y (5) resultan útiles. Dado que no es difícil mostrar el siguiente resultado general, se deja como ejercicio

$$\mathcal{L}\left\{u^{(n)}(t)\right\} \;=\; s^n\mathcal{L}\{u(t)\} - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - su^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0),$$

para lo cual es necesario pedir que $u(t)$ pertenezca a las funciones $\mathcal{C}^n(I)$, con I un intervalo de interés. Aunque no siempre lo podremos pedir, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1. *Si $u(t)$ no es contínua en $t = 0$, pero existe el límite* $\lim_{t\to 0+} u(t) = u(0+)$ *necesariamente distinto de $u(0)$, entonces*

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} \;=\; s\mathcal{L}\{u(t)\} - u(0+).$$

En general, para que la transformada de Laplace esté bien definida, necesitamos condiciones extras sobre $u(t)$. Entre ellas, diremos que $u(t)$ es una **función de orden exponencial $\boldsymbol{\gamma}$** con $t \to \infty$ si existen constantes $M > 0$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que $|u(t)| < Me^{\gamma t}$ cuando $t \to \infty$. ¿Por qué no es necesario para todo $t > 0$? De hecho, podemos formalizar la convergencia con el próximo resultado.

Teorema 2. *Si $u(t)$ no es contínua por partes, pero limitada en cada intervalo $0 \le t \le T$ y de orden exponencial γ para $t > T$, entonces la transformada de Laplace $\tilde{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ existe para todo $s > \gamma$.*

Veamos que tanto $\operatorname{sen} at$ como $\cos at$ son de orden exponencial, entonces, estas funciones tiene transformada de Laplace, a saber,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} \;=\; \frac{a}{s^2+a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\cos at\} \;=\; \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad \text{con} \qquad s > 0.$$

Es un bonito ejercicio mostrar estas igualdades respectivamente con los siguientes PVI:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'' + a^2u &=& 0 \\ u(0) = 0,\; u'(0) &=& a \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} u'' + a^2u &=& 0 \\ u(0) = 1,\; u'(0) &=& 0 \end{array}\right., \tag{6}$$

pues sabemos que tienen por única solución $\operatorname{sen} at$ y $\cos at$ respectivamente. Se dejan los detalles al lector, recordando los teoremas de existencia y unicidad.

Hemos levantado ya la cuestión de la unicidad, y en el caso del ejercicio anterior es de crucial importancia. Veamos que con

$$u_1(t) \;=\; e^{-3t} \qquad \text{y} \qquad u_2(t) \;=\; \begin{cases} 0, & \text{si } t = 1 \\ e^{-3t}, & \text{si } t \neq 1 \end{cases} \tag{7}$$

obtenemos un pequeño problema, pues $\mathcal{L}\{u_1(t)\} = 1/(s+3)$ y no es difícil ver que $\mathcal{L}\{u_2(t)\} = 1/(s+3)$ también. Esta problemática puede ser dejada para atrás con un poco de rigurosidad. Para ello, veremos algunas de las propiedades de la transformada de Laplace que garantizan que es un *operador lineal*; definiremos el concepto de funciones nulas y entraremos en detalle con el Teorema de Lerch que garantiza la unicidad.

Suponiendo funciones como las del Teorema 2, tenemos las siguientes propiedades. Recordando que $\tilde{u}(s)$ representa la transformada de $\mathcal{L}\{u(t)\}$.

1.- Linealidad. Si c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y $u_1(t)$ y $u_2(t)$ funciones con transformadas $\tilde{u}_1(s)$ y $\tilde{u}_2(s)$ respectivamente, entonces

$$\mathcal{L}\{c_1u_1(t) + c_2u_2(t)\} \;=\; c_1\mathcal{L}\{u_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{u_2(t)\} \;=\; c_1\tilde{u}_1(s) + c_2\tilde{u}_2(s).$$

Por lo tanto $\mathcal{L}$ es un operador lineal entre espacios de funciones.

2.- Primera traslación. Si $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \tilde{u}(s-a)$.
Ejemplo: Dado que $\mathcal{L}\{\cos 3t\} = s/(s^2+9)$, entonces,

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 3t\} \;=\; \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \;=\; \frac{s+2}{s^2+4s+13}.$$

3.- Segunda traslación. Si $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$ y

$$v(t) \;=\; \begin{cases} u(t-a), & t \geq a \\ 0, & t \leq a \end{cases},$$

entonces $\mathcal{L}\{v(t)\} = e^{-as}\tilde{u}(s)$.

4.- Cambio de escala. Si $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$, entonces $\mathcal{L}\{u(at)\} = \tilde{u}(s/a)/a$.
Ejemplo: Dado que $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = 1/(s^2+1)$, entonces,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} \;=\; \frac{1}{a}\,\frac{1}{(s/a)^2+1} \;=\; \frac{a}{s^2+a^2}.$$

Estas cuatro propiedades siguen directamente de la definición de la transformada de Laplace y son claramente útiles para resolver problemas de distinta índole. De hecho, aunadas a las propiedades de la transformada sobre las derivadas resultan la base para la resolución de PVI con EDO lineales.

Sin embargo, a menudo nos podemos encontrar con problemas que provengan de ecuaciones integro-diferenciales, por lo cual también son importantes las siguientes propiedades.

5.- Transformada de Laplace sobre integrales. Si $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau)\,d\tau\right\} \;=\; \frac{1}{s}\tilde{u}(s).$$

6.- Multiplicación por t^n. Si $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\{t^n u(t)\} \;=\; (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\tilde{u}(s) \;=\; (-1)^n \tilde{u}^{(n)}(s).$$

Ejemplo: Lo hemos visto de modo vago, pero $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = 1/(s-2)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{te^{2t}\} &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) &= \frac{1}{(s-2)^2}, \\ \mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} &= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) &= \frac{2}{(s-2)^3}. \end{aligned}$$

7.- División por t. Si $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}u(t)\right\} \;=\; \int_s^\infty u(\tau)\,d\tau.$$

Siempre y cuando exista el límite $u(t)/t$ cuando $t \to 0+$.

Podemos continuar con la gran lista de propiedades de la transformada de Laplace, pero puede tener poca utilidad. Las últimas dos que veremos son interesantes y, como la mayoría de este tipo, resultan de cálculos directos.

8.- Funciones periódicas. Sea $u(t)$ de periodo $T > 0$, es decir, $u(t+T) = u(t)$. Entonces

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \;=\; \frac{\int_0^T e^{-st}u(t)\,dt}{1 - e^{sT}}.$$

9.- Comportamiento asintótico. El $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{u(t)\} = \lim_{s\to\infty} \tilde{u}(s) = 0$. Por otro lado, si los siguientes límites existen, ellos satisfacen

$$\lim_{s\to\infty} s\tilde{u}(s) \;=\; \lim_{t\to 0} u(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{s\to 0} s\tilde{u}(s) \;=\; \lim_{t\to\infty} u(t).$$

Definición 3. *Decimos que $\mathcal{N}(t)$ es una **función nula** si para todo $t > 0$ tenemos que*

$$\int_0^t \mathcal{N}(\tau)\,d\tau \;=\; 0.$$

Observa que otra manera de referirnos a estas funciones es como aquellas que son cero casi todo punto, pero recuerda que necesitamos satisfacer las condiciones del Teorema 2.

Teorema 4 (Teorema de Lerch). *Si nos restingimos a las funciones $u(t)$ que sean limitadas y continuas por partes en $0 \le t \le T$ y de orden exponencial para $t > T$, entonces la inversa de la transformada de Laplace de $\tilde{u}(s)$, es decir $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} = u(t)$ es única módulo suma de funciones nulas.*

El teorema anterior dice que se satisface tanto $\mathcal{L}\{u(t)\} = \tilde{u}(s)$ como $\mathcal{L}\{u(t) + \mathcal{N}(t)\} = \tilde{u}(s)$. Es decir, no tenemos que preocuparnos pues tomaremos $\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\} = u(t) \approx u(t) + \mathcal{N}(t)$, sin importar de qué función nula estemos hablando; la inversa es única en su clase de equivalencia; como habíamos comentado con la solución representada de dos formas en (7).

Del mismo modo que antes, podemos tener una serie de propiedades de la transformada inversa de Laplace. (Pueden verse éstas y otras en el libro de Murray R. Spiegel (1965) *Laplace Transforms.*)

Una de las principales razones para buscar la inversa o la transformada de Laplace es la variedad de métodos que existen para encontrarlas y la equivalencia entre ellos. Tenemos ya la definición de la transformada y de forma análoga a la resolución de EDO, podemos buscar otras, por ejemplo al usar series:

Si $u(t)$ tiene una expresión en series de potencias, al usar la linealidad podemos buscar la transformada $\mathcal{L}\{u(t)\}$. Digamos que

$$u(t) \;=\; a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Entonces, *formalmente* tenemos

$$\mathcal{L}\{u(t)\} \;=\; \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!\,a_2}{s^3} + \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s^{n+1}}.$$

¿Pero cómo saber que este procedimiento *formal* es riguroso? Simplemente, sabemos por el Teorema de Lerch (Teorema 4) cuándo $u(t)$ tiene una única transformada. Un ejemplo curioso aparece en Kuldeep Kumar Kataria (2016) “An alternate proof of the binomial theorem”, *Amer. Math. Monthly* **123(9)**:

An Alternate Proof of the Binomial Theorem

We give a simple proof of the binomial theorem using the Laplace transform.

Theorem 1. *Let n be any nonnegative integer and x, y two real numbers. Then*

$$(x+y)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}, \tag{1}$$

where 0^0 is interpreted as unity whenever $x = 0$ or $y = 0$.

Proof. For $x = 0$ or $y = 0$, (1) clearly holds. Let $t > 0$ be any positive real number, then the Laplace transform of $(1+t)^n$ for $s > 0$ is given by

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(1+t)^n\}(s) &= \int_0^{\infty} (1+t)^n e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{s} + \frac{n}{s}\mathcal{L}\big\{(1+t)^{n-1}\big\}(s), \qquad \text{(using integration by parts)} \\
&= \frac{1}{s} + \frac{n}{s^2} + \frac{n(n-1)}{s^2}\mathcal{L}\big\{(1+t)^{n-2}\big\}(s) \\
&\;\vdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{1}{s^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Taking the inverse Laplace transform, we obtain

$$(1+t)^n = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{s^{k+1}}\right\}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{k+1}}\right\}(t).$$

Therefore,

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}t^k. \tag{2}$$

Similarly, $(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-t)^k$.

From the above equation it is clear that (2) holds for all real t. The proof is now complete on substituting $t = x/y$ in (2). ■

— Submitted by Kuldeep Kumar Kataria

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Bombay, Powai, Mumbai-400076, India.
kulkat@math.iitb.ac.in

Sección 5.1: Análisis funcional, una breve introducción

En muchos problemas de ingeniería y física, por ejemplo, a veces es oportuno pensar en funciones que definen un "pulso". Una manera geométrica es considerar la función

$$d(t;\,\epsilon) = \begin{cases} 1/\epsilon, & 0 \le t \le \epsilon \\ 0, & t > \epsilon \end{cases}$$

que tiene la propiedad de ser siempre de integrando uno, es decir, sin importar el valor de $\epsilon > 0$ que se tome, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^+} d(t;\,\epsilon)\,dt \equiv 1.$$

Luego, cuando $\epsilon \to 0+$, esta propiedad se mantiene. De hecho, tenemos algunas otras, si denotamos $\delta(t) := \lim_{\epsilon\to 0+} d(t;\,\epsilon)$ a esta expresión la llamamos **Delta de Dirac**. Observemos por lo menos tres propiedades importantes:

1.- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \delta(t)\,dt \equiv 1,$

2.- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \delta(t)G(t)\,dt = G(0),$

3.- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \delta(t-a)G(t)\,dt = G(a),$

para cualquier función continua $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y $a > 0$. De la propiedad 2 obtenemos que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = e^{-st}\big|_{t=0} = 1$, y de la tercera propiedad tenemos $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-sa}$.

Notemos que la Delta de Dirac *no* es una función en el sentido usal, de hecho $\delta(0)$ no está bien definido y $\delta(t) \equiv 0$ para todo $t \neq 0$. ¿Cómo sería posible que su integral fuera uno? Esta es una función o mejor dicho una *distribución* del análisis funcional.

Otro elemento importante del análisis funcional y en particular en este sentido de las distribuciones es la función de *Heaviside* definida por:

$$\mathcal{H}(t-a) \ := \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}.$$

Observa que no hemos definido $\mathcal{H}(0)$; puede ser tanto cero como uno, según la conveniencia.

Sin embargo, es fácil evaluar su transformada de Laplace pues

$$\mathcal{L}\{\mathcal{H}(t-a)\} \ = \ \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{H}(t-a)\,dt \ = \ \int_a^\infty e^{-st}\,dt \ = \ \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty \ = \ \frac{e^{-as}}{s}.$$

ahora notemos que $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \delta(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\}\,/s = 1/s$. Más importante aún es la equivalencia

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \delta(\tau-a)\,d\tau\right\} \ = \ \frac{\mathcal{L}\{\delta(t-a\}}{s} \ = \ \frac{e^{-as}}{s} \ = \ \mathcal{L}\{\mathcal{H}(t-a)\}\,,$$

es decir, la integral de la Delta de Dirac nos da la función de Heaviside. De modo más asombroso, tenemos que la derivada de una función discontinua tiene una expresión rigurosa denotada por $\delta(t-a)$. (Será multiplicada por un factor que es proporcional al tamaño de la discontinuidad.)

Otra propiedad importante es el *Teorema de la Convolución*. Para dos funciones u, v : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ se define la **convolución $\boldsymbol{u * v}$** con la integral

$$(u * v)(t) \ := \ \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)\,d\tau,$$

con lo cual tenemos el siguiente resultado que les será útil cuando trabajen con **variables aleatorias independientes**.

Teorema 5 (Teorema de Convolución). *Si $\tilde{u}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ y $\tilde{v}(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$, entonces*

$$\mathcal{L}\{(u * v)(t)\} \ = \ \tilde{u}(s)\,\tilde{v}(s),$$

o tomando la notación de la transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{u}(s)\,\tilde{v}(s)\} \ = \ \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)\,d\tau \ = \ (u * v)(t).$$

Este es uno de los caminos al *método de fracciones parciales*, pero lo más importante es descomponer una integral complicada en el producto de las funciones que la conforman.

Actually this sharpness is better approximated by a fifht-order polynomial function, which in turn has an easier mathematical and numerical treatment since the slopes of their differentials are more regular. We explicitly write

$$F_2(S_w) \;=\; \begin{cases} 0, & S_w < fmdry - \epsilon \\ \frac{1+1.875\,x-1.25\,x^3+0.375\,x^5}{2}, & S_w \in [\,fmdry-\epsilon,\, fmdry-\epsilon\,]\,, \\ 1, & S_w > fmdry + \epsilon \end{cases} \tag{8}$$

where $x = (S_w - fmdry)/\epsilon$ and $\epsilon = 50/epdry$. Such a polynomial has zero slope at $fmdry \pm \epsilon$, it changes form zero to one in a narrow region of $2\epsilon \approx 0.0166$ and has a maximum value of its first derivative as 112.5 instead of the larger first derivative of the arctangent with a value of approximatly 1909.

See Fig. A-1 for a comparision between F_2 as a arctangent (Eq. A-2) and our polynomial representation (Eq. 8). In a very narrow range of S_w around S_w^* depending on the value of *epdry*, $F_2(S_w)$ in Eq. 8 changes more abruptly than F_2 in Eq. A-3, as seen from the expanded view in Fig. A-1. For most S_w, the difference between the two functions is negligibly small. Nevertheless, confirming that the polynomial function of Eq. 8 represents better the sharp transition than the arctangent function of Eq. A-3 for the impact of S_w on foam.